# TEKIJÄ

## PITKÄ MATEMATIIKKA 6

Paavo Heiskanen
Päivi Kaakinen
Jukka Lehtonen
Mika Leikas
Jorma Tahvanainen

Sanoma Pro Oy

## DERIVAATTA

**Tiedustelut**
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy
1. painos, 2017

ISBN 978-952-63-4529-1

Toimitus: Timo Pitkänen
Kuvatoimitus: Suvi-Tuuli Kankaanpää
Ulkoasu: Liisa Holm, Sari Jeskanen
Taitto: Eija Högman
Kuvitus: Marja Venäläinen
Kansi: Vaidas Bagonas, Sari Jeskanen

Kannen kuva: tantaaliin (lat. tantalum, järjestysluku 73) laserin avulla tehtyjä nanorakenteita

Teos on saanut tukea Suomen tietokirjailijat ry:ltä.

© Paavo Heiskanen, Päivi Kaakinen, Jukka Lehtonen, Mika Leikas,
Jorma Tahvanainen ja Sanoma Pro Oy

**Kopiointiehdot**
Tämä teos on oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

Tämän teoksen tai sen osan valokopiointi, skannaaminen tai muu digitaalinen kopiointi tai käyttö edellyttää oikeudenomistajan luvan.

Kopiosto ry myöntää teosten osittaiseen kopiointiin lupia. Tarkistakaa, mitkä valokopiointi- ja digiluvat ovat kohdallanne voimassa. Lisätietoja luvista www.kopiosto.fi

Teoksen tai sen osan muuntelu on kielletty.

# Käyttäjälle

## Tekijä, pitkä matematiikka 6

Derivaatta-kurssilla perehdytään differentiaalilaskennan perusteisiin. Kurssin tavoitteena on, että opiskelija saa havainnollisen kuvan uusista käsitteistä funktion raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta sekä oppii tutkimaan polynomi- ja rationaalifunktioiden kulkua. Kurssi 6 aloittaa kurssien 6–9 muodostaman kokonaisuuden.

## Eteneminen

Luvun avaa tutkimus tai johdanto, joka ohjaa opiskelijan löytämään uutta tietoa. Uusi teoreettinen tieto esitetään täsmällisesti määritelminä ja lauseina, jotka perustellaan. Esimerkit ohjaavat löydetyn tiedon soveltamiseen. Teoria ja esimerkit on kirjoitettu niin, että opiskelija voi omaksua ne itsenäisesti, ja siksi kirja tukee hyvin myös käänteisen opetuksen menetelmiä.

**ESIMERKKI 1**

Kirjaan on merkitty esimerkit, jotka on tarkoitus oppia tekemään ilman symbolisen laskennan, taulukkolaskennan tai geometrian ohjelmistoa.

**ESIMERKKI 2**

Muissa esimerkeissä opastetaan, kuinka teknisiä apuvälineitä käytetään tarkoituksenmukaisella tavalla.

Harjoitustehtävät ovat kahtena sarjana. Sarja I sisältää perustehtäviä, jotka noudattavat esimerkkien järjestystä. Sarja II sisältää perustehtäviä ja vaativampia tehtäviä.

**1.** Tehtävät, jotka ratkaistaan ilman symbolisen laskennan, taulukkolaskennan tai geometrian ohjelmistoa, on merkitty taustavärillä.

**2.** Tehtävät, joissa voi käyttää kaikkia apuvälineitä, on merkitty ilman taustaväriä.

E1 Viittaukset esimerkkeihin auttavat harjoittelussa.

Videologolla merkittyihin tehtäviin liittyy opiskelijan digikirjassa ja opettajan digiaineistossa opetusvideo.

Geometrialogolla merkityt tehtävät ratkaistaan geometriaohjelman avulla.

## Kertaaminen

Kertaustehtävät on jaettu neljään osaan: ensin käydään läpi kurssin sisältö otsikoiden mukaan järjestettynä, minkä jälkeen on monivalintatehtäviä sekä tehtäväsarjat A ja B, joissa on tehtäviä koko kurssin alueelta.

Toivotamme innostavia opiskeluhetkiä.

Kuopiossa 1.5.2017

*Tekijät*

# Sisällys


**1 Rationaalifunktio** ..... 6

1.1 Rationaalifunktio ..... 6
1.2 Rationaaliyhtälö ..... 16
1.3 Rationaaliepäyhtälö ..... 21

**2 Raja-arvo ja jatkuvuus** ..... 28

2.1 Funktion raja-arvo ..... 28
2.2 Raja-arvon määrittäminen ..... 40
2.3 Funktion jatkuvuus ..... 50
2.4 Jatkuvuus joukossa ..... 58

**3 Derivaatta** ..... 68

**4 Polynomifunktion derivaatta** ..... 82

4.1 Potenssin ja tulon derivaatta ..... 83
4.2 Polynomifunktion kasvaminen ja väheneminen ..... 93
4.3 Polynomifunktion suurin ja pienin arvo ..... 105
4.4 Tangentin yhtälö ..... 114

**5 Rationaalifunktion derivaatta** ..... 122

5.1 Osamäärän derivaatta ..... 122
5.2 Rationaalifunktion kulku ..... 131

**6 Derivaatan sovelluksia** ..... 140

**Kertaus** ..... 151

1 Rationaalifunktio ..... 151
2 Raja-arvo ja jatkuvuus ..... 152
3 Derivaatta ..... 153
4 Polynomifunktion derivaatta ..... 153
5 Rationaalifunktion derivaatta ..... 155
Monivalintatehtävät ..... 156
Tehtäväsarja A ..... 159
Tehtäväsarja B ..... 160

**Vastaukset** ..... 161
**Hakemisto** ..... 179

# Aikatauluehdotus

| | | 45 min | 75 min |
|---|---|---|---|
| **1** | **Rationaalifunktio** | **5** | **3** |
| 1.1 | Rationaalifunktio | 1 | 1 |
| 1.2 | Rationaaliyhtälö | 2 | 1 |
| 1.3 | Rationaaliepäyhtälö | 2 | 1 |
| **2** | **Raja-arvo ja jatkuvuus** | **6** | **4** |
| 2.1 | Funktion raja-arvo | 1 | 1 |
| 2.2 | Raja-arvon määrittäminen | 2 | 1 |
| 2.3 | Funktion jatkuvuus | 2 | 1 |
| 2.4 | Jatkuvuus joukossa | 1 | 1 |
| **3** | **Derivaatta** | **2** | **1** |
| **4** | **Polynomifunktion derivaatta** | **7** | **4** |
| 4.1 | Potenssin ja tulon derivaatta | 1 | 1 |
| 4.2 | Polynomifunktion kasvaminen ja väheneminen | 2 | 1 |
| 4.3 | Polynomifunktion suurin ja pienin arvo | 2 | 1 |
| 4.4 | Tangentin yhtälö | 2 | 1 |
| **5** | **Rationaalifunktion derivaatta** | **5** | **3** |
| 5.1 | Osamäärän derivaatta | 2 | 1 |
| 5.2 | Rationaalifunktion kulku | 3 | 2 |
| **6** | **Derivaatan sovelluksia** | **2** | **1** |
| **Kertaus** | | **1** | **1** |
| | **yhteensä** | **28** | **17** |

# 1 Rationaalifunktio

*Aiemmilla kursseilla on tutustuttu polynomifunktioihin ja ratkaistu polynomiyhtälöitä ja -epäyhtälöitä. Tässä luvussa tutustutaan rationaalifunktioihin ja opitaan ratkaisemaan rationaaliyhtälöitä ja -epäyhtälöitä. Samalla harjaannutaan supistamaan, laskemaan yhteen ja vähentämään murtolausekkeita. Näitä taitoja tarvitaan myöhemmin tällä kurssilla.*

## 1.1 Rationaalifunktio

**TUTKIMUS**

Olkoon $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ ja $g(x)=x+3$.

1) Määritä funktioiden arvot kohdassa $x=3$, jos se on mahdollista.
2) Millä muuttujan $x$ arvoilla funktioiden $f$ ja $g$ arvot voidaan laskea?
3) Piirrä funktioiden $f$ ja $g$ kuvaajat.
4) Miten funktiot $f$ ja $g$ eroavat toisistaan? Miten tämä ero näkyy niiden kuvaajissa?

## Funktion käsite

Kurssissa 1 määriteltiin funktion käsite seuraavasti.

**Funktio** Määritelmä

*Funktio* on sääntö, joka liittää jokaiseen määrittelyjoukon lukuun täsmälleen yhden luvun, jota kutsutaan funktion arvoksi.

Funktion sääntö voidaan usein esittää lausekkeena. Esimerkiksi:

$$f(x) = 4x^3 - 1$$

funktion nimi — muuttuja — funktion lauseke

Funktion arvo lasketaan sijoittamalla haluttu luku muuttujan paikalle.

$$f(2) = 4 \cdot 2^3 - 1 = 31$$

muuttujan arvo — funktion arvo

Merkintä $f(2) = 31$ luetaan ”funktion $f$ arvo kohdassa 2 on 31”.

Tällä kurssilla tutkitaan polynomifunktioita ja rationaalifunktioita. *Polynomifunktio* on funktio, jonka lauseke on polynomi.

Esimerkiksi funktio $f(x) = 4x^3 - 1$ on polynomifunktio.

*Murtolauseke* on kahden polynomin osamäärä.

Esimerkiksi lausekkeet $\frac{x^4 - x}{x + 5}$ ja $\frac{1}{x - 3}$ ovat murtolausekkeita.

*Rationaalifunktio* on funktio, jonka lauseke on polynomien ja murtolausekkeiden summa.

Esimerkiksi funktiot

$f(x) = 4x^3 - 1$, $g(x) = \frac{x^4 - x}{x + 5}$ ja $h(x) = 4x^3 - 1 + \frac{1}{x - 3}$

ovat rationaalifunktioita.

**Huomaa!**
Kaikki polynomifunktiot ovat rationaalifunktioita.

**Funktion määrittelyjoukko** Määritelmä

Funktion *määrittelyjoukko* muodostuu niistä luvuista, jotka voidaan sijoittaa funktioon muuttujan paikalle.

Jos funktio määritellään antamalla pelkästään sen lauseke, niin määrittelyjoukon muodostavat kaikki ne luvut, joilla funktion arvo on mahdollista laskea.

Polynomifunktion $f(x) = 4x^3 - 1$ arvo on mahdollista laskea kaikilla muuttujan $x$ arvoilla. Funktion $f$ määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbf{R}$.

**Huomaa!**
Jakolaskua $\frac{a}{0}$ ei ole määritelty millään reaaliluvulla $a$.

Rationaalifunktion $g(x) = \frac{x^4 - x}{x} + \frac{1}{x-3}$ arvoja $g(0) = \frac{0}{0} + \frac{1}{3}$ ja $g(3) = 26 + \frac{1}{0}$ ei ole mahdollista laskea.

Funktio $g$ on määritelty, kun $x \neq 0$ ja $x \neq 3$. Funktion $g$ määrittelyjoukko on reaalilukujen joukko, josta on poistettu luvut $0$ ja $3$, eli joukko $\mathbf{R} \setminus \{0, 3\}$.

Funktio voidaan määritellä antamalla lausekkeen lisäksi myös sen *määrittelyehto*.

**Huomaa!**
Funktio on yksikäsitteisesti määritelty, kun tunnetaan sen lausekkeen lisäksi myös sen määrittelyjoukko.

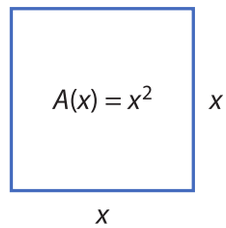
Esimerkiksi funktio voidaan määritellä sanomalla:

”Olkoon $f(x) = 1 - x^2$, kun $-1 \leq x \leq 1$.”

Tällöin funktion $f$ määrittelyehto on $-1 \leq x \leq 1$, ja funktion $f$ määrittelyjoukko on väli $[-1, 1]$.

Määrittelyjoukkoa voi rajata myös käytännön tilanne, johon funktio liittyy.

Esimerkiksi neliön pinta-alan riippuvuuden sivun pituudesta $x$ ilmaisee funktio $A(x) = x^2$. Koska $x$ ilmaisee sivun pituuden, niin funktion $A$ määrittelyehto on $x > 0$, ja funktion $A$ määrittelyjoukko on väli $]0, \infty[$.




**Funktion arvojoukko** Määritelmä

1) Funktion *arvojoukko* muodostuu kaikista funktion saamista arvoista.

2) *Funktion suurin arvo* on arvojoukon suurin luku, ja *funktion pienin arvo* on arvojoukon pienin luku, jos ne ovat olemassa.

## ESIMERKKI 1

Olkoon $f(x)=\dfrac{x}{2x-6}+\dfrac{3}{x+1}$.

**a)** Määritä funktion $f$ määrittelyjoukko.

**b)** Piirrä funktion $f$ kuvaaja.

### RATKAISU

**a)** Funktion $f$ arvoa ei voida laskea niillä muuttujan $x$ arvoilla, joilla nimittäjän arvoksi tulee nolla. Funktio on määritelty kaikilla muilla muuttujan $x$ arvoilla.

Ratkaistaan nimittäjien nollakohdat.

$$\begin{array}{l|l} 2x-6=0 & x+1=0 \\ \quad x=3 & \quad x=-1 \end{array}$$

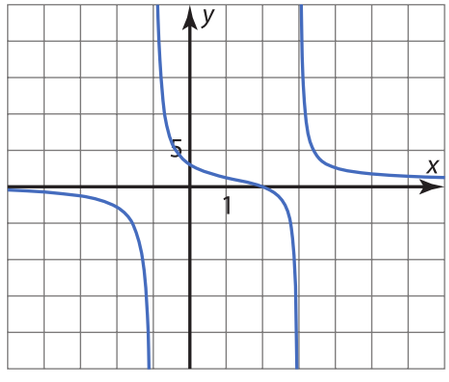
Funktion $f$ määrittelyehto on $x \neq -1$ ja $x \neq 3$.

Funktion arvo voidaan laskea, kun $x \neq -1$ ja $x \neq 3$.

Funktion $f$ määrittelyjoukko on $\mathbf{R} \setminus \{-1, 3\}$.

Reaalilukujen joukosta $\mathbf{R}$ on poistettu luvut $-1$ ja $3$.

**b)** Piirretään laskimella funktion $f(x)=\dfrac{x}{2x-6}+\dfrac{3}{x+1}$ kuvaaja.




Funktion $f$ kuvaaja koostuu kolmesta erillisestä osasta, koska funktiota ei ole määritelty kohdissa $x = -1$ ja $x = 3$.

### VASTAUS

**a)** $\mathbf{R} \setminus \{-1, 3\}$

## Murtolausekkeen supistaminen

Murtoluku voidaan supistaa, jos sen osoittajalla ja nimittäjällä on yhteinen tekijä. Yhteinen tekijä nähdään, kun osoittaja ja nimittäjä kirjoitetaan tulomuotoon (jaetaan tekijöihin). Murtolausekkeita supistetaan samalla tavalla kuin murtolukuja:

$$\frac{6}{10}=\frac{\cancel{2}^{1}\cdot 3}{\cancel{2}_{1}\cdot 5}=\frac{3}{5} \qquad \frac{5x}{3x^2}=\frac{5\cdot \cancel{x}^{1}}{3\cdot x\cdot \cancel{x}_{1}}=\frac{5}{3x}.$$

**ESIMERKKI 2**

Selvitä määrittelyehto ja supista murtolauseke.

**a)** $\dfrac{15x-6x^2}{3x}$ **b)** $\dfrac{6x-18}{7x-21}$ **c)** $\dfrac{x-2}{2-x}$

**RATKAISU**

**a)** Nimittäjän $3x$ nollakohta on $x=0$.

Murtolausekkeen määrittelyehto on $x\neq 0$.

$\dfrac{15x-6x^2}{3x}$ — Osoittajan termien yhteinen tekijä on $3x$.

$=\dfrac{\cancel{3x}^{1}\cdot(5-2x)}{\cancel{3x}_{1}}=5-2x$ — Supistetaan osoittajan ja nimittäjän yhteinen tekijä $3x$.

**b)** Nimittäjän $7x-21$ nollakohta on $x=3$.

Murtolausekkeen määrittelyehto on $x\neq 3$.

$\dfrac{6x-18}{7x-21}$ — Osoittajan yhteinen tekijä on 6. Nimittäjän yhteinen tekijä on 7.

$=\dfrac{6\cdot\cancel{(x-3)}^{1}}{7\cdot\cancel{(x-3)}_{1}}=\dfrac{6}{7}$ — Supistetaan osoittajan ja nimittäjän yhteinen tekijä $x-3$.

**Huomaa!**

Summasta ei voi supistaa.

Oikein:

$\dfrac{2+1}{2+3}=\dfrac{3}{5}$

Väärin:

$\dfrac{\cancel{2}^{1}+1}{\cancel{2}_{1}+3}=\dfrac{1+1}{1+3}=\dfrac{2}{4}$

**c)** Nimittäjän $2 - x$ nollakohta on $x = 2$.

Murtolausekkeen määrittelyehto on $x \neq 2$.

$$\frac{x-2}{2-x}$$

Nimittäjässä on
$2 - x = -x + 2 = -1 \cdot (x - 2)$.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{(x-2)}}}{-1 \cdot \underset{1}{\cancel{(x-2)}}} = -1$$

Supistetaan osoittajan ja nimittäjän yhteinen tekijä $x - 2$.

**VASTAUS**

**a)** $5 - 2x$, kun $x \neq 0$ **b)** $\frac{6}{7}$, kun $x \neq 3$ **c)** $-1$, kun $x \neq 2$

## ESIMERKKI 3

Millä muuttujan $x$ arvoilla funktio $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ on määritelty? Supista funktion lauseke.

**RATKAISU**

Nimittäjän $x - 3$ nollakohta on $x = 3$.

Funktio $f$ on määritelty, kun $x \neq 3$.

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$= \frac{x^2 - 3^2}{x - 3}$$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$$= \frac{(x+3)\overset{1}{\cancel{(x-3)}}}{\underset{1}{\cancel{x-3}}}$$

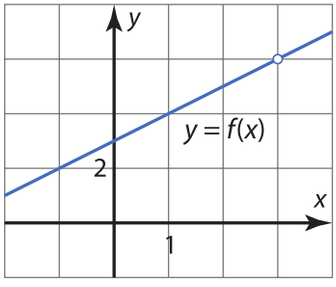
$$= x + 3$$

**VASTAUS**

$f(x) = x + 3$, kun $x \neq 3$

**Huomaa!**

Koska
$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3$,
kun $x \neq 3$, niin funktion $f$ kuvaaja on suora, jossa on aukko kohdassa $x = 3$. Aukko on tapana merkitä kuvaan avoimella pallukalla. Laskin ei piirrää pallukkaa näkyviin, koska aukko kuvaajassa on niin pieni.



## Murtolausekkeiden summa ja erotus

Murtolausekkeiden summa ja erotus lasketaan samalla tavalla kuin murtolukujen summa ja erotus. Tulos voidaan aina sieventää yhdeksi murtolausekkeeksi:

$$\overset{3)}{\frac{1}{2x}} + \overset{2x)}{\frac{x}{3}} = \frac{3}{6x} + \frac{2x^2}{6x} = \frac{3+2x^2}{6x}.$$

**ESIMERKKI 4**

Selvitä määrittelyehto ja sievennä lauseke $\frac{x+1}{x-2} - \frac{x-1}{x}$.

**RATKAISU**

Nimittäjän $x-2$ nollakohta on $x=2$, ja nimittäjän $x$ nollakohta on $x=0$. Määrittelyehto on $x \neq 0$ ja $x \neq 2$.

Sievennetään yhdeksi murtolausekkeeksi.

$\overset{x)}{\frac{x+1}{x-2}} - \overset{x-2)}{\frac{x-1}{x}}$ — Lavennetaan samannimisiksi.

$= \frac{x(x+1)}{x(x-2)} - \frac{(x-2)(x-1)}{x(x-2)}$ — Sievennetään osoittajat.

$= \frac{x^2+x}{x(x-2)} - \frac{x^2-3x+2}{x(x-2)}$ — Vähennetään osoittajat toisistaan. Nimittäjäksi tulee yhteinen nimittäjä.

$= \frac{x^2+x-(x^2-3x+2)}{x(x-2)}$ — Poistetaan osoittajasta sulkeet.

$= \frac{x^2+x-x^2+3x-2}{x(x-2)}$

$= \frac{4x-2}{x(x-2)}$ — Osoittajalla ja nimittäjällä ei ole yhteistä tekijää. Ei voi supistaa.

$= \frac{4x-2}{x^2-2x}$

**VASTAUS**

$\frac{4x-2}{x^2-2x}$, kun $x \neq 0$ ja $x \neq 2$

## Polynomin nollakohtien ja tekijöiden yhteys
(Syventävää tietoa)

**ESIMERKKI 5** Syventävä

Määritä vakiolle $b$ sellainen arvo, että funktion $f(x)=\dfrac{2x^2+bx-30}{x+3}$ lauseke voidaan supistaa. Supista lauseke.

**RATKAISU**

Nimittäjän $x+3$ nollakohta on $x=-3$.

Funktio $f$ on määritelty, kun $x \neq -3$.

**Lause**
Luku $x_0$ on polynomin $P(x)$ nollakohta, jos ja vain jos $x-x_0$ on polynomin $P(x)$ tekijä.

Funktion lauseke voidaan supistaa vain, jos osoittajalla ja nimittäjällä on yhteinen tekijä. Osoittajalla on tekijä $x+3$ vain, jos $-3$ on osoittajan nollakohta.

Ratkaistaan vakio $b$.

$2\cdot(-3)^2+b\cdot(-3)-30=0$ Osoittajan arvo kohdassa $-3$ on $0$.

$b=-4$

Ratkaistaan osoittajan nollakohdat.

$2x^2-4x-30=0$ Ratkaistaan ratkaisukaavalla tai laskimella.

$x=-3$ tai $x=5$

**Lause**
Jos toisen asteen yhtälön $ax^2+bx+c=0$ juuret ovat $x_1$ ja $x_2$, niin $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Jaetaan osoittaja tekijöihin.

$2x^2-4x-30=2(x+3)(x-5)$

Supistetaan funktion lauseke.

$$f(x)=\frac{2x^2-4x-30}{x+3}=\frac{2(\cancel{x+3}^{\,1})(x-5)}{\cancel{x+3}_{\,1}}=2(x-5)=2x-10$$

**VASTAUS**

$b=-4$, $f(x)=2x-10$, kun $x \neq -3$

## Harjoitustehtäviä

### Sarja I

**1.** Olkoon $f(x)=x-1+\frac{1}{x+2}$.

E1

a) Määritä funktion $f$ määrittelyjoukko.

b) Piirrä funktion $f$ kuvaaja.

**2.** Millä muuttujan $x$ arvoilla funktio on määritelty? Piirrä funktion kuvaaja.

a) $f(x)=\frac{2}{x^2-3x}$ b) $g(x)=\frac{x^2-3x}{2}$

c) $h(x)=x^2-\frac{3}{x}$ d) $k(x)=x^2-\frac{x}{3}$

**3.** Selvitä määrittelyehto ja supista murtolauseke.

E2

a) $\frac{3x^2+x}{x}$ b) $\frac{12x-4x^2}{4x}$ c) $\frac{4x}{6x+2x^2}$

**4.** Selvitä määrittelyehto ja supista murtolauseke.

a) $\frac{6x-2}{3x-1}$ b) $\frac{5x+15}{4x+12}$ c) $\frac{5x^2-10x}{3x-6}$

**5.** Selvitä määrittelyehto ja supista murtolauseke, jos se on mahdollista.

a) $\frac{x+1}{1+x}$ b) $\frac{x-1}{1-x}$

c) $\frac{x+1}{1-x}$ d) $\frac{3x-1}{1-3x}$

**6.** Olkoon $f(x)=\frac{x^2-16}{2x+8}$.

E3

a) Millä muuttujan $x$ arvoilla funktio $f$ on määritelty?

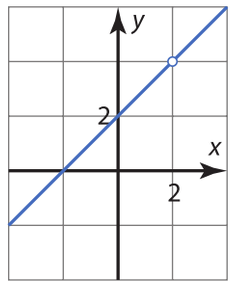
b) Supista funktion $f$ lauseke.

**7.** Supista funktion lauseke ja tunnista funktion kuvaaja.

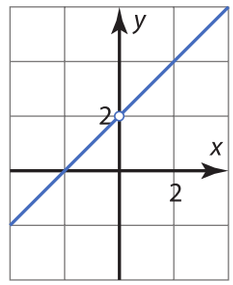
a) $f(x)=\frac{x^2+2x}{x}$ b) $f(x)=\frac{x^3-2x^2}{x^2-2x}$

c) $f(x)=\frac{x^2-2x}{x-2}$ d) $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$

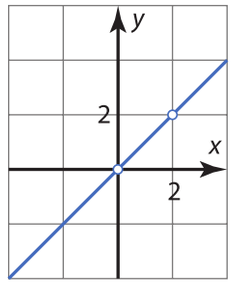
1



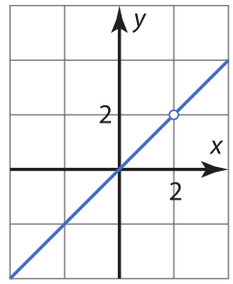

2




3




4




**8.** Selvitä määrittelyehto ja sievennä lauseke.

E4

a) $\frac{1}{4x}+\frac{2}{3x}$ b) $\frac{1}{3}-\frac{5}{2x}$ c) $\frac{1}{x}+3$

**9.** Selvitä määrittelyehto ja sievennä lauseke.

a) $\frac{1}{3x}+\frac{x-1}{2x}$

b) $\frac{x+1}{3x}-\frac{x-1}{2x}$

c) $\frac{x+3}{x}+\frac{2x}{x-1}$

**10.** Selvitä määrittelyehto ja sievennä lauseke.

a) $x-\frac{x+1}{3x}$ b) $\frac{1}{x}+\frac{x-1}{5x}$ c) $\frac{x+3}{x}-\frac{x-2}{x+1}$

**11.** Selvitä määrittelyehto ja sievennä lauseke.

a) $\frac{2}{x^2+x}+\frac{3-x}{x+1}$ b) $\frac{x-1}{x^2-9}-\frac{x}{x+3}$

## Sarja II

**12.** Olkoon $f(x)=\dfrac{x^2}{3x+6}+\dfrac{x-1}{x}$.

a) Määritä funktion $f$ määrittelyjoukko.

b) Piirrä funktion $f$ kuvaaja.

**13.** Selvitä määrittelyehto ja supista murtolauseke.

a) $\dfrac{18x^2-3x}{9x}$ b) $\dfrac{12x-8}{4x-12}$ c) $\dfrac{x^3}{x^2+7x}$

**14.** Selvitä määrittelyehto ja supista murtolauseke, jos se on mahdollista.

a) $\dfrac{5x-1}{1-5x}$ b) $\dfrac{9+x}{x-9}$

c) $\dfrac{2-x}{x-2}$ d) $\dfrac{x^2+1}{1+x^2}$

**15.** Selvitä määrittelyehto ja supista murtolauseke.

a) $\dfrac{t^2-1}{t+1}$ b) $\dfrac{t^2-1}{(t-1)^2}$ c) $\dfrac{(t-1)^2}{t^2-1}$

**16.** a) Määritä polynomin $x^2-2x-3$ nollakohdat.

b) Jaa polynomi $x^2-2x-3$ tekijöihin.

c) Supista murtolauseke $\dfrac{x^2-2x-3}{2x-6}$.

**17.** Olkoon $f(x)=\dfrac{2x^2+8x-10}{x+5}$.

a) Millä muuttujan $x$ arvoilla funktio $f$ on määritelty?

b) Supista funktion $f$ lauseke.

c) Piirrä funktion $f$ kuvaaja.

**18.** Selvitä määrittelyehto ja sievennä lauseke.

a) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{x-1}{x^2}$ b) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+3}$

**19.** Selvitä määrittelyehto ja sievennä lauseke.

a) $\dfrac{s+1}{s-1}+\dfrac{s-2}{s^2-s}$ b) $\dfrac{t-1}{t+1}-\dfrac{t^2+1}{t^2-1}$

**20.** Laske ilman laskinta funktion $f(x)=3+\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{3x^2}{x-1}$ arvo kohdassa $x=\dfrac{1}{17}$.

**21.** Selvitä määrittelyehto ja sievennä lauseke.

a) $1-\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{x^2+x}$ b) $\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{x}{x^2+1}$

**22.** Ovatko funktiot $f$ ja $g$ sama funktio? Perustele.

a) $f(x)=\dfrac{2x^2-4x}{2}$ ja $g(x)=x^2-2x$

b) $f(x)=\dfrac{2x^2-4x}{x}$ ja $g(x)=2x-4$

**23.** E5 Määritä vakiolle $a$ sellainen arvo, että funktion $f(x)=\dfrac{x^2+ax-4}{x^2-16}$ lauseke voidaan supistaa. Supista lauseke. Millä muuttujan $x$ arvoilla funktio $f$ on määritelty?

**24.** Määritä vakiolle $b$ sellainen arvo, että funktion $f(x)=\dfrac{x^4-18x^2+81}{x+b}$ lauseke voidaan supistaa. Supista lauseke. Millä muuttujan $x$ arvoilla funktio $f$ on määritelty?

## 1.2 Rationaaliyhtälö

Rationaalifunktion lauseke voidaan aina sieventää muotoon $\frac{\text{polynomi}}{\text{polynomi}}$.

Tutkitaan, mitä rationaalifunktiolle $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+x}$ tapahtuu osoittajan ja nimittäjän nollakohdissa.

Osoittajan nollakohdat:

$$x^2-1=0$$
$$x^2=1$$
$$x=1 \text{ tai } x=-1$$

Nimittäjän nollakohdat:

$$x^2+x=0$$
$$x(x+1)=0$$
$$x=0 \text{ tai } x+1=0$$
$$x=-1$$

Yritetään laskea funktion arvot näissä kohdissa.

Osoittajan nollakohta $x=1$:

$$f(1)=\frac{1^2-1}{1^2+1}=\frac{0}{2}=0$$

Nimittäjän nollakohta $x=0$:

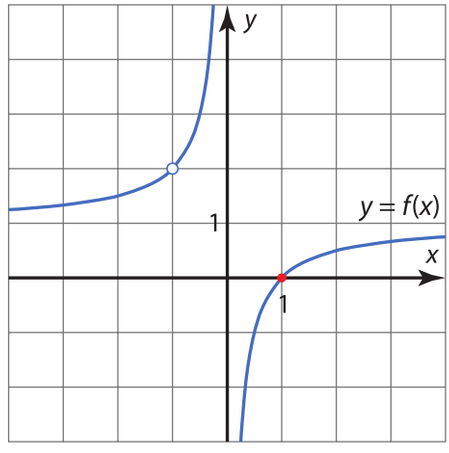
$$f(0)=\frac{0^2-1}{0^2+0}=\frac{-1}{0}$$ ei ole määritelty

Osoittajan ja nimittäjän yhteinen nollakohta $x=-1$:

$$f(-1)=\frac{(-1)^2-1}{(-1)^2+(-1)}=\frac{0}{0}$$ ei ole määritelty

Havaitaan, että funktion arvo on nolla kohdassa, joka on osoittajan, mutta ei nimittäjän, nollakohta.

Nimittäjän nollakohdissa funktiota ei ole määritelty.



## ESIMERKKI 1

Määritä funktion $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-1}$ nollakohdat.

### RATKAISU

Selvitetään ensin funktion $f$ määrittelyehto.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohdat.

$x^2-1=0$

$x^2=1$

$x=1$ tai $x=-1$

Funktion $f$ määrittelyehto on $x\neq -1$ ja $x\neq 1$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohdat.

$\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-1}=0 \quad |\cdot(x^2-1) \quad (\neq 0)$

Määrittelyjoukossa nimittäjä on eri suuri kuin nolla.

$2x^2-x-1=0$

$a=2,\ b=-1$ ja $c=-1$

$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2}$

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

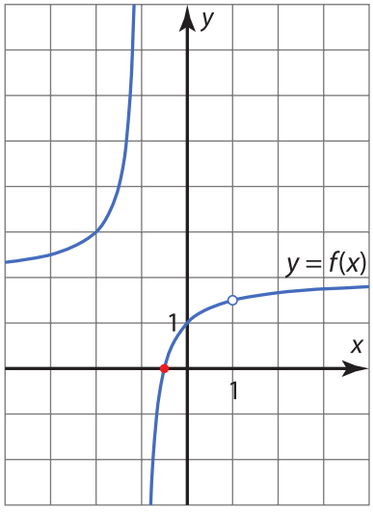
$x=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{4}=\dfrac{1\pm 3}{4}$

$x=\dfrac{1+3}{4}=\dfrac{4}{4}=1$ tai $x=\dfrac{1-3}{4}=\dfrac{-2}{4}\overset{(2}{=}-\dfrac{1}{2}$

Ratkaisu $x=1$ ei toteuta määrittelyehtoa, ja ratkaisu $x=-\dfrac{1}{2}$ toteuttaa määrittelyehdon.

Funktion nollakohta on $x=-\dfrac{1}{2}$.

**Graafinen tarkistus**




### VASTAUS

$x=-\dfrac{1}{2}$

## ESIMERKKI 2

Ratkaise yhtälö $\frac{3x}{x-2} - \frac{1}{x} = 3$.

### RATKAISU

Ratkaistaan nimittäjien nollakohdat.

Selvitetään ensin yhtälön määrittelyehto.

$x - 2 = 0 \quad \vert \quad x = 0$

$x = 2 \quad \vert$

Yhtälön määrittelyehto on $x \neq 0$ ja $x \neq 2$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{3x}{x-2} - \frac{1}{x} = 3 \quad \vert \cdot x(x-2) \quad (\neq 0)$$

Poistetaan nimittäjät kertomalla yhtälön molemmat puolet nimittäjien tulolla.

$$\frac{x(x-2)\cdot 3x}{x-2} - \frac{x(x-2)\cdot 1}{x} = x(x-2)\cdot 3$$

$$3x^2 - (x-2) = 3x(x-2)$$

$$3x^2 - x + 2 = 3x^2 - 6x$$

$$5x = -2$$

$$x = -\frac{2}{5}$$

Ratkaisu $x = -\frac{2}{5}$ toteuttaa määrittelyehdon.

Tarkistetaan, toteuttaako ratkaisu määrittelyehdon.

### VASTAUS

$x = -\frac{2}{5}$

**Rationaaliyhtälö laskimella**

Sovellustehtävissä yhtälön voi ratkaista laskimella. Rationaaliyhtälö voidaan ratkaista laskimella samaan tapaan kuin muutkin yhtälöt.

Harjoittele laskimesi käyttöä ratkaisemalla esimerkkien 1 ja 2 yhtälöt.

## Harjoitustehtäviä

**Sarja I**

**25.** Olkoon $f(x)=\dfrac{2x-6}{x-1}$.

**a)** Määritä osoittajan ja nimittäjän nollakohdat.

**b)** Piirrä funktion kuvaaja. Mitä funktiolle tapahtuu osoittajan ja nimittäjän nollakohdissa?

**26.** Olkoon $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$.

**a)** Määritä osoittajan ja nimittäjän nollakohdat.

**b)** Piirrä funktion kuvaaja. Mitä funktiolle tapahtuu osoittajan ja nimittäjän nollakohdissa?

**27.** Määritä funktion nollakohdat.

E1

**a)** $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$

**b)** $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-9}$

**28.** Määritä funktion nollakohdat.

**a)** $f(x)=\dfrac{x^2+5x}{x}$ **b)** $f(x)=\dfrac{2x^2-50}{x+5}$

**29.** Millä muuttujan arvoilla funktion $f(x)=\dfrac{12-3x}{x(x-4)}$ arvo on **a)** 0 **b)** 3?

**30.** Ratkaise yhtälö.

E2

**a)** $\dfrac{3x-1}{x}-\dfrac{x-5}{x}=1$ **b)** $\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{x}{x-1}=0$

**31.** Ratkaise yhtälö.

**a)** $\dfrac{x}{x+5}-\dfrac{1}{x}=1$ **b)** $\dfrac{3x}{x-2}-\dfrac{2}{x}=3$

**32.** Millä muuttujan $x$ arvoilla funktion $f(x)=\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{x}$ arvo on **a)** 0 **b)** 3?

**33.** Ratkaise yhtälö $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2-1}=3$.

**34.** Ratkaise yhtälö $\dfrac{1}{2x}+x^2=\dfrac{1+2x}{4x^2}$.

**Sarja II**

**35.** Olkoon $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x^2-9}$.

a) Määritä osoittajan ja nimittäjän nollakohdat.

b) Piirrä funktion kuvaaja. Mitä funktiolle tapahtuu osoittajan ja nimittäjän nollakohdissa?

**36.** Määritä funktion nollakohdat.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2-5x-6}{x^2+1}$

**37.** Määritä funktion nollakohdat.

a) $f(x)=\dfrac{3x^2-x}{x^2}$ b) $f(x)=\dfrac{3x-30}{x^2-10x}$

**38.** Millä vakion $a$ arvolla funktion $f(x)=\dfrac{2x^2+5x-3}{x+a}$ ainoa nollakohta on

a) $x=-3$ b) $x=\dfrac{1}{2}$?

**39.** Ratkaise yhtälö.

a) $\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x}=5$ b) $\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x+3}$

**40.** Ratkaise yhtälö.

a) $x-\dfrac{8}{x+1}=-3$ b) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{x+1}{x-1}=0$

**41.** Ratkaise yhtälö $\dfrac{(x+1)^2-\pi^2}{x^2+\pi^2}=0$.

[yo pitkä s1996]

**42.** Ratkaise yhtälö.

a) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{x+3}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x+1}{(x-1)^2}=-1$

**43.** Luokkaretkelle tilatun linja-auton vuokra oli 1248 euroa. Oli sovittu, että vuokra jaetaan tasan kaikkien matkustajien kesken. Kuusi retkelle ilmoittautunutta jäi saapumatta, minkä jälkeen jokainen matkustaja joutui maksamaan 9 euroa ennakoitua enemmän. Kuinka monta henkeä retkelle osallistui? Kuinka paljon jokainen heistä joutui maksamaan?

**44.** Marjan ja Timon kesämökit sijaitsevat tasaisesti virtaavan joen varrella 2,0 kilometrin etäisyydellä toisistaan. Marjalta kului edestakaiseen matkaan 15 minuuttia, kun hän ajoi veneellä tasaisella nopeudella, joka olisi ollut seisovassa vedessä 18 km/h. Määritä joen virtausnopeus (yksikkönä m/s).

# 1.3 Rationaaliepäyhtälö

Piirretään rationaalifunktion $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$ kuvaaja.

**Funktion arvo ja kuvaajan piste**

$f(x) = y$

$f(-1) = 1{,}5$

Funktion arvo kohdassa $-1$ on $1{,}5$.

Funktion kuvaajan pisteen $x$-koordinaatti on $-1$ ja $y$-koordinaatti $1{,}5$.

Kuvaajalta voidaan lukea funktion arvoja:

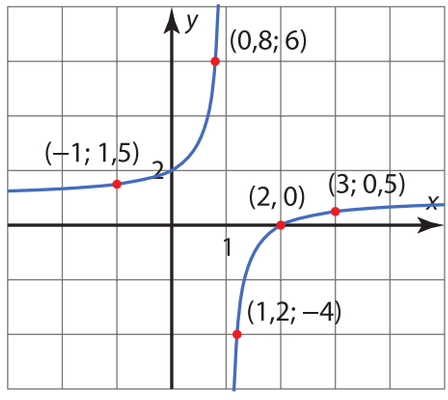
$f(-1) = 1{,}5$

$f(0{,}8) = 6$

$f(1{,}2) = -4$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0{,}5$




Funktio ei ole määritelty kohdassa $x = 1$, koska kohdassa $1$ nimittäjän arvo on $0$. Funktion nollakohta on $x = 2$, koska kohdassa $2$ funktion arvo on $0$.

Funktion arvot vaihtavat merkkiään kohdissa $x = 1$ ja $x = 2$. Kuvaajan perusteella

- funktion arvot ovat positiivisia, kun $x < 1$
- funktion arvot ovat negatiivisia, kun $1 < x < 2$
- funktion arvot ovat positiivisia, kun $x > 2$.

Edellä tehdyt päätelmät havainnollistavat seuraavaa lausetta.

**Rationaalifunktion arvojen merkki** **Lause**

Rationaalifunktion arvot voivat vaihtaa merkkiään ainoastaan funktion nollakohdissa ja kohdissa, joissa funktio ei ole määritelty.

Funktion nollakohdat ja kohdat, joissa funktio ei ole määritelty, jakavat lukusuoran osaväleihin. Kullakin osavälillä funktion arvot säilyvät samanmerkkisenä (joko positiivisena tai negatiivisena).

## ESIMERKKI 1

Millä muuttujan $x$ arvoilla funktion $f(x)=\dfrac{4x-1}{5x+10}$ arvot ovat

**a)** positiivisia **b)** negatiivisia?

### RATKAISU

Rationaalifunktion arvot voivat vaihtaa merkkiään ainoastaan funktion nollakohdissa ja kohdissa, joissa funktio ei ole määritelty.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohdat.

$$\begin{aligned} 5x+10&=0\\ 5x&=-10\\ x&=-2 \end{aligned}$$

Funktion $f$ määrittelyehto on $x\neq -2$.

Ratkaistaan funktion nollakohdat.

$$\frac{4x-1}{5x+10}=0 \quad \big|\cdot(5x+10) \quad (\neq 0)$$

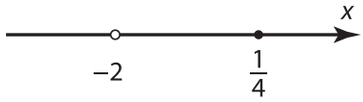
$$\begin{aligned} 4x-1&=0\\ 4x&=1\\ x&=\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon. Funktion $f$ nollakohta on $x=\dfrac{1}{4}$.

Funktion arvot voivat vaihtaa merkkiään vain kohdissa $x=-2$ ja $x=\dfrac{1}{4}$.

Luvut $-2$ ja $\dfrac{1}{4}$ jakavat lukusuoran kolmeen osaväliin.

Kullakin osavälillä funktion arvot säilyvät samanmerkkisenä.



Lasketaan jokaiselta osaväliltä yksi funktion arvo.

$$f(x)=\frac{4x-1}{5x+10}$$

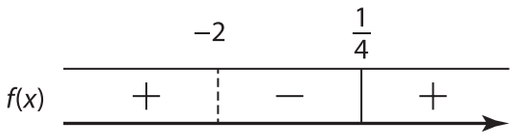
$$f(-3)=\frac{4\cdot(-3)-1}{5\cdot(-3)+10}=\frac{13}{5}>0$$ Välillä $]-\infty,-2[$ merkki on $+$.

$$f(0)=\frac{4\cdot 0-1}{5\cdot 0+10}=-\frac{1}{10}<0$$ Välillä $]-2,\frac{1}{4}[$ merkki on $-$.

$$f(1)=\frac{4\cdot 1-1}{5\cdot 1+10}=\frac{3}{15}>0$$ Välillä $]\frac{1}{4},\infty[$ merkki on $+$.

**Huomaa!**
Kohta, jossa funktio ei ole määritelty, merkitään merkkikaavioon katkoviivalla.

Kirjataan merkit merkkikaavioon.



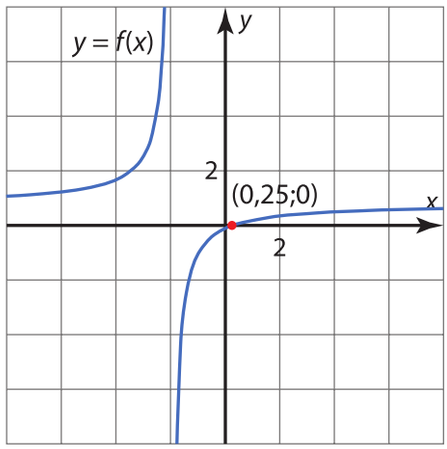

**a)** Funktion arvot ovat positiivisia, kun $x<-2$ tai $x>\frac{1}{4}$.

**b)** Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $-2<x<\frac{1}{4}$.

**VASTAUS**

**a)** $x<-2$ tai $x>\frac{1}{4}$ **b)** $-2<x<\frac{1}{4}$

Ratkaisu voidaan tarkistaa piirtämällä funktion $f$ kuvaaja.



## ESIMERKKI 2

Ratkaise epäyhtälö $\frac{x}{x-2} \geq 3$.

**Huomaa!**
Epäyhtälöstä ei voi poistaa nimittäjää kertomalla polynomilla $x-2$, koska etukäteen ei tiedetä, onko polynomin $x-2$ arvo positiivinen vai negatiivinen luku.

**RATKAISU**

$$\frac{x}{x-2} \geq 3$$

Siirretään termejä niin, että epäyhtälön oikealle puolelle tulee nolla.

$$\frac{x}{x-2} - 3 \geq 0$$

Merkitään $f(x) = \frac{x}{x-2} - 3$ ja selvitetään, millä muuttujan $x$ arvoilla funktion $f$ arvo on positiivinen tai nolla.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohdat.

$$x - 2 = 0$$
$$x = 2$$

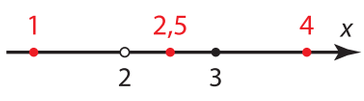
Funktion $f$ määrittelyehto on $x \neq 2$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohdat.

$$\frac{x}{x-2} - 3 = 0 \quad \big| \cdot (x-2) \quad (\neq 0)$$
$$x - 3(x-2) = 0$$
$$x - 3x + 6 = 0$$
$$-2x = -6$$
$$x = 3$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon. Funktion $f$ nollakohta on $x = 3$.

Funktion $f$ arvot voivat vaihtaa merkkiään vain kohdissa $2$ ja $3$. Lasketaan jokaiselta osaväliltä yksi funktion arvo.




$$f(x) = \frac{x}{x-2} - 3$$

$$f(1) = \frac{1}{1-2} - 3 = -4 < 0$$

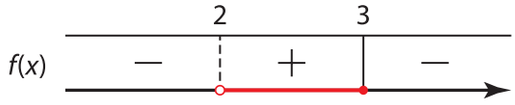
$$f(2{,}5) = \frac{2{,}5}{2{,}5-2} - 3 = 2 > 0$$

$$f(4) = \frac{4}{4-2} - 3 = -1 < 0$$

**Huomaa!**
Luku 2 ei toteuta epäyhtälöä, koska $f(2)$ ei ole määritelty.

Luku 3 toteuttaa epäyhtälön, koska $f(3) = 0$.

Laaditaan merkkikaavio.

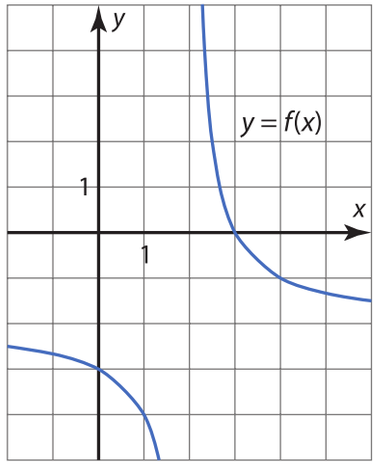



Epäyhtälö $\dfrac{x}{x-2} - 3 \geq 0$ toteutuu, kun $2 < x \leq 3$.

**VASTAUS**

$2 < x \leq 3$

Ratkaisu voidaan tarkistaa piirtämällä funktion $f$ kuvaaja.




**Rationaaliepäyhtälön ratkaiseminen**

1) Epäyhtälön termit siirretään vasemmalle puolelle niin, että oikealle puolelle tulee nolla ja vasemmalle puolelle muodostuu rationaalifunktio.
2) Selvitetään funktion määrittelyehto.
3) Ratkaistaan funktion nollakohdat.
4) Laaditaan ja perustellaan funktion merkkikaavio.
5) Päätellään epäyhtälön ratkaisu.

## ESIMERKKI 3

Ratkaise epäyhtälö $\dfrac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} \geq 0$.

### RATKAISU

Merkitään $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohdat.

$$(x-1)^2 = 0$$
$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$

Funktion $f$ määrittelyehto on $x \neq 1$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohdat.

$$\frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = 0 \quad \Big| \cdot (x-1)^2 \quad (\neq 0)$$
$$x^3 - 2x^2 = 0$$
$$x^2(x-2) = 0$$

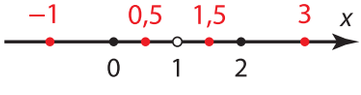
$$x^2 = 0 \text{ tai } x - 2 = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x = 2$$

Ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon.

Funktion $f$ nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = 2$.

Funktion $f$ arvot voivat vaihtaa merkkiään vain kohdissa 0, 1 ja 2.

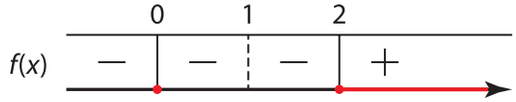
Laaditaan merkkikaavio.




$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$$

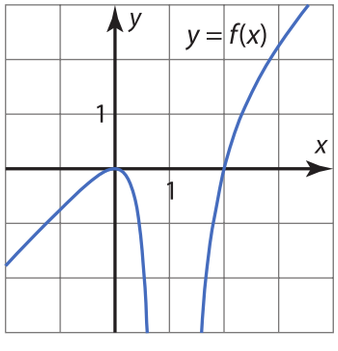
$f(-1) = -0{,}75 < 0$ $\quad$ $f(0{,}5) = -1{,}5 < 0$

$f(1{,}5) = -4{,}5 < 0$ $\quad$ $f(3) = 2{,}5 > 0$




Luku 0 toteuttaa epäyhtälön, koska $f(0) = 0$.
Luku 1 ei toteuta epäyhtälöä, koska $f(1)$ ei ole määritelty.

**Graafinen tarkistus**




Epäyhtälö $\dfrac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} \geq 0$ toteutuu, kun $x = 0$ tai $x \geq 2$.

### VASTAUS

$x = 0$ tai $x \geq 2$

## Harjoitustehtäviä

### Sarja I

**45.** Piirrä funktion $f(x)=\dfrac{6x-3}{x}$ kuvaaja.

a) Missä kohdissa funktio ei ole määritelty?
b) Mitkä ovat funktion nollakohdat?
c) Millä muuttujan arvoilla funktion arvot ovat positiivisia?

**46.** Piirrä funktion $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$ kuvaaja.

a) Missä kohdissa funktio ei ole määritelty?
b) Mitkä ovat funktion nollakohdat?
c) Millä muuttujan arvoilla funktion arvot ovat negatiivisia?

**47.** E1 Millä muuttujan arvoilla funktion $f(x)=\dfrac{5x-2}{x+3}$ arvot ovat

a) positiivisia b) negatiivisia?

**48.** Millä muuttujan arvoilla funktion $f(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$ arvot ovat

a) positiivisia b) negatiivisia?

**49.** E2 Ratkaise epäyhtälö $\dfrac{x}{2x-5}\le 1$.

**50.** Ratkaise epäyhtälö.

a) $\dfrac{x}{4}\ge\dfrac{1}{x}$ b) $\dfrac{1}{3x}>\dfrac{5}{x}$

**51.** E3 Ratkaise epäyhtälö $\dfrac{x^3-2x^2}{x-1}\le 0$.

**52.** Ratkaise epäyhtälö $\dfrac{2x^3-x^2}{x+3}\ge 0$.

**53.** Ratkaise epäyhtälö $\dfrac{1}{x+1}<\dfrac{2}{x^2-1}$.

**54.** Ratkaise epäyhtälö $\dfrac{1}{x-x^2}-2\le\dfrac{1}{x}$.

### Sarja II

**55.** Piirrä funktion $f(x)=x+2-\dfrac{4}{x-1}$ kuvaaja.

a) Missä kohdissa funktio ei ole määritelty?
b) Mitkä ovat funktion nollakohdat?
c) Millä muuttujan arvoilla funktion arvot ovat negatiivisia?

**56.** Millä muuttujan arvoilla funktion $f(x)=\dfrac{1-3x}{2x+1}$ arvot ovat

a) positiivisia b) negatiivisia?

**57.** Ratkaise epäyhtälö $\dfrac{3x}{2x-8}\ge 1$.

**58.** Millä muuttujan $x$ arvoilla funktion $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$ arvo on pienempi kuin funktion $g(x)=\dfrac{1}{x}$ arvo?

**59.** Ratkaise epäyhtälö.

a) $\dfrac{x+2}{(x+1)^2}>0$ b) $\dfrac{x^2+3}{x+1}>0$

**60.** Ratkaise epäyhtälö $\dfrac{4x^3+x^2}{2x-6}\ge 0$.

**61.** Ratkaise epäyhtälö $\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1-2x}{4x^2}\le 0$.

**62.** Ratkaise epäyhtälö $\dfrac{3}{x^2-1}>\dfrac{x-1}{1+x}$.

**63.** Kahden positiivisen luvun *harmoninen keskiarvo* on lukujen käänteislukujen keskiarvon käänteisluku.

Osoita, että kahden positiivisen luvun keskiarvo on aina suurempi tai yhtä suuri kuin harmoninen keskiarvo.

**64.** Kahden positiivisen luvun *geometrinen keskiarvo* on lukujen tulon neliöjuuri.

Osoita, että kahden positiivisen luvun geometrinen keskiarvo on aina suurempi tai yhtä suuri kuin harmoninen keskiarvo.

# 2 Raja-arvo ja jatkuvuus

*Tässä luvussa tutustutaan raja-arvon käsitteeseen ja opitaan, miten funktion käyttäytymistä voidaan tutkia myös sellaisten kohtien läheisyydessä, joissa funktiota ei ole määritelty. Lisäksi opitaan milloin funktio on jatkuva, ja millaisia ominaisuuksia jatkuvilla funktioilla on.*

## 2.1 Funktion raja-arvo

**TUTKIMUS**

Rationaalifunktiota $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-3x}$ ei ole määritelty kohdissa $x=0$ ja $x=3$.

**a)** Tutkitaan funktion käyttäytymistä kohdan $x=3$ läheisyydessä.

Laske funktion $f$ arvoja kohdan 3 molemmilta puolilta yhä lähempänä kohtaa 3. Voit helpottaa arvojen laskemista määrittelemällä funktion $f$ lausekkeen laskimeen tai käyttämällä taulukkolaskentaohjelmaa.

| Lähestytään kohtaa 3 vasemmalta. | |
|---|---|
| $x$ | $f(x)$ |
| 2,9 | |
| 2,99 | |
| 2,999 | |
| 2,9999 | |

| Lähestytään kohtaa 3 oikealta. | |
|---|---|
| $x$ | $f(x)$ |
| 3,1 | |
| 3,01 | |
| 3,001 | |
| 3,0001 | |

Minkä havainnon voit tehdä tulostesi perusteella?

**b)** Tutkitaan funktion käyttäytymistä kohdan $x = 0$ läheisyydessä.

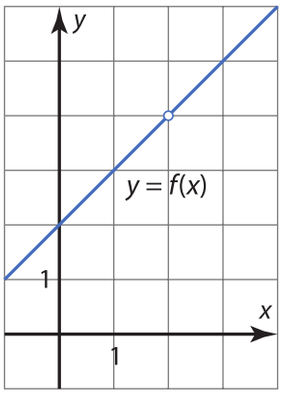
Laske funktion $f$ arvoja kohdan $0$ molemmilta puolilta yhä lähempänä kohtaa $0$.

| Lähestytään kohtaa 0 vasemmalta. | |
|---|---|
| $x$ | $f(x)$ |
| –0,1 | |
| –0,01 | |
| –0,001 | |
| –0,0001 | |

| Lähestytään kohtaa 0 oikealta. | |
|---|---|
| $x$ | $f(x)$ |
| 0,1 | |
| 0,01 | |
| 0,001 | |
| 0,0001 | |

Minkä havainnon voit tehdä tulostesi perusteella? Piirrä funktion $f$ kuvaaja ja totea, mitä kohdan $x = 0$ läheisyydessä tapahtuu.

**c)** Supista funktion $f$ lauseke. Mieti, miksi funktio käyttäytyy eri tavoin kohtien $x = 0$ ja $x = 3$ läheisyydessä.




## Raja-arvon määritelmä

Rationaalifunktiota $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ ei ole määritelty nimittäjän nollakohdassa $x=2$. Tutkitaan, mitä funktion arvoille tapahtuu, kun muuttujan $x$ arvot lähestyvät lukua 2. Lasketaan funktion arvoja kohdan 2 molemmilta puolilta yhä lähempänä kohtaa 2.

$x$ lähestyy lukua 2 vasemmalta → ← $x$ lähestyy lukua 2 oikealta

| $x$ | 1,9 | 1,99 | 1,999 | 1,9999 | 2 | 2,0001 | 2,001 | 2,01 | 2,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3,9 | 3,99 | 3,999 | 3,9999 | | 4,0001 | 4,001 | 4,01 | 4,1 |

Funktion arvoa $f(2)$ ei ole määritelty mutta näyttää siltä, että kun muuttujan arvot lähestyvät lukua 2 kummalta puolelta tahansa, niin funktion arvot lähestyvät lukua 4.

Sanotaan, että funktion $f$ raja-arvo kohdassa 2 on 4.

**Määritelmä**

**Funktion raja-arvo**

Oletetaan, että funktio $f$ on määritelty kohdan $a$ ympärillä.

Funktion $f$ *raja-arvo* kohdassa $a$ on $b$, jos funktion arvot lähestyvät lukua $b$, kun muuttujan arvot lähestyvät lukua $a$ kummalta puolelta tahansa.

Lähestymisen tulee olla sellaista, että funktion $f$ arvot saadaan niin lähelle lukua $b$ kuin suinkin halutaan, kunhan muuttujan arvot viedään riittävän lähelle lukua $a$.

Tällöin merkitään

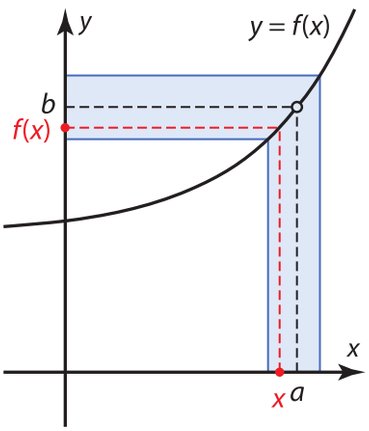
$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$

Luetaan: "funktion $f$ raja-arvo kohdassa $a$ on $b$".

tai

$$f(x)\to b, \text{ kun } x\to a\,.$$

Luetaan: "$f(x)$ lähestyy $b$:tä, kun $x$ lähestyy $a$:ta".




Raja-arvoa tarkoittava lyhenne lim on peräisin latinan kielen sanasta *limes*, raja.

Huomaa, että raja-arvon määritelmässä ei ole merkitystä sillä, onko funktio $f$ määritelty kohdassa $a$ vai ei. Riittää, että funktio $f$ on määritelty kohdan $a$ välittömässä läheisyydessä.

## ESIMERKKI 1

Olkoon $f(x)=\dfrac{x^2-6x-7}{x^2+x}$, kun $x \neq -1$ ja $x \neq 0$. Tutki funktion arvoja taulukoimalla, mikä on funktion raja-arvo kohdassa

**a)** $-1$ **b)** $0$.

### RATKAISU

**a)** Funktiota $f$ ei ole määritelty kohdassa $-1$. Lasketaan funktion arvoja kohdan $-1$ molemmilta puolilta ja taulukoidaan arvot.

| Lähestytään kohtaa $-1$ vasemmalta. | |
|---|---|
| $x$ | $f(x)$ |
| $-1{,}1$ | $7{,}36363\ldots$ |
| $-1{,}01$ | $7{,}93069\ldots$ |
| $-1{,}001$ | $7{,}99300\ldots$ |
| $-1{,}0001$ | $7{,}99930\ldots$ |

| Lähestytään kohtaa $-1$ oikealta. | |
|---|---|
| $x$ | $f(x)$ |
| $-0{,}9$ | $8{,}77777\ldots$ |
| $-0{,}99$ | $8{,}07070\ldots$ |
| $-0{,}999$ | $8{,}00700\ldots$ |
| $-0{,}9999$ | $8{,}00070\ldots$ |

Näyttää siltä, että kun muuttujan arvot lähestyvät lukua $-1$ kummalta puolelta tahansa, niin funktion $f$ arvot lähestyvät lukua $8$.

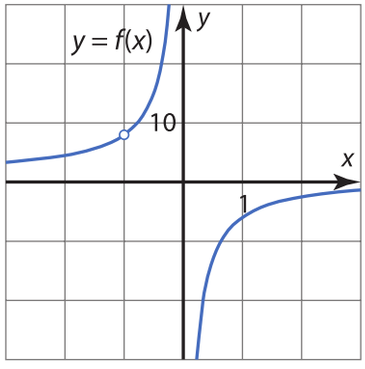
Taulukoitujen arvojen perusteella $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 8$.

**b)** Funktiota $f$ ei ole määritelty kohdassa $0$. Lasketaan funktion $f$ arvoja kohdan $0$ molemmilta puolilta ja taulukoidaan arvot.

| Lähestytään kohtaa $0$ vasemmalta. | |
|---|---|
| $x$ | $f(x)$ |
| $-0{,}1$ | $71$ |
| $-0{,}01$ | $701$ |
| $-0{,}001$ | $7001$ |
| $-0{,}0001$ | $70001$ |

| Lähestytään kohtaa $0$ oikealta. | |
|---|---|
| $x$ | $f(x)$ |
| $0{,}1$ | $-69$ |
| $0{,}01$ | $-699$ |
| $0{,}001$ | $-6999$ |
| $0{,}0001$ | $-69999$ |

**Graafinen tarkistus**




Näyttää siltä, että kun muuttujan arvot lähestyvät lukua $0$ vasemmalta, niin funktion arvot kasvavat rajatta, ja kun muuttujan arvot lähestyvät lukua $0$ oikealta, funktion arvot pienenevät rajatta. Koska funktion arvot eivät lähesty molemmilla puolilla mitään tiettyä, samaa reaalilukua, niin funktiolla $f$ ei ole raja-arvoa kohdassa $0$.

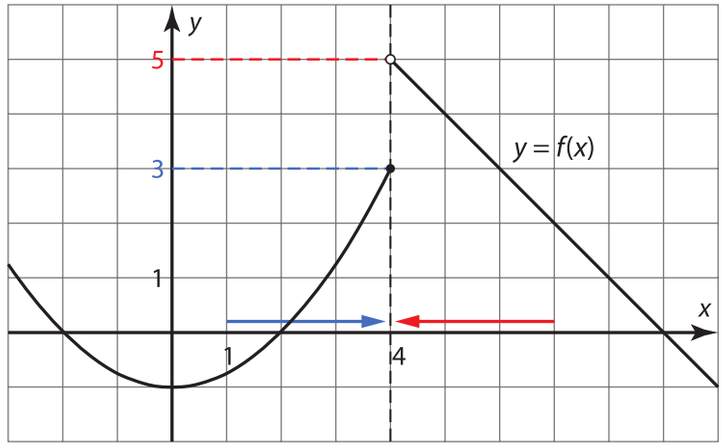
### VASTAUS

**a)** $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 8$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ei ole olemassa.

## Toispuoliset raja-arvot

Kuvassa on erään funktion $f$ kuvaaja $y = f(x)$. Tarkastellaan funktion arvoja kohdan $x = 4$ läheisyydessä.

**Huomaa!**
Funktion kuvaajalle merkitty avoin pallukka tarkoittaa, että kyseinen piste ei kuulu kuvaajaan. Suljettu pallukka taas kertoo, että kyseinen piste kuuluu kuvaajaan.




Kun muuttujan arvot lähestyvät lukua 4 **vasemmalta** puolelta, niin funktion arvot lähestyvät lukua 3.

Sanotaan, että kohdassa 4 funktion $f$ *vasemmanpuoleinen raja-arvo* on 3 ja merkitään

$$\lim_{x \to 4-} f(x) = 3.$$

Kun muuttujan arvot lähestyvät lukua 4 **oikealta** puolelta, niin funktion arvot lähestyvät lukua 5.

Sanotaan, että kohdassa 4 funktion $f$ *oikeanpuoleinen raja-arvo* on 5 ja merkitään

$$\lim_{x \to 4+} f(x) = 5.$$

Vasemman ja oikeanpuoleisia raja-arvoja kutsutaan *toispuolisiksi raja-arvoiksi*.

**Huomaa!**
Funktiolla $f$ on raja-arvo kohdassa $a$ täsmälleen silloin, kun funktion $f$ toispuoliset raja-arvot kohdassa $a$ ovat yhtä suuret.

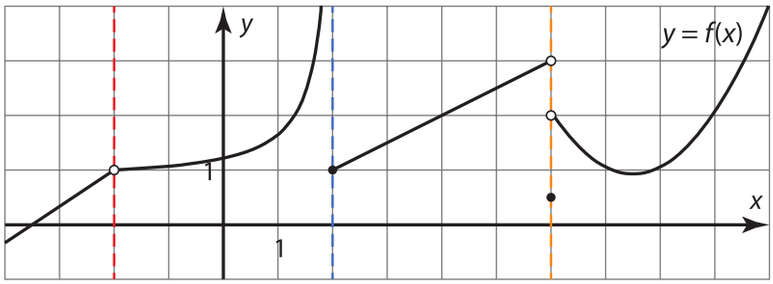
Määritelmän mukaan funktion $f$ raja-arvo kohdassa $a$ on $b$, jos funktion arvot lähestyvät lukua $b$, kun muuttujan arvot lähestyvät lukua $a$ **kummalta puolelta tahansa**.

Koska funktion $f$ toispuoliset raja-arvot kohdassa 4 ovat nyt eri suuret, funktiolla $f$ ei ole raja-arvoa kohdassa 4.

Huomaa, että funktion arvo $f(4)$ on määritelty, mutta funktiolla ei silti ole raja-arvoa kohdassa 4.

## ESIMERKKI 2

Kuvassa on erään funktion $f$ kuvaaja $y = f(x)$. Määritä kuvaajan perusteella funktion $f$ **a)** arvot **b)** raja-arvot kohdissa $-2$, $2$ ja $6$.




### RATKAISU

**a)**
- Kohdasta $x = -2$ ei löydy kuvaajaan kuuluvaa pistettä. Funktiota $f$ ei siis ole määritelty kohdassa $-2$ eikä arvoa $f(-2)$ ole olemassa.
- Kohdassa $x = 2$ kuvaajan pisteen $y$-koordinaatti on $1$, joten $f(2) = 1$.
- Kohdassa $x = 6$ kuvaajan pisteen $y$-koordinaatti on $0{,}5$, joten $f(6) = 0{,}5$.

**b)**
- Kun $x$ lähestyy kohtaa $-2$ kummalta puolelta tahansa, funktion arvot lähestyvät lukua $1$. Siis $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 1$.
- Kun $x$ lähestyy kohtaa $2$ oikealta puolelta, funktion arvot lähestyvät lukua $1$. Kun $x$ lähestyy kohtaa $2$ vasemmalta puolelta, funktion arvot eivät lähesty lukua $1$. Funktiolla $f$ ei ole raja-arvoa kohdassa $2$.
- Kun $x$ lähestyy kohtaa $6$ vasemmalta puolelta, funktion arvot lähestyvät lukua $3$. Siis $\lim\limits_{x \to 6-} f(x) = 3$.

  Kun $x$ lähestyy kohtaa $6$ oikealta puolelta, funktion arvot lähestyvät lukua $2$. Siis $\lim\limits_{x \to 6+} f(x) = 2$.

  Koska toispuoliset raja-arvot ovat eri suuret, funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa $6$.

### VASTAUS

**a)** $f(-2)$ ei ole määritelty, $f(2) = 1$, $f(6) = 0{,}5$

**b)** $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ ja $\lim\limits_{x \to 6} f(x)$ ei ole olemassa

## Paloittain määritelty funktio

Koska funktiolla $f(x)=\begin{cases} x^2-5x, & \text{kun } x<3 \\ 12-2x^2, & \text{kun } x>3 \end{cases}$ on eri lauseke määrittelyjoukon eri osissa, sitä sanotaan *paloittain määritellyksi funktioksi*. Kun tutkitaan paloittain määritellyn funktion raja-arvoja, erityisen mielenkiintoisia ovat ne kohdat, joissa funktion lauseke vaihtuu. Näissä kohdissa on tutkittava toispuolisia raja-arvoja.

**ESIMERKKI 3**

Tutki funktion arvoja taulukoimalla, mikä on funktion $f(x)=\begin{cases} x^2-5x, & \text{kun } x<3 \\ 12-2x^2, & \text{kun } x>3 \end{cases}$ raja-arvo kohdassa 3.

**RATKAISU**

Funktion lauseke vaihtuu juuri kohdassa 3. Kun lasketaan funktion arvoja kohdan 3 eri puolilla, käytetään eri lausekkeita. Pitää siis määrittää taulukoimalla toispuoliset raja-arvot.

| Vasemmanpuoleinen raja-arvo | | Oikeanpuoleinen raja-arvo | |
|---|---|---|---|
| $x\,(<3)$ | $f(x)=x^2-5x$ | $x\,(>3)$ | $f(x)=12-2x^2$ |
| 2,9 | –6,09 | 3,1 | –7,22 |
| 2,99 | –6,0099 | 3,01 | –6,1202 |
| 2,999 | –6,000999 | 3,001 | –6,012002 |
| 2,9999 | –6,00009999 | 3,0001 | –6,00120002 |

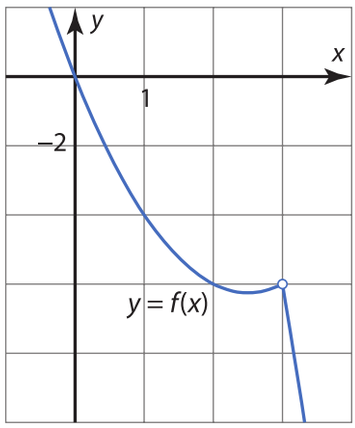
Taulukoitujen arvojen perusteella toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret ja funktiolla $f$ on raja-arvo kohdassa 3:

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=-6.$

**VASTAUS**

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=-6$

### Graafinen tarkistus



**Paloittain määritellyn funktion kuvaaja laskimella**

Myös paloittain määritellyn funktion kuvaaja voidaan piirtää laskimella.

Laskimesta voi löytyä paloittain määritellyn funktion lausekkeelle valmis syöttöpohja $\begin{cases} \square; \square \\ \square; \square \end{cases}$ tai funktion lauseke voidaan määritellä Jos-ehtolauseiden avulla.

Harjoittele laskimesi käyttöä piirtämällä esimerkkien 3 ja 4 funktioiden kuvaajat.

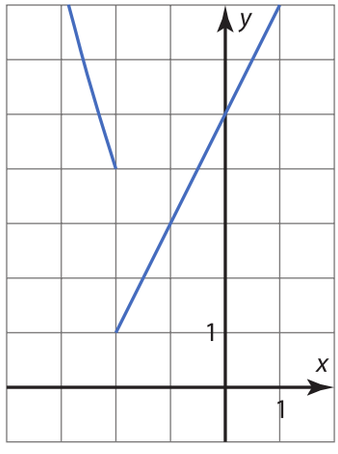
## ESIMERKKI 4

Piirrä funktion $g(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^3 - 12x}{6x + 12}, & \text{kun } x < -2 \\ 5 + 2x, & \text{kun } x \geq -2 \end{cases}$ kuvaaja ja päättele funktion raja-arvo kohdassa $-2$.

### RATKAISU

**Huomaa!**
Funktion lauseke vaihtuu kohdassa $-2$. Laskin ei piirrä kohtaan $x = -2$ kuvaajan osien päätepisteisiin näkyviin pallukoita, jotka osoittavat, onko päätepiste kuvaajalla vai ei. Kuvaajaa tulkittaessa pitää olla tarkkana, mikä on funktion arvo kohdassa $-2$.

Piirretään funktion $g$ kuvaaja laskimella.




Kuvaajan perusteella kohdassa $x = -2$ funktion $g$ vasemmanpuoleinen raja-arvo on $4$ ja oikeanpuoleinen raja-arvo on $1$.

Koska toispuoliset raja-arvot ovat eri suuret, funktiolla $g$ ei ole raja-arvoa kohdassa $-2$.

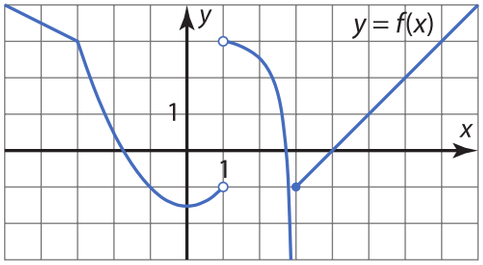
### VASTAUS

Funktiolla $g$ ei ole raja-arvoa kohdassa $-2$.

## Harjoitustehtäviä

**Sarja I**

**65.** Alla on erään funktion $f$ kuvaaja $y = f(x)$.




Onko väittämä oikein vai väärin?

**a)** Funktiolla on raja-arvo kohdassa $x = -3$.

**b)** Funktion arvo $f(1)$ on positiivinen.

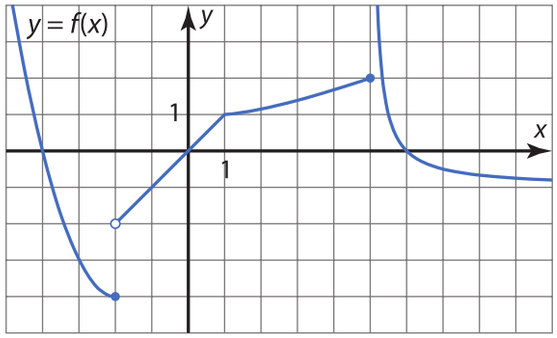
**c)** Funktiota ei ole määritelty kohdassa $x = 3$.

**d)** $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = 3$

**e)** On täsmälleen yksi kohta, jossa funktiota ei ole määritelty.

**f)** Funktion raja-arvo kohdassa 5 on 1.

**66.** Alla on erään funktion $f$ kuvaaja $y = f(x)$.




Onko väittämä oikein vai väärin?

**a)** $\lim\limits_{x \to 5-} f(x) = 2$

**b)** $f(-2) = -2$

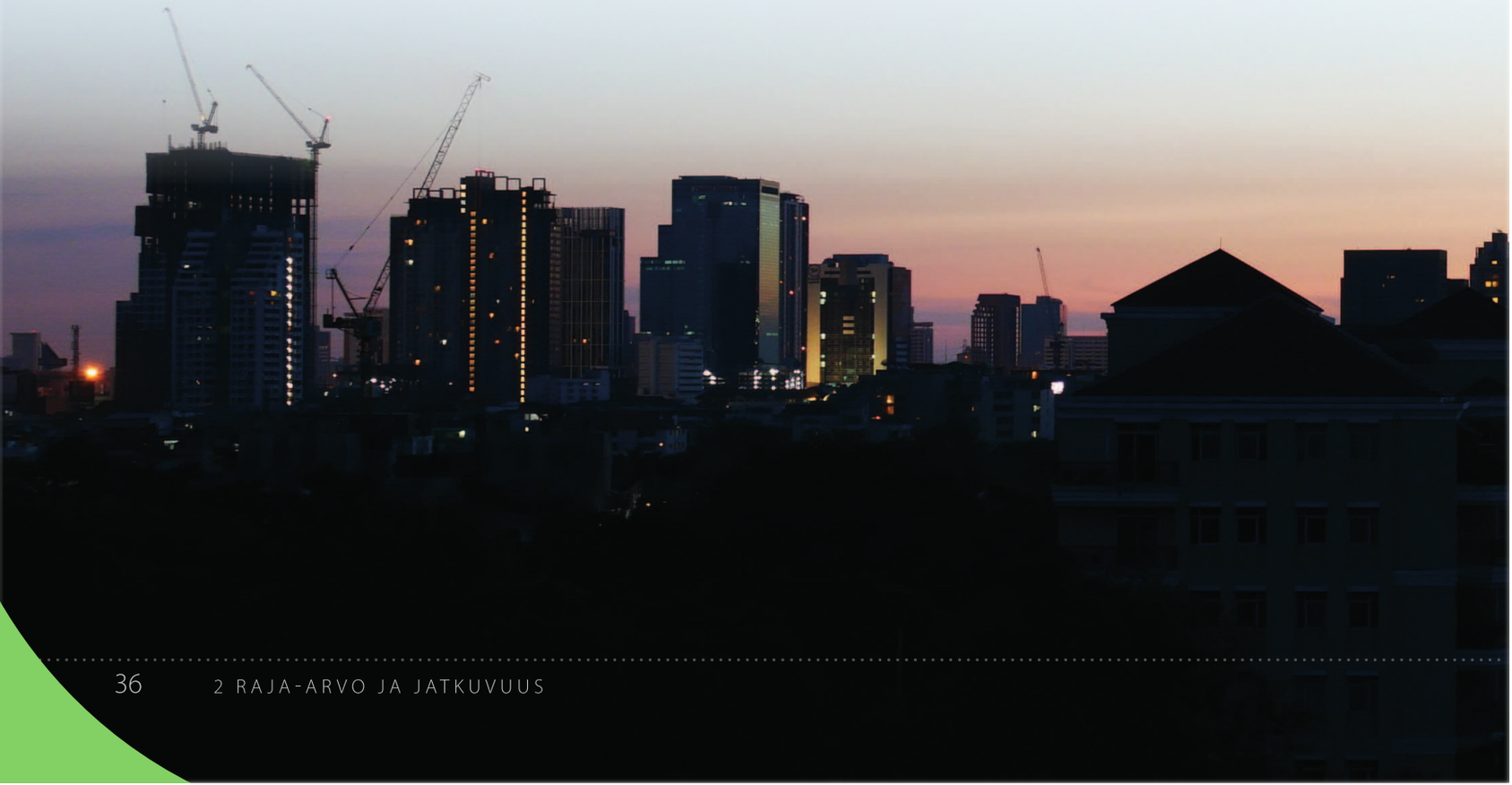
**c)** $\lim\limits_{x \to -2+} f(x) = 2$

**d)** $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -4$

**e)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ on olemassa

**f)** $f(5)$ ei ole määritelty

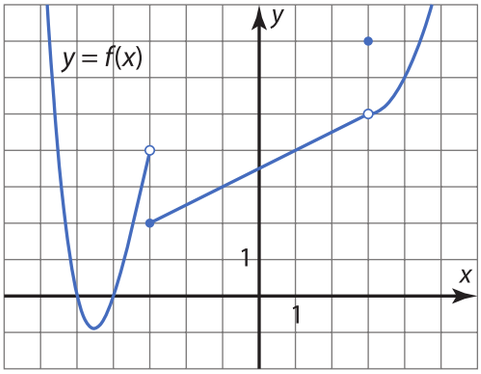
**67.** E1 Tutki funktion arvoja taulukoimalla, mikä on funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x - 7}{2x + 2}$ raja-arvo kohdassa $-1$.



**68.** Tutki funktion arvoja taulukoimalla, mikä on funktion $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ raja-arvo kohdassa **a)** $-2$ **b)** 2.

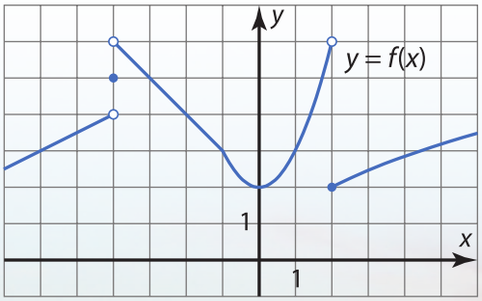
**69.** E2 Alla on erään funktion $f$ kuvaaja $y=f(x)$. Määritä funktion

**a)** arvo **b)** raja-arvo kohdissa $-3$ ja 3.




**70.** ▶ Alla on erään funktion $f$ kuvaaja $y=f(x)$. Määritä funktion

**a)** arvo **b)** raja-arvo kohdissa $-4$, $-1$ ja 2.




**71.** Piirrä funktion $f(x)=\dfrac{2x^2-x-10}{4x^2-10x}$ kuvaaja ja päättele kuvaajan perusteella funktion raja-arvo kohdassa **a)** 0 **b)** 2.

**72.** Piirrä funktion kuvaaja ja päättele raja-arvo kuvaajan perusteella.

**a)** $\lim\limits_{x\to 3}(5x^4-18x^3+10x^2+5)$

**b)** $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{2x^2-50}{3x+7}$

**73.** E3 Tutki funktion arvoja taulukoimalla, mikä on funktion

$$g(x)=\begin{cases}4-x^2, & \text{kun } x<-3\\ 2x+1, & \text{kun } x>-3\end{cases}$$

raja-arvo kohdassa $-3$.

**74.** E4 ▶ Piirrä funktion

$$f(x)=\begin{cases}5x^2-2x-1, & \text{kun } x\le 1\\ \dfrac{6x+2}{x^2+3}, & \text{kun } x>1\end{cases}$$

kuvaaja ja päättele funktion raja-arvo kohdassa **a)** 1 **b)** 2.

**75.** Päättele funktion arvoja taulukoimalla, miten luku $a$ on valittava, jotta funktiolla

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-5, & \text{kun } x\le 2\\ ax-7, & \text{kun } x>2\end{cases}$$

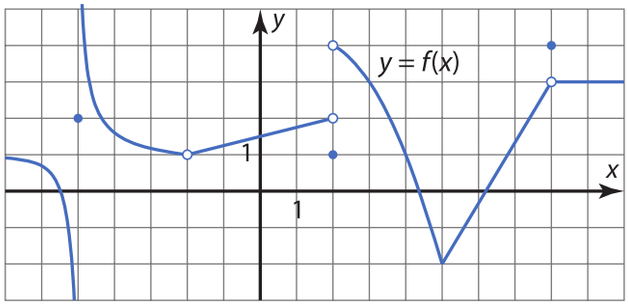
on raja-arvokohdassa 2.

**Sarja II**

**76.** Tutki funktion arvoja taulukoimalla, mikä on funktion $f(x)=\dfrac{5x+x^2}{x^2+2x-15}$ raja-arvo kohdassa **a)** $-5$ **b)** 3.

**77.** Tutki funktion arvoja taulukoimalla, mikä on funktion $g(x)=\dfrac{16^x-16}{x4^x-4x}$ raja-arvo kohdassa **a)** 0 **b)** 1.

**78.** Alla on erään funktion $f$ kuvaaja $y=f(x)$. Määritä funktion **a)** arvo **b)** raja-arvo kohdissa $-5$, $-2$, 2 ja 8.




**79.** Piirrä funktion $f(x)=\dfrac{x^2+6x+8}{x^2-16}$ kuvaaja ja päättele kuvaajan perusteella raja-arvo kohdassa **a)** $-4$ **b)** 4.

**80.** Piirrä funktion kuvaaja ja päättele raja-arvo kuvaajan perusteella.

**a)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2-1-\dfrac{x+2}{x}\right)$

**b)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}-\dfrac{2x-1}{2x+2}\right)$

**81.** Tutki funktion arvoja taulukoimalla, mikä on funktion

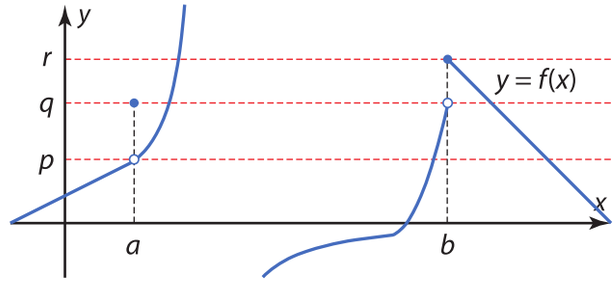
$$f(x)=\begin{cases}3x-2, & \text{kun } x<-1\\ x^3+7x+3, & \text{kun } -1<x\le 2\\ 30-2x^2, & \text{kun } x>2\end{cases}$$

raja-arvo kohdassa **a)** $-1$ **b)** 2.

**82.** **a)** Missä kohdissa funktio $f(x)=\dfrac{-x^2+3x-2}{x^2+5x-14}$ ei ole määritelty?

**b)** Tutki funktion arvoja taulukoimalla, mikä on funktion raja-arvo näissä kohdissa.

**83.** Määritä kuvan perusteella funktion $f$ arvo ja raja-arvo kohdassa **a)** $a$ **b)** $b$.




**84.** Päättele funktion arvoja taulukoimalla, miten luku $a$ on valittava, jotta funktiolla

$$f(x)=\begin{cases}3x+a, & \text{kun } x\le 1\\ \dfrac{x^2+5}{3x}, & \text{kun } x>1\end{cases}$$

on raja-arvo kohdassa 1.

**85.** **a)** Määritä funktion $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ arvoja taulukoimalla raja-arvo $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ neljän desimaalin tarkkuudella.

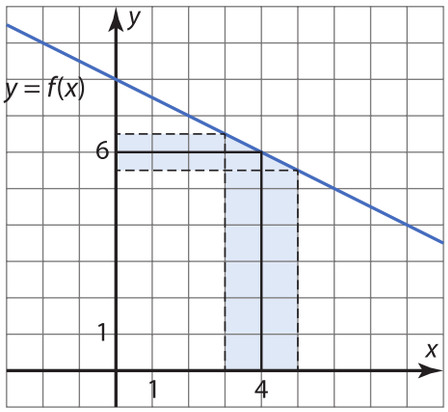
**b)** Määritä funktion $f(x)=\dfrac{2^x-1}{x}$ arvoja taulukoimalla raja-arvo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}$ kolmen desimaalin tarkkuudella.

Tehtävissä 86–88 tutkitaan raja-arvon täsmällistä määritelmää, jossa lähestymisen käsite määritellään tarkasti lukujen välisen etäisyyden avulla.

Funktion $f$ raja-arvo kohdassa $a$ on $b$, mikäli on voimassa seuraava ehto: Jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa luku $\delta > 0$ niin, että $|f(x) - b| < \varepsilon$ aina, kun $0 < |x - a| < \delta$.

Määritelmä tarkoittaa, että funktion arvojen etäisyys raja-arvosta $b$ saadaan mielivaltaisen pieneksi, kunhan muuttujan arvot pidetään riittävän lähellä kohtaa $a$.

Kuvassa tutkitaan funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x + 8$ raja-arvoa kohdassa 4. Kuvan perusteella raja-arvo on 6.




Funktion arvojen etäisyys raja-arvosta 6 on pienempi kuin 0,5, kun muuttujan arvojen etäisyys kohdasta 4 on pienempi kuin 1. Siis, kun $\varepsilon = 0{,}5$, voidaan luvuksi $\delta$ valita 1. Jos luvun $\varepsilon$ arvoa pienennetään, niin kuvan perusteella myös arvoa $\delta$ on pienennettävä.

**86.** Olkoon $f(x) = -\frac{1}{2}x + 8$.

**a)** Funktion $f$ raja-arvo kohdassa 2 on 7. Selvitä laskemalla, kuinka lähellä kohtaa $x = 2$ muuttujan arvojen on oltava, jotta funktion $f$ arvojen etäisyys raja-arvosta 7 on pienempi kuin 0,01 (eli etsi $\delta$, kun $\varepsilon = 0{,}01$).

**b)** Funktion $f$ raja-arvo kohdassa 0 on 8. Selvitä laskemalla, kuinka lähellä kohtaa $x = 0$ muuttujan arvojen on oltava, jotta funktion $f$ arvojen etäisyys raja-arvosta 8 on pienempi kuin 0,0001 (eli etsi $\delta$, kun $\varepsilon = 0{,}0001$).

**87.** Tutkitaan funktiota $g(x) = 2x + 3$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Määritä luvulle $\delta$ sellainen lauseke, että kun muuttujan $x$ etäisyys luvusta 0 on pienempi kuin $\delta$, niin funktion arvon $g(x)$ etäisyys luvusta 3 on pienempi kuin $\varepsilon$.

**88.** Osoita raja-arvon määritelmän mukaisesti, että $\lim\limits_{x \to 4} (\frac{1}{2}x + 5) = 7$.

# 2.2 Raja-arvon määrittäminen

**TUTKIMUS**

Olkoon $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{3x-6}$, kun $x \neq 2$.

**a)** Piirrä funktion $f$ kuvaaja ja päättele raja-arvo kohdassa 2.

**b)** Supista funktion $f$ lauseketta niin, että saat perusteltua a-kohdan tuloksen laskemalla.

## Rationaalifunktion raja-arvo

Edellisessä luvussa raja-arvoja määritettiin taulukoimalla funktion arvoja ja tutkimalla funktion kuvaajaa. Tässä luvussa opitaan menetelmiä, joilla raja-arvoja voidaan laskea tarkasti alla olevia laskusääntöjä soveltaen.

**Lause**

**Raja-arvon laskusääntöjä**

Oletetaan, että kohdassa $a$ funktioilla $f$ ja $g$ on olemassa raja-arvot. Oletetaan lisäksi, että $k$ on reaaliluku. Tällöin ovat voimassa seuraavat laskusäännöt.

**1)** Vakion raja-arvo

$$\lim_{x \to a} k = k$$

**2)** Identtisen funktion raja-arvo

$$\lim_{x \to a} x = a$$

**3)** Vakion siirtosääntö

$$\lim_{x \to a} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

**4)** Funktioiden summan raja-arvo

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

**5)** Funktioiden tulon raja-arvo

$$\lim_{x \to a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

**6)** Funktioiden osamäärän raja-arvo

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}, \text{ jos } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

Olkoon $h(x)=\dfrac{3x-6}{x^2-4}$, kun $x \neq -2$ ja $x \neq 2$.

**1)** Lasketaan funktion $h$ raja-arvo kohdassa $1$.

$$\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{3x-6}{x^2-4}}_{\lim_{x\to 1} h(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x-6)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-4)} = \frac{3\cdot\lim\limits_{x\to 1} x - \lim\limits_{x\to 1} 6}{\lim\limits_{x\to 1} x\cdot\lim\limits_{x\to 1} x - \lim\limits_{x\to 1} 4} = \underbrace{\frac{3\cdot 1-6}{1\cdot 1-4}}_{h(1)} = 1$$

Havaitaan, että funktion $h$ raja-arvo kohdassa $1$ on sama kuin funktion arvo kohdassa $1$. Siis lyhyesti

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x-6}{x^2-4} = \frac{3\cdot 1-6}{1^2-4} = 1.$$

**Huomaa!**
Polynomi- ja rationaalifunktion raja-arvo on sama kuin funktion arvo, mikäli funktio on määritelty tarkastelukohdassa. Tämä seuraa raja-arvon laskusäännöistä.

**2)** Rationaalifunktioiden raja-arvoja laskettaessa mielenkiintoisimpia kohtia ovat nimittäjän nollakohdat, koska niissä funktiota ei ole määritelty. Näissä kohdissa raja-arvon määrittäminen vaatii lausekkeen sieventämistä.

**a)** Tutkitaan funktion $h$ raja-arvoa kohdassa $2$.

Osoittajan raja-arvo: $\lim\limits_{x\to 2}(3x-6) = 3\cdot 2-6 = 0$.

Nimittäjän raja-arvo: $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4) = 2^2-4 = 4-4 = 0$.

Koska $x=2$ on sekä osoittajan että nimittäjän nollakohta, on osoittajalla ja nimittäjällä yhteinen tekijä $x-2$. Funktion lauseke voidaan supistaa.

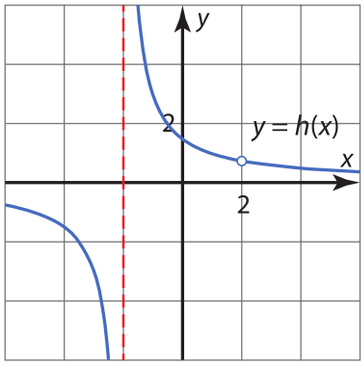
$$h(x)=\frac{3x-6}{x^2-4}=\frac{3\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}}=\frac{3}{x+2}, \text{ kun } x \neq \pm 2.$$

Supistetun lausekkeen arvo voidaan laskea kohdassa $x=2$, joten

$$\lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2}\frac{3}{x+2} = \frac{3}{2+2} = \frac{3}{4}.$$

**Lause**
Luku $x_0$ on polynomin nollakohta, jos ja vain jos $x-x_0$ on polynomin tekijä.

Funktion $h(x)=\dfrac{3x-6}{x^2-4}$ kuvaaja.




**b)** Tutkitaan funktion $h$ raja-arvoa kohdassa $-2$.

Osoittajan raja-arvo: $\lim\limits_{x\to -2}(3x-6) = 3\cdot(-2)-6 = -12$.

Nimittäjän raja-arvo: $\lim\limits_{x\to -2}(x^2-4) = (-2)^2-4 = 4-4 = 0$.

Koska $x=-2$ ei ole sekä osoittajan että nimittäjän nollakohta, funktion lauseketta ei voi supistaa. Funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa $-2$.

Havainnot voidaan yleistää seuraavaksi lauseeksi.

**Osamäärän raja-arvon olemassaolo** Lause

Tarkastellaan funktioiden osamäärän $\frac{f(x)}{g(x)}$ raja-arvoa kohdassa $a$.

**1)** Jos $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, niin $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

**2)** Jos $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ ja $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0$, raja-arvoa $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ei ole olemassa.

**3)** Jos $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ ja $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, voidaan lauseketta $\frac{f(x)}{g(x)}$ mahdollisesti sieventää. Jos sievennetyllä lausekkeella on kohdassa $a$ raja-arvo $b$, tämä on myös alkuperäisen osamäärän raja-arvo.

**Huomaa!**
Jos nimittäjän raja-arvo on nolla, voi osamäärällä olla raja-arvo vain, jos osoittajan raja-arvo on nolla.

## ESIMERKKI 1

Määritä funktion $h(x) = \frac{4x+12}{x^2+x}$ raja-arvo kohdassa **a)** 3 **b)** $-1$.

### RATKAISU

**a)** Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$\lim\limits_{x\to 3}(4x+12) = 4\cdot 3+12 = 24$ Osoittajan raja-arvo ei ole 0.

$\lim\limits_{x\to 3}(x^2+x) = 3^2+3 = 9+3 = 12$ Nimittäjän raja-arvo ei ole 0.

Siis $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \frac{24}{12} = 2$.

**b)** Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot

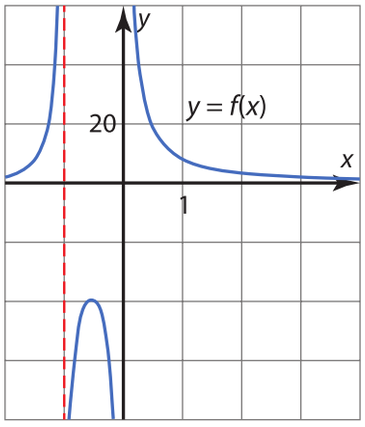
$\lim\limits_{x\to -1}(4x+12) = 4\cdot(-1)+12 = 8$. Osoittajan raja-arvo ei ole 0.

$\lim\limits_{x\to -1}(x^2+x) = (-1)^2-1 = 0$ Nimittäjän raja-arvo on 0.

Koska nimittäjän raja-arvo on nolla mutta osoittajan raja-arvo on erisuuri kuin nolla, niin $\lim\limits_{x\to -1} \frac{4x+2}{x^2+x}$ ei ole olemassa.

**Huomaa!**
Lauseen perusteella rationaalifunktion raja-arvon määrittäminen kohdassa $a$ kannattaa aloittaa laskemalla nimittäjän ja osoittajan raja-arvot kohdassa $a$. Jatko päätellään saatujen tulosten perusteella.

**Graafinen tarkistus**




### VASTAUS

**a)** 2 **b)** ei ole olemassa

## ESIMERKKI 2

Määritä raja-arvo.

**a)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{4-4x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x^3-2x^2}$

### RATKAISU

**a)** Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$\lim\limits_{x\to 1}(4-4x)=4-4\cdot 1=0$ Osoittajan raja-arvo on 0.

$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=1^2-1=0$ Nimittäjän raja-arvo on 0.

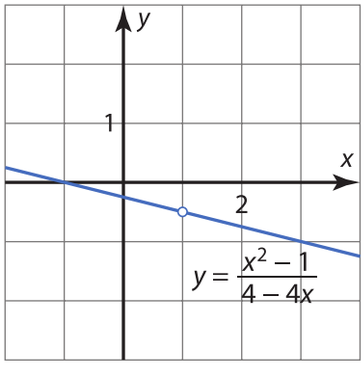
Koska sekä osoittajan että nimittäjän raja-arvo on nolla, voidaan lauseketta sieventää.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{4-4x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{4(1-x)}$$ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, $1 - x = -(x - 1)$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{-4\cancel{(x-1)}}$$ Supistetaan yhteinen tekijä.

$$=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{x+1}{4}\right)=-\frac{1+1}{4}=-\frac{1}{2}$$

**Graafinen tarkistus**




**b)** Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$\lim\limits_{x\to 0}(x^3-2x^2)=0^3-2\cdot 0^2=0$ Osoittajan raja-arvo on 0.

$\lim\limits_{x\to 0}3x=3\cdot 0=0$ Nimittäjän raja-arvo on 0.

Lauseketta voidaan sieventää.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x^3-2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\cancel{x}}{\cancel{x^2}(x-2)}$$ Supistetaan yhteinen tekijä $x$.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3}{x(x-2)}=\frac{3}{0\cdot(0-2)}=\frac{3}{0}$$ Ei määritelty!

**Huomaa!**
Vaikka alkuperäisen lausekkeen nimittäjän ja osoittajan raja-arvo on nolla tarkastelukohdassa, niin raja-arvoa ei välttämättä ole olemassa.

Koska sievennetyn lausekkeen nimittäjän raja-arvo on nolla mutta osoittajan raja-arvo on erisuuri kuin nolla, niin $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x^3-2x^2}$ ei ole olemassa.

### VASTAUS

**a)** $-\dfrac{1}{2}$ **b)** ei ole olemassa

**Raja-arvo laskimella**

Funktion raja-arvo voidaan määrittää myös laskimella. Raja-arvon määritys tapahtuu joko $\lim_{\to}(\ )$ -toiminnolla tai tekstikomennon avulla.

Harjoittele laskimesi käyttöä laskemalla esimerkkien 1 ja 2 raja-arvot.

## Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

**ESIMERKKI 3**

Määritä funktion raja-arvo kohdassa $2$.

**a)** $f(x)=\begin{cases}3x^3-x^4, & \text{kun } x\le 2\\ 2x-6, & \text{kun } x>2\end{cases}$

**b)** $g(x)=\begin{cases}x^2-3, & \text{kun } x<2\\ 3, & \text{kun } x=2\\ 7-3x, & \text{kun } x>2\end{cases}$

**RATKAISU**

**a)** Koska funktion lauseke vaihtuu kohdassa $2$, on määritettävä toispuoliset raja-arvot.

Määritetään vasemmanpuoleinen raja-arvo.

$\lim\limits_{x\to 2-} f(x)$

Kohdan $2$ vasemmalla puolella funktion lauseke on $3x^3 - x^4$.

$= \lim\limits_{x\to 2-} (3x^3-x^4)$

$= 3\cdot 2^3 - 2^4 = 8$

Määritetään oikeanpuoleinen raja-arvo.

$\lim\limits_{x\to 2+} f(x)$

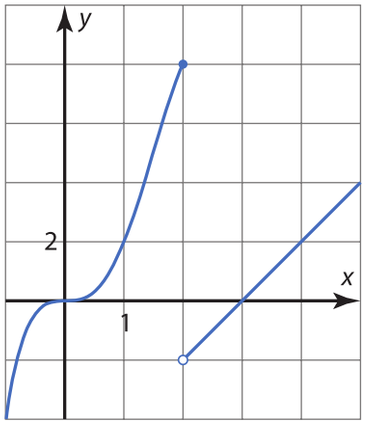
Kohdan $2$ oikealla puolella funktion lauseke on $2x - 6$.

$= \lim\limits_{x\to 2+} (2x-6)$

$= 2\cdot 2-6 = -2$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat eri suuret, funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa $2$.

**Graafinen tarkistus**



**Huomaa!**
Funktion arvolla kohdassa $x = 2$ ei ole vaikutusta raja-arvon suuruuteen.

**b)** Koska funktion lauseke vaihtuu kohdassa 2, on määritettävä toispuoliset raja-arvot.

Määritetään vasemmanpuoleinen raja-arvo.

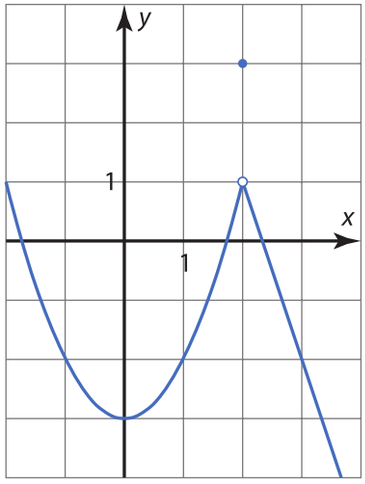
$$\lim_{x \to 2-} g(x)$$

Kohdan 2 vasemmalla puolella funktion lauseke on $x^2 - 3$.

$$= \lim_{x \to 2-} (x^2 - 3)$$

$$= 2^2 - 3 = 1$$

**Graafinen tarkistus**




Määritetään oikeanpuoleinen raja-arvo.

$$\lim_{x \to 2+} g(x)$$

Kohdan 2 oikealla puolella funktion lauseke on $7 - 3x$.

$$= \lim_{x \to 2+} (7 - 3x)$$

$$= 7 - 3 \cdot 2 = 1$$

Koska toispuoliset raja-arvot kohdassa 2 ovat yhtä suuret, on funktiolla raja-arvo: $\lim_{x \to 2} g(x) = 1$.

**VASTAUS**

**a)** ei ole olemassa **b)** 1

## Itseisarvolausekkeet (Syventävää tietoa)

Kun lasketaan itseisarvoja sisältävän funktion raja-arvoja, voidaan usein hyödyntää seuraavaa lausetta.

**Funktion itseisarvon raja-arvo** — Lause

$\lim\limits_{x\to a}\left|f(x)\right| = \left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right|$, mikäli raja-arvo $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ on olemassa.

**ESIMERKKI 4** — Syventävä

Määritä funktion $f(x)=\dfrac{x^2+5x}{|2x+10|}$, kun $x \neq -5$, raja-arvo kohdassa
**a)** $-6$ **b)** $-5$.

RATKAISU

**a)** Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x\to -6}(x^2+5x) = (-6)^2+5\cdot(-6) = 36-60 = 6 \neq 0$$

$$\lim_{x\to -6}|2x+10| = \left|\lim_{x\to -6}(2x+10)\right| = |2\cdot(-6)+10| = |-2| = 2 \neq 0$$

Siis $\lim\limits_{x\to -6} f(x) = \dfrac{6}{2} = 3$.

**b)** Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x\to -5}(x^2+5x) = (-5)^2+5\cdot(-5) = 25-25 = 0$$

$$\lim_{x\to -5}|2x+10| = \left|\lim_{x\to -5}(2x+10)\right| = |2\cdot(-5)+10| = |-10+10| = 0$$

Koska sekä osoittajan että nimittäjän raja-arvo on nolla, voidaan lauseketta sieventää. Poistetaan funktion lausekkeesta itseisarvomerkit itseisarvon määritelmää käyttäen.

Selvitetään, milloin lausekkeen $2x+10$ arvot ovat epänegatiivisia.

$$\begin{aligned} 2x+10 &\geq 0 \\ 2x &\geq -10 \quad |:2 \\ x &\geq -5 \end{aligned}$$

Lausekkeen $2x+10$ arvot ovat epänegatiivisia, kun $x \geq 5$ ja negatiivisia, kun $x < -5$.

**Itseisarvon määritelmä**

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ kun } a \geq 0 \\ -a, \text{ kun } a < 0 \end{cases}$$

Siis

$$|2x+10| = \begin{cases} 2x+10, & \text{kun } x \geq -5 \\ -(2x+10), & \text{kun } x < -5 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x+10, & \text{kun } x \geq -5 \\ -2x-10, & \text{kun } x < -5. \end{cases}$$

Koska lauseke vaihtuu kohdassa $-5$, on määritettävä toispuoliset raja-arvot.

Määritetään oikeanpuoleinen raja-arvo.

$$\lim_{x \to -5+} f(x) = \lim_{x \to -5+} \frac{x^2+5x}{|2x+10|} \qquad |2x+10| = 2x+10, \text{ kun } x > -5$$

$$= \lim_{x \to -5+} \frac{x^2+5x}{2x+10}$$

$$= \lim_{x \to -5+} \frac{x(x+5)}{2(x+5)}$$

$$= \lim_{x \to -5+} \frac{x}{2} = \frac{-5}{2} = -\frac{5}{2}$$

Määritetään vasemmanpuoleinen raja-arvo.

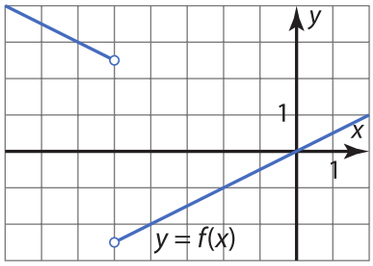
$$\lim_{x \to -5-} f(x) = \lim_{x \to -5-} \frac{x^2+5x}{|2x+10|} \qquad |2x+10| = -2x-10, \text{ kun } x < -5$$

$$= \lim_{x \to -5-} \frac{x^2+5x}{-2x-10}$$

$$= \lim_{x \to -5-} \frac{x(x+5)}{-2(x+5)}$$

$$= \lim_{x \to -5-} \left(-\frac{x}{2}\right) = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2}$$

**Graafinen tarkistus**




Koska toispuoliset raja-arvot ovat eri suuret, funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa $-5$.

**VASTAUS**

**a)** 3 **b)** ei ole olemassa

**Itseisarvofunktion kuvaaja laskimella**

Laskimessa itseisarvo syötetään joko itseisarvo-toiminnon $|\cdot|$ tai `abs`-komennon avulla.

Harjoittele laskimesi käyttöä piirtämällä esimerkin 4 funktion kuvaaja.

## Harjoitustehtäviä

**Sarja I**

**89.** Määritä raja-arvo.

**a)** $\lim\limits_{x\to -4}(x^2+5x+1)$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2-6x}{3}$

**90.** E1 Määritä raja-arvo.

**a)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{4x-10}{x^2-5}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{6x-10}{x^2-2x}$

**91.** Määritä raja-arvo.

**a)** $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x+6}{x+2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x}{x(1-x)}$

**92.** E2 Määritä raja-arvo.

**a)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{3x+3}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-6x}{x^2(x-3)}$

**93.** Määritä raja-arvo.

**a)** $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-6x}{6-x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$

**94.** Määritä raja-arvo.

**a)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2-2x}$

**95.** E3 Määritä funktion

$$f(x)=\begin{cases}x^3-10x, & \text{kun } x<3\\ -5x+12, & \text{kun } x>3\end{cases}$$

raja-arvo kohdassa 3.

**96.** Määritä funktion

$$g(x)=\begin{cases}4x+13, & \text{kun } x<-3\\ x^2+2x-2, & \text{kun } -3<x<2\\ 5x+1, & \text{kun } x\geq 2\end{cases}$$

raja-arvo kohdassa **a)** $-3$ **b)** 2.

**97.** Määritä raja-arvo.

**a)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3x^2-6x}{5x}\cdot\dfrac{10}{x^2-4}\right)$

**b)** $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{4}{1-x^2}-\dfrac{2}{1+x}\right)$

**98.** Määritä raja-arvo.

**a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-2)^2-4}{x}$

**b)** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^3-1}{2h}$

## Sarja II

**99.** Määritä raja-arvo.

**a)** $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{x^2-32}{16+x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{7x-21}{4x^2-12x}$

**100.** Määritä raja-arvo.

**a)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x-10}{x^3-2x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9+3x}{x^2-9}$

**101.** Määritä raja-arvo.

**a)** $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{16x^2-4}{2x-1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}}\dfrac{4x^2+12x+9}{4x^2-9}$

**102.** Määritä funktion

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-10}{4x-10}, & \text{kun } x\le 2\\ x^2-3x+1, & \text{kun } x>2\end{cases}$$

raja-arvo kohdassa 2.

**103.** Määritä funktion

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+4x^2}{x^2-16}, & \text{kun } x<-4\\ 0, & \text{kun } x=-4\\ \dfrac{1}{2}x^2+3x+2, & \text{kun } x>-4\end{cases}$$

raja-arvo kohdassa $-4$.

**104.** Määritä raja-arvo.

**a)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{x}\left(\dfrac{5}{x-2}+\dfrac{5}{2}\right)\right)$

**b)** $\lim\limits_{x\to -2}\left(\left(\dfrac{8}{x}+4\right):(x+2)\right)$

**105.** Määritä raja-arvo.

**a)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{4}\right):(x-2)\right)$

**b)** $\lim\limits_{x\to -1}\left(\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^3}\right):(x+1)\right)$

**106.** E4 Määritä funktion $f(x)=\dfrac{x^2-100}{|x+10|}$ raja-arvo kohdassa

**a)** 0 **b)** $-10$.

**107.** Määritä raja-arvo $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-|3-2x|}{5+|2-x|}$.

**108.** Määritä raja-arvo

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\big(f(x)\big)^2-\big(f(2)\big)^2}{x-2}$, kun $f(x)=x^2$.

**109.** Määritä vakio $a$ niin, että funktiolla

$$f(x)=\begin{cases}ax^2-10, & \text{kun } x<5\\ 7x-5a, & \text{kun } x\ge 5\end{cases}$$

on raja-arvo kohdassa 5.

**110.** Määritä vakio $a$ niin, että raja-arvo on olemassa. Mikä on tällöin raja-arvo?

**a)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+x+a}{x+2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{ax^2-8}{x-a}$

# 2.3 Funktion jatkuvuus

**TUTKIMUS**

**1)** Tutki piirtämällä, voidaanko vakion $a$ arvo määrittää niin, että funktion $f(x)=\begin{cases}2x-1, & \text{kun } x\le 1\\ a, & \text{kun } x>1\end{cases}$ kuvaaja ei katkea kohdassa $x=1$.

**2)** Funktio $g$ on määritelty lausekkeella $g(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-2}$, kun $x\neq 2$. Piirrä funktion kuvaaja ja tutki, voidaanko funktion arvo $g(2)$ määritellä niin, että funktion kuvaaja ei katkea kohdassa $x=2$.

**3)** Funktio $h$ on määritelty lausekkeella $h(x)=\dfrac{1}{x-1}$, kun $x\neq 1$. Piirrä funktion kuvaaja ja tutki, voidaanko funktion arvo $h(1)$ määritellä niin, että funktion kuvaaja ei katkea kohdassa $x=1$.

Luvussa 2.2 havaittiin, että polynomi- ja rationaalifunktion raja-arvo määrittelyjoukon jokaisessa kohdassa $a$ on sama kuin funktion arvo kohdassa $a$. Tätä ominaisuutta kutsutaan funktion jatkuvuudeksi.

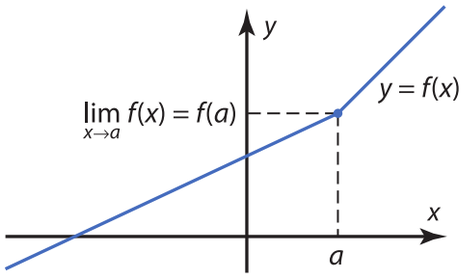
**Funktion jatkuvuus kohdassa $a$** — Määritelmä

Funktio $f$ on *jatkuva kohdassa* $a$, jos tässä kohdassa funktion raja-arvo on sama kuin funktion arvo eli

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Funktion $f$ on jatkuva kohdassa $a$, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

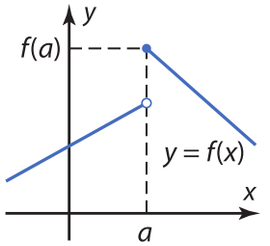
- funktiolla on raja-arvo kohdassa $a$, eli $\lim_{x \to a} f(x)$ on olemassa
- funktio on määritelty kohdassa $a$, eli $f(a)$ on olemassa
- funktion raja-arvo ja funktion arvo kohdassa $a$ ovat yhtä suuret, eli $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.




$f$ on jatkuva kohdassa $a$.

- $\lim_{x \to a} f(x)$ on olemassa
- $f(a)$ on olemassa
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

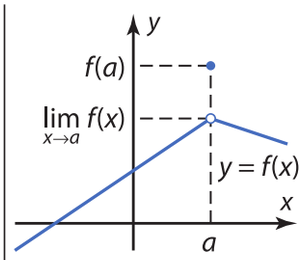
Jos funktio on määritelty kohdassa $a$ ja se ei ole jatkuva, niin se on *epäjatkuva kohdassa* $a$. Jos funktio ei ole määritelty kohdassa $a$, niin se ei ole jatkuva eikä epäjatkuva kohdassa $a$.




$f$ on epäjatkuva kohdassa $a$.

Raja-arvoa kohdassa $a$ ei ole olemassa:

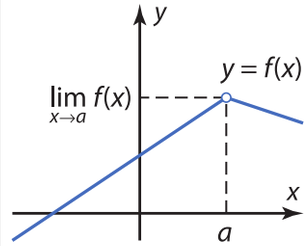
$$\lim_{x \to a-} f(x) \neq \lim_{x \to a+} f(x)$$




$f$ on epäjatkuva kohdassa $a$.

Raja-arvo ja funktion arvo ovat eri suuria:

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$$

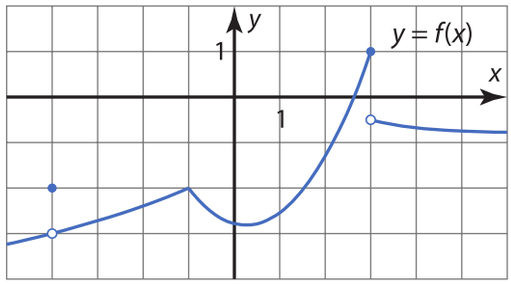



$f$ ei ole jatkuva eikä epäjatkuva kohdassa $a$.

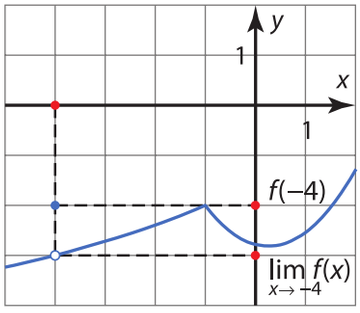
Funktiota ei ole määritelty kohdassa $a$.

## ESIMERKKI 1

Alla on erään funktion $f$ kuvaaja $y = f(x)$. Tutki kuvan perusteella, onko funktio $f$ jatkuva kohdassa **a)** $-4$ **b)** $-1$ **c)** $3$.

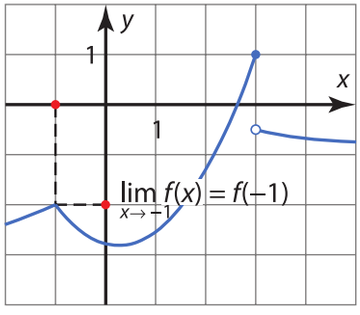



### RATKAISU



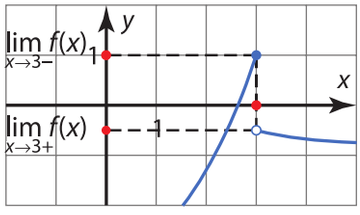

**a)** Kuvan perusteella $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = -3$ ja $f(-4) = -2$.

Koska $\lim\limits_{x \to -4} f(x) \neq f(-4)$, niin funktio $f$ ei ole jatkuva kohdassa $-4$.




**b)** Kuvan perusteella $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -2$ ja $f(-1) = -2$.

Koska $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$, niin funktio $f$ on jatkuva kohdassa $-1$.




**c)** Kohdassa $x = 3$ toispuoliset raja-arvot ovat eri suuret.

$\lim\limits_{x \to 3-} f(x) = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 3+} f(x) \approx -0{,}5$

Funktio $f$ on määritelty kohdassa $x = 3$, mutta sillä ei ole raja-arvoa. Funktio $f$ ei siis ole jatkuva kohdassa $3$.

### VASTAUS

**a)** ei **b)** on **c)** ei

## ESIMERKKI 2

Onko funktio $f(x)=\begin{cases}4x-7, & \text{kun } x<2\\ 5, & \text{kun } x\geq 2\end{cases}$ jatkuva kohdassa

**a)** 0 **b)** 2?

### RATKAISU

**a)** Funktion lauseke on $4x-7$ kohdan $0$ ympäristössä.

Lasketaan funktion raja-arvo ja arvo kohdassa $0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(4x-7)=4\cdot 0-7=-7$$

$$f(0)=4\cdot 0-7=-7$$

Koska $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, niin funktio $f$ on jatkuva kohdassa $0$.

**b)** Koska funktion lauseke vaihtuu kohdassa $2$, on määritettävä toispuoliset raja-arvot.

$$\lim_{x\to 2-} f(x)$$

Kohdan $2$ vasemmalla puolella funktion lauseke on $4x-7$.

$$=\lim_{x\to 2-}(4x-7)$$

$$=4\cdot 2-7=1$$

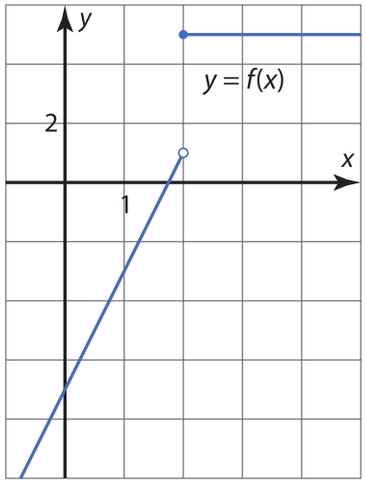
$$\lim_{x\to 2+} f(x)$$

Kohdan $2$ oikealla puolella funktion lauseke on $5$.

$$=\lim_{x\to 2+} 5=5$$

Kohdassa $2$ toispuoliset raja-arvot ovat erisuuret. Funktiolla $f$ ei ole raja-arvoa kohdassa 2. Funktio $f$ ei siis ole jatkuva kohdassa $2$.

**Graafinen tarkistus**




### VASTAUS

**a)** on **b)** ei

## ESIMERKKI 3

Funktio $f$ on määritelty lausekkeella $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2}{x-4}$, kun $x \neq 4$. Määrittele arvo $f(4)$ niin, että funktio $f$ on jatkuva kohdassa 4.

### RATKAISU

Funktio $f$ on jatkuva kohdassa 4, jos $f(4)=\lim\limits_{x\to 4} f(x)$. Määritetään funktion $f$ raja-arvo kohdassa 4.

Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$\lim\limits_{x\to 4}(x^3-4x^2)=4^3-4\cdot 4^2=0$ Osoittajan raja-arvo on 0.

$\lim\limits_{x\to 4}(x-4)=4-4=0$ Nimittäjän raja-arvo on 0.

Koska sekä osoittajan että nimittäjän raja-arvo on nolla, voidaan lauseketta sieventää.

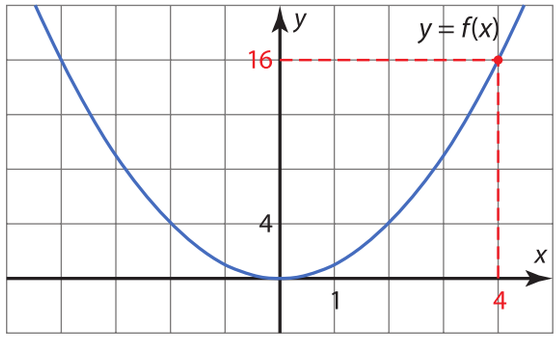
$$\lim_{x\to 4}\frac{x^3-4x^2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{x^2\,\cancel{(x-4)}^{\,1}}{\cancel{x-4}_{\,1}}=\lim_{x\to 4}x^2=4^2=16$$

Funktio on jatkuva kohdassa 4, kun määritellään $f(4)=16$.

### VASTAUS

$f(4)=16$

Piirtämällä funktion $f$ kuvaaja havaitaan, että funktiosta tulee jatkuva, kun määritellään $f(4)=16$.



## ESIMERKKI 4

Olkoon $f(x)=\begin{cases} x^2-a, & \text{kun } x \le 3 \\ -x+2a, & \text{kun } x > 3. \end{cases}$

Määritä vakio $a$ niin, että funktio $f$ on jatkuva kohdassa 3. Piirrä funktion kuvaaja.

### RATKAISU

Funktio on jatkuva kohdassa 3, kun $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$.

Funktion lauseke vaihtuu kohdassa 3, joten määritetään toispuoliset raja-arvot ja funktion arvo kohdassa 3.

$$\lim_{x \to 3-} f(x) = \lim_{x \to 3-} (x^2 - a)$$
$$= 3^2 - a$$
$$= 9 - a$$

Kohdan 3 vasemmalla puolella funktion lauseke on $x^2 - a$.

$$\lim_{x \to 3+} f(x) = \lim_{x \to 3+} (-x + 2a)$$
$$= -3 + 2a$$

Kohdan 3 oikealla puolella funktion lauseke on $-x + 2a$.

$$f(3) = 3^2 - a = 9 - a$$

Kohdassa 3 funktion lauseke on $x^2 - a$.

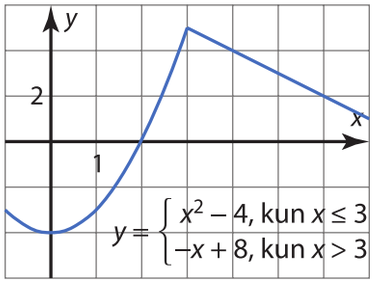
**Huomaa!**
Funktiolla on oltava raja-arvo kohdassa 3, jotta funktio voi olla jatkuva kohdassa 3.

Funktio $f$ on jatkuva kohdassa 3, kun $\lim\limits_{x \to 3-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3+} f(x) = f(3)$.

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$9 - a = -3 + 2a$$
$$-3a = -12$$
$$a = 4$$

Piirretään funktion $f$ kuvaaja, kun $a = 4$.




### VASTAUS

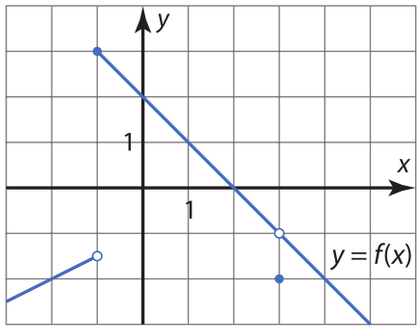
$a = 4$

## Harjoitustehtäviä

**Sarja I**

**111.** E1 Alla on erään funktion $f$ kuvaaja $y = f(x)$. Tutki kuvan perusteella, onko funktio $f$ jatkuva kohdassa

**a)** $-1$ **b)** $0$ **c)** $3$.




**112.** Hahmottele sellaisen funktion kuvaaja, joka ei ole jatkuva kohdassa $2$ ja

**a)** jolla ei ole raja-arvoa kohdassa $2$

**b)** jonka raja-arvo kohdassa $2$ on $4$.

**113.** Onko väite oikein vai väärin? Perustele.

**a)** Jos $f(2)$ on määritelty, niin funktio $f$ on aina jatkuva kohdassa $2$.

**b)** Jos funktio on jatkuva kohdassa $5$, niin $f(5)$ on määritelty.

**c)** Jos funktio $f$ on jatkuva kohdassa $2$ ja $f(2) = -1$, niin $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -1$.

**d)** Jos $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$, niin funktio $f$ on jatkuva kohdassa $1$.

**114.** E2 Onko funktio jatkuva kohdassa $3$?

**a)** $f(x) = \begin{cases} 2x - 6, & \text{kun } x \le 3 \\ -3, & \text{kun } x > 3 \end{cases}$

**b)** $g(x) = \begin{cases} \dfrac{5x - 15}{x - 3}, & \text{kun } x \ne 3 \\ 5, & \text{kun } x = 3 \end{cases}$

**115.** Piirrä funktion

$$f(x) = \begin{cases} -6, & \text{kun } x < 0 \\ \dfrac{9x^2 - 12x}{2x}, & \text{kun } x \ge 0 \end{cases}$$

kuvaaja.

**a)** Päättele kuvan perusteella, onko funktio jatkuva kohdissa $-3$ ja $0$.

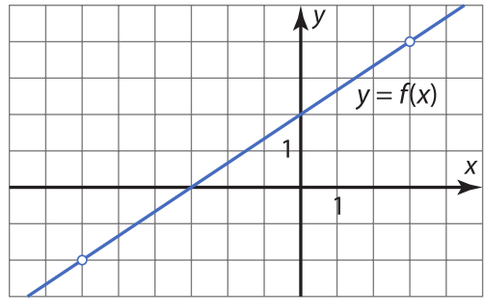
**b)** Osoita a-kohdassa tekemäsi päätelmät oikeaksi laskemalla.

**116.** Tutki, onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{kun } x < -2 \\ -1, & \text{kun } x = -2 \\ \dfrac{1}{2}x, & \text{kun } x > -2 \end{cases}$$

jatkuva kohdassa $-2$.

**117.** E3 Määritä kuvaajan avulla funktion arvot $f(-6)$ ja $f(3)$ niin, että funktio on jatkuva kohdissa $x = -6$ ja $x = 3$.




**118.** Funktio $f$ on määritelty lausekkeella $f(x) = \dfrac{3x^2 + 12x}{x + 4}$, kun $x \ne -4$. Määrittele arvo $f(-4)$ niin, että funktio $f$ on jatkuva kohdassa $-4$.

**119.** E4 Määritä vakio $b$ niin, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4x + b, & \text{kun } x \le 1 \\ 2x - 1, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

on jatkuva kohdassa $1$. Piirrä funktion kuvaaja.

**120.** Määritä vakio $b$ niin, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5x + 7, & \text{kun } x \ne 2 \\ b, & \text{kun } x = 2 \end{cases}$$

on jatkuva kohdassa $2$.

**121.** Määritä vakio $a$ niin, että funktio

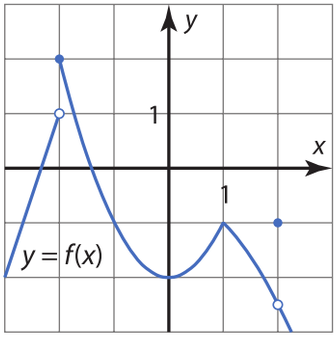
$$g(x)=\begin{cases}2x-2, & \text{kun } x<a\\ x, & \text{kun } x\geq a\end{cases}$$

on jatkuva kohdassa $a$. Piirrä funktion kuvaaja.

## Sarja II

**122.** Alla on erään funktion $f$ kuvaaja $y=f(x)$. Tutki kuvan perusteella, onko funktio $f$ jatkuva kohdassa

**a)** $-2$ **b)** 1 **c)** 2.




**123.** Onko funktio

$$f(x)=\begin{cases}x^3-8, & \text{kun } x\leq -2\\ -4x^2, & \text{kun } x>-2\end{cases}$$

jatkuva kohdassa $-2$?

**124.** Onko funktio

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-6x}{x-3}, & \text{kun } x\neq 3\\ 5, & \text{kun } x=3\end{cases}$$

jatkuva kohdassa **a)** 0 **b)** 3?

**125.** Anna esimerkki kaikkialla määritellystä funktiosta, joka on epäjatkuva kohdassa 1 ja jonka nollakohdat ovat $x=-1$ ja $x=3$. Piirrä funktion kuvaaja.

**126.** Funktio $f$ on määritelty lausekkeella $f(x)=\dfrac{2x^2-50}{3x-15}$, kun $x\neq 5$. Määrittele arvo $f(5)$ niin, että funktio $f$ on jatkuva kohdassa 5.

**127.** Määritä vakio $b$ niin, että funktio

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{9-x^2}{x+3}, & \text{kun } x<-3\\ 2x+b, & \text{kun } x\geq -3\end{cases}$$

on jatkuva kohdassa $-3$. Piirrä funktion kuvaaja.

**128.** Määritä vakio $a$ niin, että funktio

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6}{x^2+1}, & \text{kun } x\leq a\\ 3, & \text{kun } x>a\end{cases}$$

on jatkuva kohdassa $a$. Piirrä funktion kuvaaja.

**129.** Funktio $f$ on määritelty lausekkeella $f(x)=\dfrac{ax^2+8x}{x-2}$, kun $x\neq 2$.

**a)** Millä vakion $a$ arvoilla on mahdollista määritellä arvo $f(2)$ niin, että funktio on jatkuva kohdassa 2?

**b)** Mikä tällöin pitää määritellä arvoksi $f(2)$?

**130.** Määritä vakiot $a$ ja $b$ niin, että funktio

$$f(x)=\begin{cases}4x-a, & \text{kun } x\leq -2\\ \dfrac{x^2+2x}{x-2}, & \text{kun } -2<x<1\\ x^2+b, & \text{kun } x\geq 1\end{cases}$$

on jatkuva kohdissa $-2$ ja 1.

**131.** Tutki, onko funktio

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x|x|-1}{|x-1|}, & \text{kun } x\neq 1\\ 2, & \text{kun } x=1\end{cases}$$

jatkuva kohdassa 1.

**132.** Lattiafunktion $L(x)$ arvo on suurin kokonaisluku, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin luku $x$. Esimerkiksi $L(3{,}7)=3$, $L(-4{,}2)=-5$ ja $L(6)=6$. Tutki, onko funktio

**a)** $L(x)$ **b)** $f(x)=xL(x)$

jatkuva kohdassa 0.

# 2.4 Jatkuvuus joukossa

## Funktion jatkuvuus joukossa

Koska jatkuvuus määritellään raja-arvon avulla, on jatkuvuudella samankaltaisia ominaisuuksia kuin raja-arvolla. Seuraavat jatkuvuuden ominaisuudet perustuvat luvussa 2.2 (s. 40 ja s. 46) esitettyihin raja-arvon laskusääntöihin.

**Jatkuvuuden ominaisuuksia** Lause

Oletetaan, että funktiot $f$ ja $g$ ovat jatkuvia kohdassa $a$. Tällöin myös seuraavat funktiot ovat jatkuvia kohdassa $a$.

1) Vakiolla kerrottu funktio
   $k \cdot f(x)$, missä $k$ on vakio
2) Funktioiden summa
   $f(x) + g(x)$
3) Funktioiden tulo
   $f(x) \cdot g(x)$
4) Funktioiden osamäärä
   $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, kun $g(a) \neq 0$
5) Funktion itseisarvo
   $|f(x)|$

Jatkuvuuteen liittyvät myös seuraavat käsitteet:

- Funktio $f$ on *jatkuva joukossa* $A$, jos se on jatkuva jokaisessa kohdassa $a \in A$.
- Funktio $f$ on *kaikkialla jatkuva*, jos se on jatkuva koko reaalilukujen joukossa $\mathbf{R}$.
- Funktio $f$ on *jatkuva*, jos se on jatkuva koko määrittelyjoukossaan.

**1)** Tarkastellaan polynomifunktiota $f(x) = x^5 - 3x^2 + x$.

Funktio $f$ on määritelty kaikilla muuttujan $x$ arvoilla ja sen raja-arvo kohdassa $a$ on

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (x^5 - 3x^2 + x) = a^5 - 3a^2 + a = f(a).$$

Funktio $f$ on siis jatkuva kohdassa $a$. Koska $a$ voi olla mikä tahansa reaaliluku, funktio $f$ on kaikkialla jatkuva.

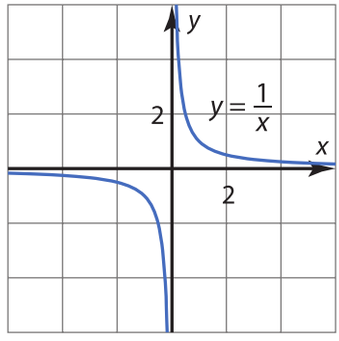
**2)** Tarkastellaan rationaalifunktiota $g(x) = \frac{1}{x}$.

Funktio $g$ on määritelty, kun $x \neq 0$. Funktion $g$ raja-arvo kohdassa $a \neq 0$ on:

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a} = g(a).$$

Funktio $g$ on siis jatkuva kohdassa $a \neq 0$. Koska $a$ voi olla mikä tahansa määrittelyjoukon luku, funktio $g$ on jatkuva.

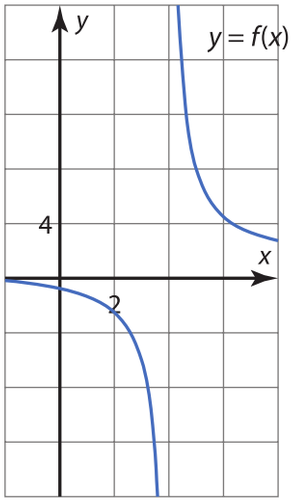
Koska funktiota $g$ ei ole määritelty kun $x = 0$, niin sen kuvaaja muodostuu kahdesta erillisestä osasta.




Raja-arvon laskusäännöistä seuraa, että erityisesti seuraavat funktiot ovat jatkuvia (määrittelyjoukossaan):

- vakiofunktio
- potenssifunktio $x^n$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$
- polynomifunktio
- rationaalifunktio $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, missä $p(x)$ ja $q(x)$ ovat polynomifunktioita.

**Graafinen tarkistus**




**ESIMERKKI 1**

Olkoon $f(x)=\dfrac{x+3}{x-4}$, kun $x \neq 4$. Onko funktio $f$

**a)** jatkuva **b)** kaikkialla jatkuva?

RATKAISU

**a)** Funktio $f$ on rationaalifunktio, joten se on määrittelyjoukossaan $(x \neq 4)$ jatkuva. Siis funktio $f$ on jatkuva.

**b)** Koska funktiota $f$ ei ole määritelty kohdassa 4, niin se ei ole jatkuva kohdassa 4. Siis funktio $f$ ei ole kaikkialla jatkuva.

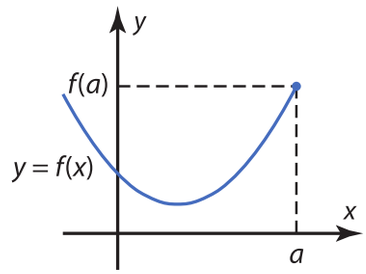
VASTAUS

**a)** on **b)** ei

## Funktion jatkuvuus välillä

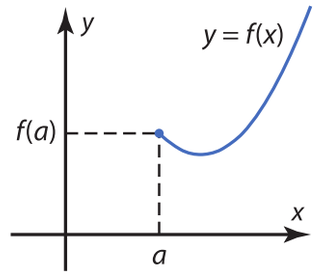
Funktio $f$ on *vasemmalta jatkuva* kohdassa $a$, jos funktion $f$ vasemmanpuoleinen raja-arvo on sama kuin funktion arvo.

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$$




Vastaavasti funktio $f$ on *oikealta jatkuva* kohdassa $a$, jos funktion $f$ oikeanpuoleinen raja-arvo on sama kuin funktion arvo.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$$




Kun funktio on vasemmalta jatkuva tai oikealta jatkuva, sanotaan, että funktio on *toispuolisesti jatkuva*.

**Jatkuvuus välillä** — Määritelmä

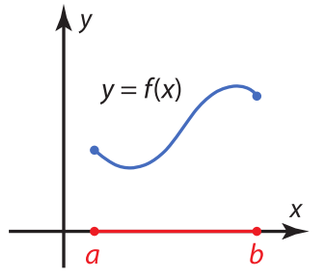
Funktio on *jatkuva välillä* $I$, jos funktio on jatkuva välin jokaisessa sisäpisteessä ja toispuolisesti jatkuva väliin $I$ sisältyvissä päätepisteissä.

**Merkintä**

Välille $[a, b]$ kuuluvat ne luvut $x$, joille pätee $a \le x \le b$.

Välille $]a, b[$ kuuluvat ne luvut $x$, joille pätee $a < x < b$.

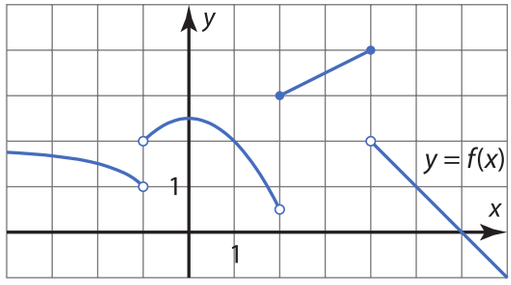
Määritelmän mukaan funktio $f$ on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$, jos se on jatkuva avoimella välillä $]a, b[$ ja sen lisäksi oikealta jatkuva päätepisteessä $a$ ja vasemmalta jatkuva päätepisteessä $b$.




## ESIMERKKI 2

Alla on erään funktion $f$ kuvaaja $y = f(x)$. Päättele kuvaajan perusteella, onko funktio $f$ jatkuva välillä

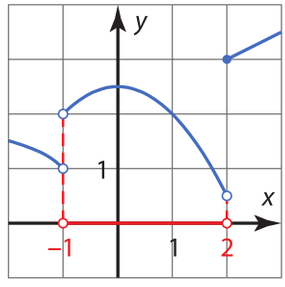
**a)** $]-1, 2[$ **b)** $]-1, 2]$ **c)** $[2, 4]$ **d)** $[-2, 0]$.




### RATKAISU

**a)** Funktio $f$ on jatkuva avoimen välin $]-1, 2[$ jokaisessa pisteessä.

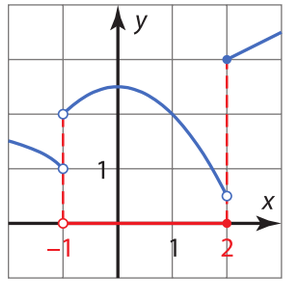
Siis funktio $f$ on jatkuva avoimella välillä $]-1, 2[$.




**b)** Funktio $f$ ei ole vasemmalta jatkuva välin päätepisteessä 2, koska vasemmanpuoleinen raja-arvo on eri suuri kuin funktion arvo.

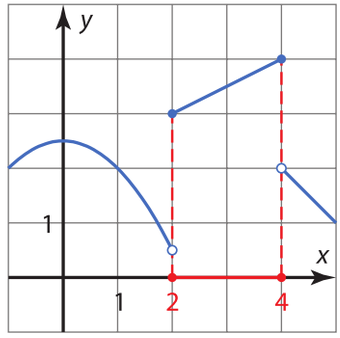
$\lim\limits_{x \to 2-} f(x) \approx 0{,}5$

$f(2) = 3$




Siis funktio $f$ ei ole jatkuva välillä $]-1, 2]$.

**c)** Funktio $f$ on oikealta jatkuva päätepisteessä 2:




$$\lim_{x \to 2+} f(x) = 3$$

$$f(2) = 3.$$

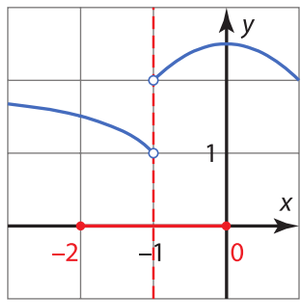
Funktio $f$ on vasemmalta jatkuva päätepisteessä 4:

$$\lim_{x \to 4-} f(x) = 4$$

$$f(4) = 4.$$

Siis funktio $f$ on jatkuva suljetulla välillä $[2, 4]$.

**d)** Funktiota ei ole määritelty kohdassa $x = -1$, joten se ei voi olla jatkuva kohdassa $-1$. Funktio $f$ ei ole jatkuva millään kohdan $-1$ sisältävällä välillä.

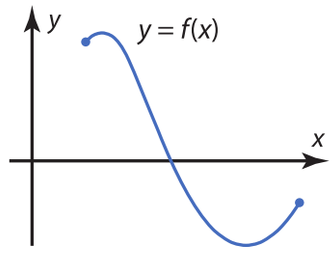



Siis funktio $f$ ei ole jatkuva suljetulla välillä $[-2, 0]$.

**VASTAUS**

**a)** on **b)** ei **c)** on **d)** ei

## Jatkuvuus ja funktion nollakohdat




Funktion nollakohtien ratkaiseminen voi olla työlästä. Joskus kuitenkin riittää tieto siitä, että nollakohta on olemassa. Jos funktio on jatkuva jollakin lukusuoran välillä, niin sen kuvaaja on tällä välillä yhtenäinen, katkeamaton käyrä. Geometrisen mielikuvan perusteella on selvää, että jos suljetulla välillä jatkuva funktio saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, sen kuvaaja leikkaa $x$ akselin vähintään kerran.

Havainto voidaan esittää täsmällisesti lauseena, jota kutsutaan Bolzanon lauseeksi.

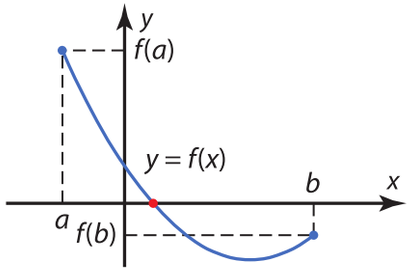
**Bolzanon lause** Lause

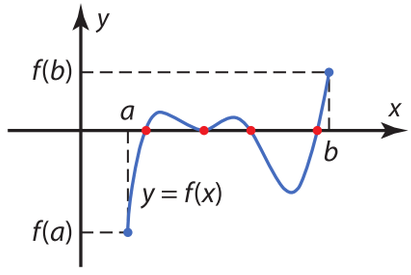
Jos

- funktio $f$ on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja
- funktion arvot $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset,

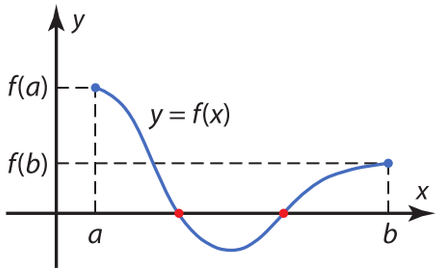
niin funktiolla $f$ on ainakin yksi nollakohta avoimella välillä $]a, b[$.

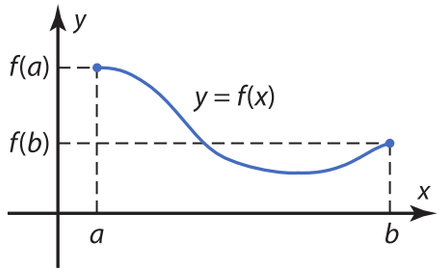
Bolzanon lauseella saadaan tieto, että välillä $]a, b[$ on ainakin yksi nollakohta, mutta nollakohtia voi olla useampiakin.




Mikäli funktion arvot $f(a)$ ja $f(b)$ ovat saman merkkiset, Bolzanon lauseen perusteella ei voida päätellä nollakohtien olemassaolosta mitään.



## ESIMERKKI 3

Tutki, onko funktiolla nollakohtia välillä $[-2, 1]$.

**a)** $f(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{x+1}{x-5}$ **b)** $g(x) = \frac{x^3+9}{x+1}$

### RATKAISU

**a)** Selvitetään ensin, voidaanko soveltaa Bolzanon lausetta.

Nimittäjän $x-5$ nollakohta on $x=5$, joka ei kuulu tarkasteluvälille. Funktio $f$ on siis määritelty suljetulla välillä $[-2, 1]$. Funktio $f$ on rationaalifunktio, joten se on jatkuva määrittelyjoukossaan. Koska funktio $f$ on jatkuva tutkittavalla välillä, voidaan soveltaa Bolzanon lausetta, mikäli funktion arvot ovat välin päätepisteissä erimerkkiset.

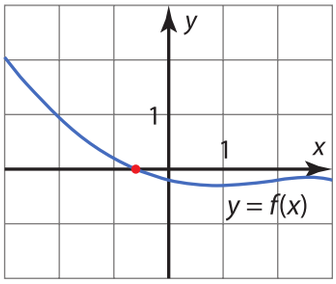
Lasketaan funktion arvot välin $[-2, 1]$ päätepisteissä.

$$f(-2) = \frac{1}{5}\cdot(-2)^2 + \frac{-2+1}{-2-5} = 0{,}942... > 0$$

$$f(1) = \frac{1}{5}\cdot 1^2 + \frac{1}{1-5} = -0{,}3 < 0$$

Funktion $f$ arvot välin $[-2, 1]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, joten funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]-2, 1[$.

**Graafinen tarkistus**




**b)** Selvitetään ensin, voidaanko soveltaa Bolzanon lausetta.

Nimittäjän $x+1$ nollakohta on $x=-1$, joka kuuluu tarkasteluvälille. Funktio $g$ ei siis ole määritelty suljetun välin $[-2, 1]$ jokaisessa kohdassa, joten se ei ole jatkuva tutkittavalla välillä. Ei voida siis soveltaa Bolzanon lausetta.

Tutkitaan, voidaanko funktion $g$ nollakohdat ratkaista.

$$\frac{x^3+9}{x+1} = 0 \quad \big| \cdot(x+1)\ (\neq 0)$$

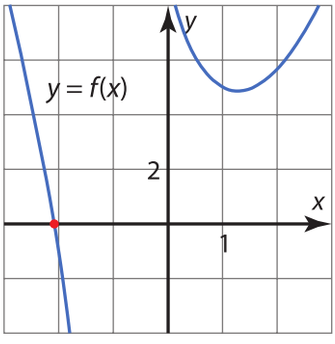
$$x^3 + 9 = 0$$

$$x^3 = -9$$

$$x = \sqrt[3]{-9} = -2{,}0800...$$

Funktiolla $g$ on vain yksi nollakohta ja se ei kuulu välille $[-2, 1]$.

**Graafinen tarkistus**




### VASTAUS

a) on **b)** ei

Aina ei ole mahdollista ratkaista yhtälöä tarkasti vaan joudutaan turvautumaan likiarvomenetelmiin, joiden oleellisena osana on Bolzanon lauseen soveltaminen. Kurssissa 12, Algoritmit matematiikassa, perehdytään näihin menetelmiin. Seuraavassa esimerkissä opitaan, miten Bolzanon lauseella voidaan osoittaa, että yhtälöllä on olemassa ainakin yksi ratkaisu.

**ESIMERKKI 4**

Osoita, että yhtälöllä $x^3 - 2x + 4 = -x^2 - 4x$ on ainakin yksi ratkaisu.

**RATKAISU**

$$x^3 - 2x + 4 = -x^2 - 4x$$

Siirretään kaikki termit yhtälön vasemmalle puolelle.

$$x^3 + x^2 + 2x + 4 = 0$$

Yhtälön $x^3 + x^2 + 2x + 4 = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 4$ nollakohdat.

Funktio $f$ on polynomifunktio, ja siten kaikkialla jatkuva. Bolzanon lausetta voidaan soveltaa funktioon $f$, mikäli löydetään jokin väli, jonka päätepisteissä funktio $f$ saa erimerkkiset arvot.

Lasketaan funktion arvo kohdassa $0$.

$$f(0) = 4 > 0$$

**Huomaa!**
Voit joutua laskemaan useamman funktion arvon ennen kuin löydät erimerkkiset arvot. Ratkaisuun riittää kirjoittaa ne kohdat, joissa funktio saa erimerkkiset arvot.

Kokeilemalla havaitaan, että funktion arvo kohdassa $-2$ on negatiivinen.

$$f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 4 = -4 < 0$$

**Huomaa!**
Yhtälöllä voi olla useampikin ratkaisu välillä $]-2, 0[$ ja sillä voi olla ratkaisuja välin ulkopuolellakin.

Koska funktion $f$ arvot välin $[-2, 0]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla $f$ on ainakin yksi nollakohta välillä $]-2, 0[$. Siis yhtälöllä $x^3 - 2x + 4 = -x^2 - 4x$ on ainakin yksi ratkaisu välillä $]-2, 0[$.

On osoitettu, että yhtälöllä on ainakin yksi ratkaisu. □

## Harjoitustehtäviä

**Sarja I**

**133.** E1 Olkoon $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x+2}$, kun $x \neq -2$. Onko funktio $f$

a) jatkuva b) kaikkialla jatkuva?

**134.** Onko funktio $f$ jatkuva? Entä kaikkialla jatkuva?

a) $f(x)=5x^7-3x^2-\dfrac{x}{2}$

b) $f(x)=x^2-\dfrac{3}{x-1}$

**135.** E2 ▶ Alla on erään kaikkialla määritellyn funktion $f$ kuvaaja $y=f(x)$. Päättele kuvaajan perusteella, onko funktio $f$

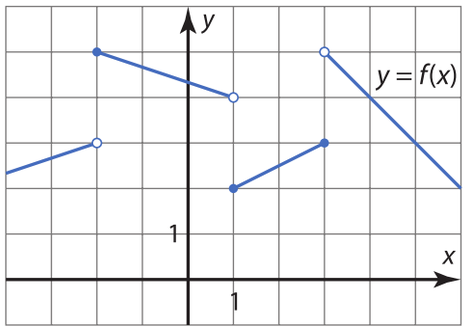
a) vasemmalta jatkuva kohdassa 1

b) oikealta jatkuva kohdassa 1

c) jatkuva välillä $[-2, 1]$

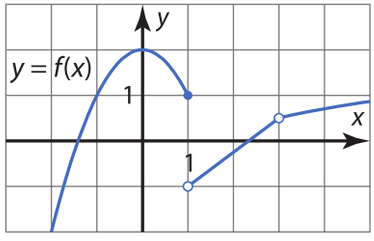
d) jatkuva välillä $[-2, 1[$

e) jatkuva välillä $[1, 3]$.




**136.** Alla on erään funktion $f$ kuvaaja $y=f(x)$. Päättele kuvaajan perusteella, onko funktio $f$ jatkuva välillä

a) $[-1, 1]$ b) $[0, 3]$ c) $]1, 3[$ d) $[2, 4]$.




**137.** E3 Tutki, onko funktiolla $f$ nollakohtia välillä $[2, 3]$. Voiko soveltaa Bolzanon lausetta?

a) $f(x)=x^3-3x^2+1$

b) $f(x)=x+\dfrac{x-6}{x-1}$

**138.** Tutki, onko funktiolla $g$ nollakohtia välillä $[1, 3]$. Voiko soveltaa Bolzanon lausetta?

a) $g(x)=\dfrac{2x-3}{x-4}$

b) $g(x)=\dfrac{5-x}{x^2-16}$

**139.** Laske funktion arvot $f(1)$ ja $f(2)$. Voidaanko Bolzanon lauseen perusteella sanoa, onko funktiolla $f$ nollakohtia välillä $]1, 2[$?

a) $f(x)=x^6-3x^4$

b) $f(x)=x^3-2x+3$

c) $f(x)=\dfrac{4x}{x^2-2}+3$

**140.** Osoita, että funktiolla $f(x)=x^3-\dfrac{x}{x^2+1}$ on ainakin yksi nollakohta välillä $]-2, 1[$.

**141.** E4 Osoita, että yhtälöllä on ainakin yksi ratkaisu.

a) $x^3+1=-\dfrac{3}{2}x^2$ b) $2x^4-x^3=1-x^2$

**142.** ▶ Osoita, että funktio $f(x)=x^4-5x^3+1$ saa arvon $-1$ ainakin kerran.

**143.** Osoita, että yhtälöllä $5x^4-3x=6x^3+1$ on ainakin kaksi ratkaisua.

## Sarja II

**144.** Olkoon $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-2}{2x^2-3x+1}$, kun $x \neq \frac{1}{2}$ ja $x \neq 1$. Onko funktio $f$

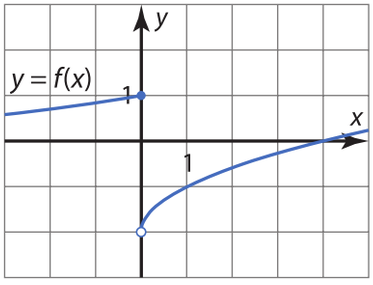
**a)** jatkuva **b)** kaikkialla jatkuva?

**145.** Olkoon $f(x)=\begin{cases} -1, & \text{kun } x<-1 \\ h(x), & \text{kun } -1 \le x \le 2 \\ 1, & \text{kun } x>2. \end{cases}$

Funktio $f$ on määritelty koko reaalilukujen joukossa. Anna esimerkki funktiosta $h$, kun $f$ on jatkuva. Piirrä kuvaaja.

**146.** Alla on erään funktion $f$ kuvaaja $y=f(x)$. Päättele kuvaajan perusteella, onko funktio $f$ jatkuva välillä

**a)** $[-2, 0]$ **b)** $[0, 3]$ **c)** $]0, 3]$.




**147.** Onko funktio jatkuva välillä $[-2, 3]$?

**a)** $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$

**b)** $g(x)=\dfrac{1}{x^2+2}-\dfrac{x^2}{x+3}$

**148.** Tutki, onko funktiolla nollakohtia välillä $[-2, 0]$.

**a)** $f(x)=\dfrac{3x^3+4x+1}{x^2-9}$

**b)** $g(x)=\dfrac{5x^3-2}{x^2-1}$

**149.** Tutki, onko funktiolla nollakohtia välillä $]0, 1[$.

**a)** $f(x)=10x^3-x^2-2$

**b)** $g(x)=x^2-\dfrac{x}{x-2}$

**150.** Osoita, että funktio $f(x)=2x^3-3x^2-1$ saa arvon $\pi$ ainakin kerran.

**151.** Funktion $f$ kiintopisteellä tarkoitetaan sitä muuttujan arvoa $x$, jolla funktion arvo on sama kuin muuttujan arvo eli $f(x)=x$.
Osoita, että funktiolla $f(x)=x^3-1$ on kiintopiste välillä $[1, 2]$.

**152.** Osoita, että funktiolla $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ on kiintopiste.

**153.** Osoita, että yhtälöllä $x^n=x+1$ on aina ratkaisu välillä $[1, 2]$, kun $n$ on ykköstä suurempi kokonaisluku.

**154.** Funktiot $f$ ja $g$ ovat jatkuvia välillä $[0,1]$. Tiedetään, että
$f(0) > 0$ ja $f(1) < 0$ sekä
$g(0) < 0$ ja $g(1) > 0$.
Osoita, että välillä $[0, 1]$ on ainakin yksi kohta $x$, jossa funktiot saavat saman arvon eli $f(x) = g(x)$.

**155.** Funktio $f$ on jatkuva välillä $[a, b]$. Osoita, että välillä $[a, b]$ on ainakin yksi kohta $x$, jossa funktion $f$ arvo on funktion arvojen $f(a)$ ja $f(b)$ keskiarvo $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

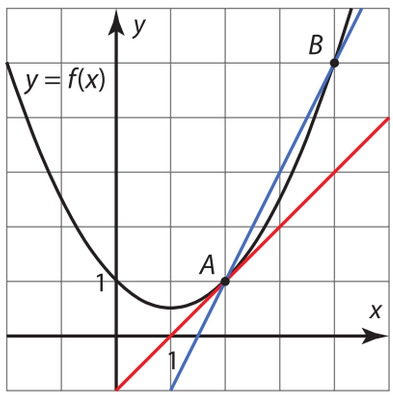
# 3 Derivaatta

*Kun jotain ilmiötä mallinnetaan matemaattisesti, ollaan usein kiinnostuneita siitä, millä nopeudella mallinnettavan ilmiön arvot muuttuvat eri tilanteissa, milloin ilmiön arvot kasvavat ja milloin vähenevät, milloin ne ovat suurimmillaan ja milloin pienimmillään. Nämä kaikki saadaan selville derivaatan avulla.*

## TUTKIMUS

Kuvassa on osa funktion
$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+1$ kuvaajasta.

Kuvaan on piirretty sinisellä pisteiden $A(2, f(2))$ ja $B(4, f(4))$ kautta kulkeva kuvaajan sekantti ja punaisella pisteen $A(2, f(2))$ kautta kulkeva kuvaajan tangentti.




1) Määritä pisteiden $A$ ja $B$ $y$-koordinaatit funktion $f$ lausekkeen avulla. Laske sekantin kulmakerroin.

2) Määritä kuvasta tangentin kulmakerroin.

3) Mitä kuvan sekantille tapahtuu, kun pistettä $B$ aletaan liu'uttaa paraabelia pitkin kohti pistettä $A$?

4) Korvaa piste $B$ mielivaltaisella paraabelin pisteellä $(x, f(x))$ ja muodosta pisteiden $(x, f(x))$ ja $A$ kautta kulkevan sekantin kulmakertoimen lauseke.

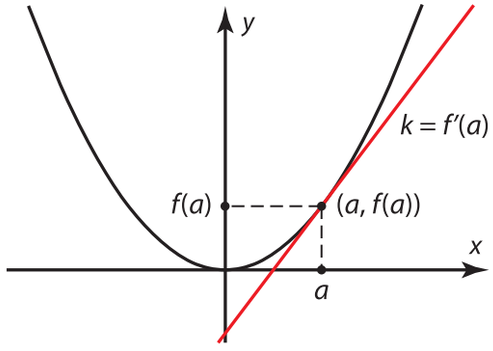
5) Laske kulmakertoimen raja-arvo, kun $x$ lähestyy lukua 2.

6) Minkä kuvaan liittyvän suureen raja-arvo ilmaisee?

## Derivaatta

Funktion $f$ kuvaajan jyrkkyyden kohdassa $a$ ilmaisee kuvaajalle tähän kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin. Kohtaan $x = a$ piirretyn tangentin kulmakerrointa kutsutaan *funktion derivaataksi kohdassa* $a$ ja tätä derivaatan arvoa merkitään $f'(a)$.

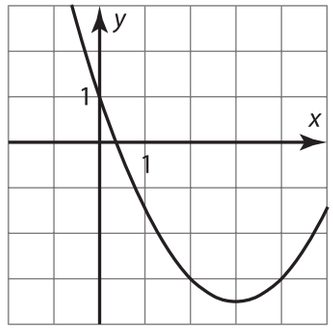
**Kuvaajan tangentti**
Funktion kuvaajalle kohtaan $a$ piirretty *tangentti* on suora, joka sivuaa kuvaajaa pisteessä $(a, f(a))$. Sivuamispisteessä tangentti ja kuvaaja ovat yhdensuuntaiset.




Seuraavassa esimerkissä näytetään, kuinka derivaatan arvo voidaan arvioida funktion kuvaajan avulla.

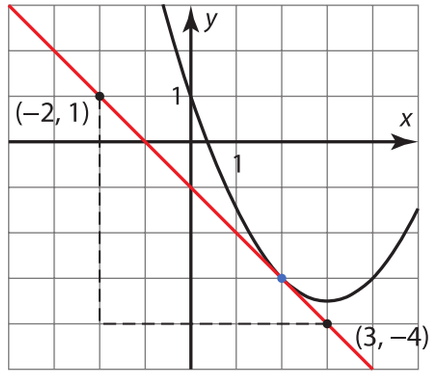
### ESIMERKKI 1

Kuvassa on erään funktion $f$ kuvaaja $y = f(x)$. Määritä kuvaajan avulla funktion $f$ derivaatta kohdassa 2.




#### RATKAISU

Funktion $f$ derivaatta kohdassa 2 on funktion kuvaajalle kohtaan $x = 2$ piirretyn tangentin kulmakerroin. Hahmotellaan tangentti, valitaan tangentilta kaksi pistettä ja lasketaan niiden avulla tangentin kulmakerroin.




**Kulmakertoimen lauseke**
Pisteiden $(x_1, y_1)$ ja $(x_2, y_2)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

$$k = \frac{-4-1}{3-(-2)} = \frac{-5}{5} = -1$$

Funktion $f$ derivaatta kohdassa 2 on $-1$.

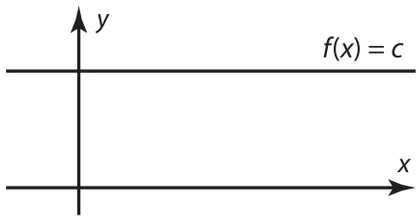
#### VASTAUS

$f'(2) = -1$

## Derivaatan määritelmä

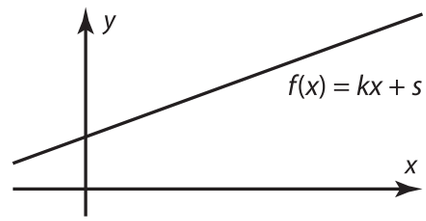
Kuvaajalle piirretty tangentti on sivuamispisteessä yhdensuuntainen kuvaajan kanssa. Vakiofunktion ja ensimmäisen asteen polynomifunktion kuvaajat ovat suoria, joten kuvaajalle mihin tahansa pisteeseen piirretty tangentti yhtyy suoran kanssa.

**Vakiofunktio**




- kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin on $0$
- tangentti on suora, jonka kulmakerroin on $0$
- derivaatta kohdassa $a$ on $0$, $f'(a) = 0$.

**Ensimmäisen asteen polynomifunktio**



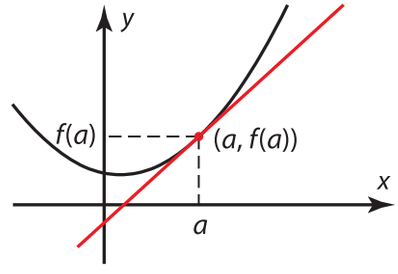

- kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin on $k$
- tangentti on suora, jonka kulmakerroin on $k$
- derivaatta kohdassa $a$ on $k$, $f'(a) = k$.

**Huomaa!**
Derivaatta on tangentin kulmakerroin.

**Huomaa!**
Funktion $f(x) = x$ derivaatta kohdassa $a$ on 1: $f'(a) = 1$.

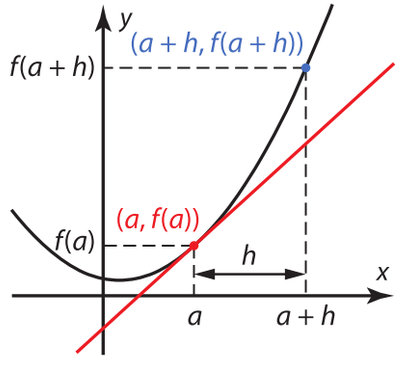
Havainnot osoitetaan oikeiksi tehtävässä 173.

Kun funktion kuvaaja ei ole suora, tangentin kulmakertoimen tarkka arvo ei selviä yhtä helposti. Tutkitaan tarkemmin funktion $f$ kuvaajalle kohtaan $x = a$ piirrettyä tangenttia.




Suoran kulmakertoimen määrittämiseksi tarvitaan kaksi pistettä. Tangentilta on kuitenkin tiedossa vain piste $(a, f(a))$, jossa tangentti sivuaa kuvaajaa.

Valitaan toiseksi pisteeksi funktion $f$ kuvaajalta piste, joka on lähellä sivuamispistettä. Merkitään kirjaimella $h$ (pientä) poikkeamaa kohdasta $a$ ja valitaan apupiste niin, että sen $x$-koordinaatti on $a + h$, jolloin $y$-koordinaatti on $f(a + h)$.

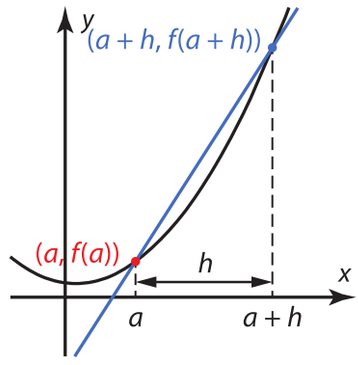



**Huomaa!**
Apupiste valitaan funktion kuvaajalta, koska tällöin sen $y$-koordinaatti voidaan laskea funktion lausekkeesta.

**Kuvaajan sekantti**

Kuvaajan *sekantti* on suora, joka kulkee kuvaajan kahden pisteen kautta.

Piirretään kuvaajalle sekantti pisteiden $(a, f(a))$ ja $(a+h, f(a+h))$ kautta.

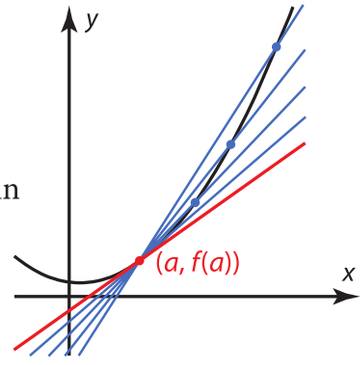



Sekantin kulmakerroin on

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Lauseketta kutsutaan funktion $f$ *erotusosamääräksi kohdassa* $a$.

Kun poikkeama $h$ lähestyy nollaa, niin apupiste $(a+h, f(a+h))$ liukuu kuvaajaa pitkin kohti pistettä $(a, f(a))$. Samalla sekantti kiertyy kuvaajan tangentiksi pisteeseen $(a, f(a))$. Sekantin kulmakerroin $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lähestyy kohtaan $x = a$ piirretyn tangentin kulmakerrointa.




Funktion $f$ kuvaajalle kohtaan $x = a$ piirretyn tangentin kulmakerroin eli funktion $f$ derivaatta kohdassa $a$ on siis erotusosamäärän raja-arvo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

**Derivaatta** Määritelmä

Funktion $f$ derivaatta kohdassa $a$ on

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

mikäli tämä raja-arvo on olemassa.

Derivaattaan liittyy myös seuraavat käsitteet:

- Mikäli funktion $f$ derivaatta kohdassa $a$ on olemassa, sanotaan, että funktio $f$ on *derivoituva kohdassa* $a$.
- Funktio $f$ on *derivoituva joukossa* $A$, jos se on derivoituva jokaisessa kohdassa $a \in A$.
- Funktio $f$ on *kaikkialla derivoituva*, jos se on derivoituva koko reaalilukujen joukossa $\mathbf{R}$.
- Funktio $f$ on *derivoituva*, jos se on derivoituva koko määrittelyjoukossaan.

## ESIMERKKI 2

**a)** Muodosta ja sievennä funktion $f(x) = 4x^2 - 5x$ erotusosamäärä kohdassa $3$.

**b)** Määritä funktion $f(x) = 4x^2 - 5x$ derivaatta kohdassa $3$.

### RATKAISU

**a)** Funktion $f(x) = 4x^2 - 5x$ erotusosamäärä kohdassa $3$ on

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad a = 3$$

$$= \frac{f(3+h)-f(3)}{h} \qquad f(x) = 4x^2 - 5x$$

$$= \frac{\big(4(3+h)^2 - 5(3+h)\big) - (4\cdot 3^2 - 5\cdot 3)}{h} \qquad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$= \frac{\big(4(9+6h+h^2) - 5(3+h)\big) - (36-15)}{h}$$

$$= \frac{36+24h+4h^2-15-5h-21}{h}$$

$$= \frac{4h^2+19h}{h} \qquad \text{Erotetaan yhteinen tekijä.}$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{h}}(4h+19)}{\underset{1}{\cancel{h}}} \qquad \text{Supistetaan.}$$

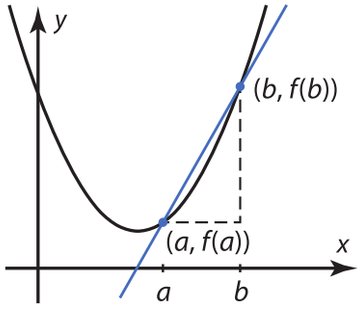
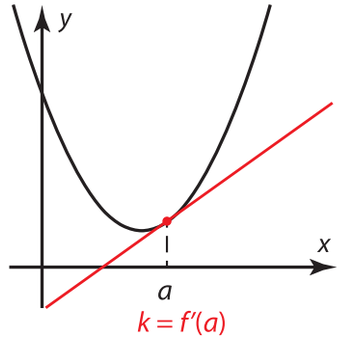
$= 4h + 19$, kun $h \neq 0$.

**b)** Funktion $f$ derivaatta kohdassa $3$ on erotusosamäärän raja-arvo, kun $h$ lähestyy lukua $0$.

$$f'(3) = \lim_{h \to 0}(4h+19) = 4\cdot 0 + 19 = 19$$

### VASTAUS

**a)** $4h + 19$, kun $h \neq 0$ **b)** $f'(3) = 19$

| Keskimääräinen muutosnopeus | Hetkellinen muutosnopeus |
|---|---|
| Funktion $f$ arvojen *keskimääräinen muutosnopeus* välillä $[a, b]$ on pisteiden $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$ kautta kulkevan sekantin kulmakerroin. | Funktion $f$ arvojen *hetkellinen muutosnopeus* kohdassa $a$ on kuvaajalle pisteeseen $(a, f(a))$ asetetun tangentin kulmakerroin. |
|  $k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ |  $k = f'(a)$ |

## Derivaattafunktio

Funktion derivaattojen laskeminen yhdessä kohdassa kerrallaan on työlästä. Derivaatan arvoja on nopeampi laskea, kun ensin määritetään funktion *derivaattafunktio*.

**Derivaattafunktio** Määritelmä

Funktion $f$ *derivaattafunktio* $f'$ on funktio, jonka arvo $f'(x)$ on funktion $f$ derivaatta kohdassa $x$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Derivaattafunktio $f'$ on määritelty kohdissa, joissa funktio $f$ on derivoituva.

**Huomaa!**
Derivaattafunktion määrittelyjoukko voi olla funktion määrittelyjoukkoa pienempi mutta ei suurempi.

Derivaattafunktion määrittämistä kutsutaan *derivoinniksi*.

Derivaattafunktiokin voi olla joskus tarpeen derivoida. Derivaattafunktion $f'$ derivaatan eli funktion $f$ *toisen derivaatan* merkintä on $f''$. Vastaavasti funktion $f$ *kolmannen derivaatan* merkintä on $f'''$. Funktion $f$ neljännen derivaatan merkintä on $f^{(4)}$, viidennen derivaatan merkintä $f^{(5)}$ jne.

## ESIMERKKI 3

**a)** Määritä funktion $f(x) = x^2$ derivaattafunktio.

**b)** Määritä derivaatat $f'(-2)$ ja $f'(3)$.

**c)** Määritä funktion $f$ kuvaajalle kohtaan $x = \frac{5}{4}$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

### RATKAISU

**a)** Määritetään derivaattafunktio $f'$ laskemalla funktion $f(x) = x^2$ erotusosamäärän raja-arvo kohdassa $x$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$f(x + h) = (x + h)^2$ ja $f(x) = x^2$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\overset{1}{\cancel{h}}(2x+h)}{\underset{1}{\cancel{h}}}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x + 0 = 2x$$

**b)** Kysytyt derivaatat voidaan nyt laskea suoraan derivaattafunktion arvoina.

Kun $x = -2$, saadaan $f'(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$.

Kun $x = 3$, saadaan $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$.

**c)** Kohtaan $x = \frac{5}{4}$ piirretyn tangentin kulmakerroin $k$ on derivaatta kohdassa $\frac{5}{4}$.

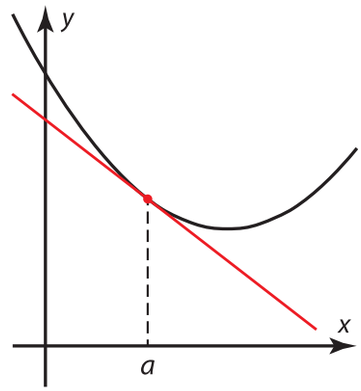
$$k = f'\left(\frac{5}{4}\right) = 2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$$

### VASTAUS

**a)** $f'(x) = 2x$ **b)** $f'(-2) = -4$ ja $f'(3) = 6$ **c)** $\frac{5}{2}$

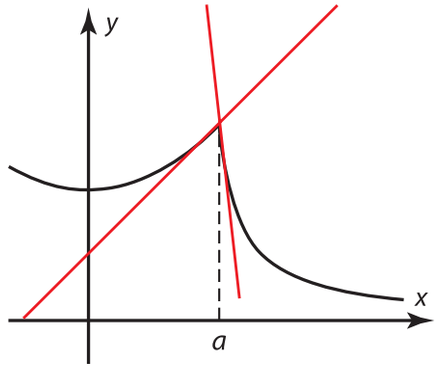
## Funktion derivoituvuus kohdassa $a$ (Syventävää tietoa)

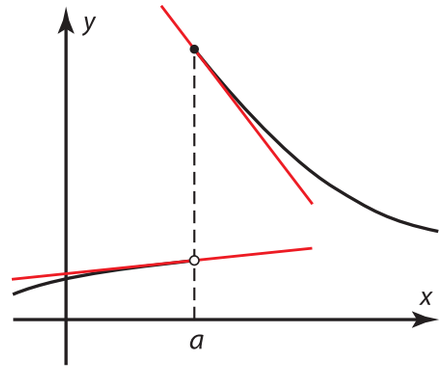
Funktion derivaatta $f'(a)$ ilmaisee funktion kuvaajalle pisteeseen $(a, f(a))$ piirretyn tangentin kulmakertoimen.




Derivaatan olemassaolo kohdassa $a$ edellyttää siis, että kuvaajalle voidaan piirtää kohtaan $x = a$ yksikäsitteisellä tavalla tangentti, joka ei ole pystysuora. Kuvan funktio on derivoituva kohdassa $a$.

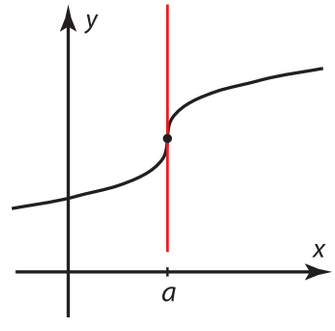
Tangentin piirtäminen yksikäsitteisellä tavalla ei onnistu esimerkiksi silloin, kun funktion kuvaajassa on kohdassa $x = a$ terävä kärki tai funktio on epäjatkuva kohdassa $a$. Kuvien funktiot eivät ole derivoituvia kohdassa $a$.




Koska kohtaan, jossa funktio on epäjatkuva, ei voi piirtää yksikäsitteistä tangenttia, funktion derivoituvuus kohdassa $a$ takaa myös funktion jatkuvuuden kohdassa $a$ (tähän perehdytään tarkemmin kurssissa 13).

Mikäli kohtaan $x = a$ piirretty tangentti on pystysuora, ei sillä ole kulmakerrointa. Kuvan funktio ei ole derivoituva kohdassa $a$.



## Erotusosamäärän vaihtoehtoinen muotoilu

**(Syventävää tietoa)**

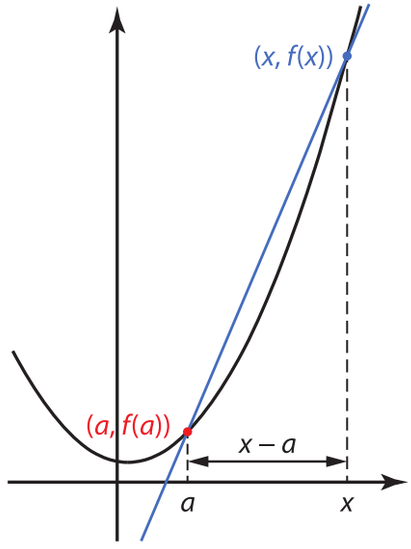
Erotusosamäärää muodostettaessa funktion kuvaajalta valitaan pisteen $(a, f(a))$ läheltä apupiste $(a+h, f(a+h))$. Jos tätä apupistettä merkitään lyhyesti $(x, f(x))$, saadaan erotusosamäärälle $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ja edelleen derivaatan määritelmälle vaihtoehtoinen muotoilu.

Kun merkitään $a+h=x$, niin $h=x-a$.

Tällöin erotusosamäärän lauseke voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Myös lauseketta $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ kutsutaan funktion $f$ erotusosamääräksi kohdassa $a$ ja se ilmaisee kuvaajan pisteiden $(a, f(a))$ ja $(x, f(x))$ kautta kulkevan sekantin kulmakertoimen.




Kun $x$ lähestyy kohtaa $a$, piste $(x, f(x))$ liukuu kuvaajaa pitkin kohti pistettä $(a, f(a))$. Samalla erotusosamäärän arvo lähestyy kuvaajalle kohtaan $a$ piirretyn tangentin kulmakerrointa eli derivaattaa $f'(a)$.

Funktion $f$ derivaatta kohdassa $a$ voidaan siis määritellä myös muodossa

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Annetut derivaatan määritelmät ovat keskenään samanveroisia ja valinnan käytettävän määritelmän välillä saa tehdä laskiessaan vapaasti.

## ESIMERKKI 4 Syventävä

Määritä funktion $f(x)=\frac{1}{x^2}$, kun $x \neq 0$, derivaatta kohdassa $2$ käyttäen derivaatan määritelmää $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

### RATKAISU

Muodostetaan ja sievennetään ensin erotusosamäärä kohdassa $2$.

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2^2}}{x-2}$$

$$=(\overset{4)}{\frac{1}{x^2}}-\overset{x^2)}{\frac{1}{4}}):(x-2)$$

$$=(\frac{4}{4x^2}-\frac{x^2}{4x^2})\cdot\frac{1}{x-2}$$

$$=\frac{4-x^2}{4x^2}\cdot\frac{1}{x-2}$$

$$=\frac{-(x^2-4)}{4x^2}\cdot\frac{1}{x-2}$$

$$=\frac{-(x+2)\cancel{(x-2)}}{4x^2}\cdot\frac{1}{\cancel{x-2}}$$

$$=-\frac{x+2}{4x^2}, \text{ kun } x\neq 0$$

Funktion $f$ derivaatta kohdassa $2$ on erotusosamäärän raja-arvo, kun $x$ lähestyy lukua $2$.

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}(-\frac{x+2}{4x^2})=-\frac{2+2}{4\cdot 2^2}=-\frac{1}{4}.$$

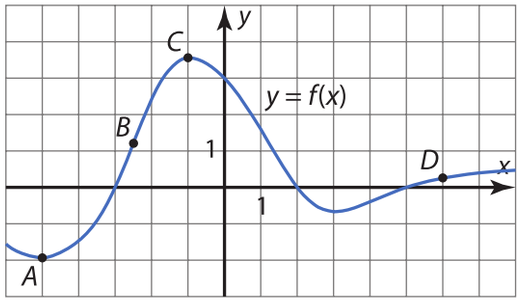
### VASTAUS

$f'(2)=-\frac{1}{4}$

## Harjoitustehtäviä

**Sarja I**

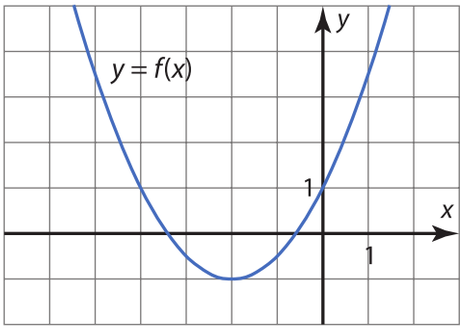
**156.** Alla on erään funktion $f$ kuvaaja $y = f(x)$.




Valitse kuvaajalle merkityistä pisteistä väittämään sopivat.

1) Funktion arvo on suurin.
2) Funktion arvo on pienin.
3) Derivaatta on suurin.
4) Derivaatta on nolla.

**157.** E1 Alla on erään funktion $f$ kuvaaja $y = f(x)$. Määritä kuvaajan avulla funktion $f$ derivaatta kohdassa **a)** 0 **b)** $-3$.




**158.** Piirrä funktion $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-1}$ kuvaaja. Määritä piirtämällä derivaatta kohdassa **a)** 0 **b)** 2.

**159.** E2 **a)** Muodosta ja sievennä funktion $f(x) = 4x^2$ erotusosamäärä kohdassa 3.
**b)** Määritä funktion derivaatta kohdassa 3.

**160.** **a)** Muodosta ja sievennä funktion $f(x) = 3x^2 + 2x$ erotusosamäärä kohdassa 2.
**b)** Määritä $f'(2)$.

**161.** Määritä erotusosamäärän avulla funktion $f(x) = \dfrac{3}{x}$ derivaatta kohdassa $-1$.

**162.** E3 **a)** Määritä funktion $f(x) = 4x^2 + 3$ derivaattafunktio.
**b)** Määritä $f'(-10)$ ja $f'(1)$.

**163.** **a)** Määritä funktion $f(x) = \dfrac{1}{x}$ derivaattafunktio.
**b)** Määritä funktion $f$ kuvaajalle kohtaan $x = -3$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

**164.** Eräänä syksyisenä päivänä Karttulassa lämpötila celsiusasteina noudatti likimain funktiota $f(x) = -0{,}25x^2 + 8x - 45$, kun $12 \le x \le 24$. Muuttuja $x$ on aika tunteina vuorokauden alusta.

**a)** Mikä oli lämpötilan keskimääräinen muutosnopeus kellonaikojen 18.00 ja 22.00 välillä?

**b)** Mikä oli lämpötilan hetkellinen muutosnopeus klo 15.00?

**165.** Missä kohdissa funktion $f(x) = 2x^2 - 1$ kuvaajalle

**a)** piirretyn tangentin kulmakerroin on 10

**b)** piirretty tangentti on vaakasuora?

**166.** **a)** Määritä funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x$ derivaattafunktio $f'$.

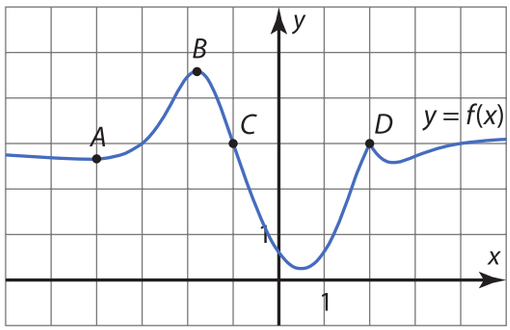
**b)** Piirrä samaan koordinaatistoon funktioiden $f$ ja $f'$ kuvaajat.

**c)** Mitä funktion $f$ kuvaajalle tapahtuu kohdassa, jossa $f'(x) = 0$?

**d)** Mitä voit sanoa funktion kuvaajasta kohdissa, joissa derivaattafunktion $f'$ arvot ovat negatiivisia?

## Sarja II

**167.** Alla on erään funktion $f$ kuvaaja $y = f(x)$.




Valitse kuvaajalle merkityistä pisteistä väittämään sopivat.

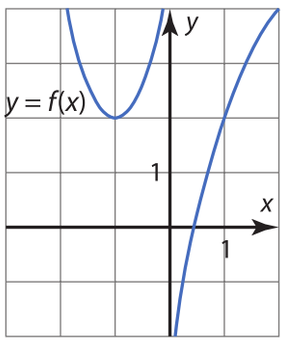
**1)** Funktion arvo on suurin.

**2)** Derivaatan arvo on pienin.

**3)** Derivaattaa ei ole olemassa.

**4)** Derivaatta on nolla.

**168.** Alla on erään funktion $f$ kuvaaja $y = f(x)$. Määritä kuvaajan avulla funktion $f$ derivaatta kohdassa **a)** $-1$ **b)** 1.




**169.** **a)** Muodosta ja sievennä funktion $f(x) = 3x^3 + 2$ erotusosamäärä kohdassa $-2$.

**b)** Määritä funktion derivaatta kohdassa $-2$.

**170.** **a)** Muodosta ja sievennä funktion $g(x)=\dfrac{2}{x^2-2}$ erotusosamäärä kohdassa $4$.

**b)** Määritä funktion derivaatta kohdassa $4$.

**171.** Määritä $f'(-2)$, kun

**a)** $f(x)=6x^2+x-5$

**b)** $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

**172.** Maapallon väkimäärää (miljoonaa ihmistä) vuosien 1800 ja 1950 välisenä aikana kuvaa likimain funktio $f(x)=\dfrac{1}{15}x^2-240x+217\,000$, kun muuttuja $x$ on vuosiluku.

**a)** Mikä oli väkiluvun keskimääräinen kasvunopeus vuosien 1840 ja 1940 välisenä aikana?

**b)** Mikä oli väkiluvun hetkellinen kasvunopeus vuoden 1920 alussa?

**173.** Osoita erotusosamäärää käyttäen oikeiksi seuraavat väittämät.

**a)** Vakiofunktion $f(x)=c$ derivaattafunktio on $f'(x)=0$.

**b)** Ensimmäisen asteen polynomifunktion $f(x)=kx+s$ derivaattafunktio on $f'(x)=k$.

**174.** Piirrä funktion kuvaaja ja selvitä kuvaajan avulla, onko funktio jatkuva ja derivoituva kohdassa $3$.

**a)** $f(x)=\begin{cases}-x+2, & \text{kun } x\le 3\\ x^2-10, & \text{kun } x>3\end{cases}$

**b)** $g(x)=\begin{cases}x+3, & \text{kun } x<3\\ -x^2+7x-6, & \text{kun } x\ge 3\end{cases}$

**c)** $h(x)=\begin{cases}x^2-4x+2, & \text{kun } x<3\\ 2x-4, & \text{kun } x\ge 3\end{cases}$

**175.** E4 Määritä funktion $f(x)=\dfrac{x}{x-4}$, kun $x\neq 4$, derivaatta kohdassa $3$ käyttäen derivaatan määritelmää

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

**176.** Määritä funktion $f(x)=2x^2+5x-1$

**a)** derivaatta kohdassa $-3$

**b)** derivaattafunktio

käyttämällä derivaatan määritelmää

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

**177.** **a)** Piirrä funktion $f(x)=|x|$ kuvaaja ja päättele, onko funktio derivoituva kohdassa $x=0$.

**b)** Varmista a-kohdan tulos laskemalla erotusosamäärän toispuoliset raja-arvot kohdassa $0$.

**178.** **a)** Funktio $g$ on jatkuva kohdassa $0$. Määritä funktion $f(x)=xg(x)$ derivaatta kohdassa $0$.

**b)** Laske tuloksen avulla $f'(0)$, kun $g(x)=|x|+1$.

# 4 Polynomifunktion derivaatta

*Tässä luvussa opitaan tutkimaan polynomifunktion kulkua derivaatan avulla sekä määrittämään polynomifunktion suurin ja pienin arvo. Näitä taitoja voidaan käyttää esimerkiksi tutkittaessa liikkeen nopeutta ja kiihtyvyyttä.*

## Johdanto

Sana analyysi tulee kreikan sanasta *analysis*, erittely.

Matemaattisella analyysillä tarkoitetaan raja-arvoihin perustuvaa matematiikkaa, ja kenties tärkein analyysin osa-alue on differentiaali- ja integraalilaskenta. Derivaatan määrittäminen on osa differentiaalilaskentaa.

1600-luvun suuri tieteellinen ongelma oli planeettojen liike auringon ympäri. Miten se tapahtuu ja mikä sen aiheuttaa? Ongelman ratkaisuun ei ollut olemassa tarvittavaa matematiikkaa, joten se oli kehitettävä. 1600-luvun alkupuolella tehtiin ensimmäiset muuttujan $x$ mielivaltaisen pieniin muutoksiin perustuvat tangentin määritykset ja 1600-luvun lopulla differentiaalilaskennan kehitys sai voimakkaan sysäyksen. Derivaatan keksijöinä pidetään yleisesti englantilaista Isaac Newtonia (1642–1727) ja saksalaista Gottfried Wilhelm Leibnizia (1646–1716), jotka kehittivät aikaisemmin yksittäisiin tilanteisiin sovelletuista keinoista yhtenäisen laskennallisen metodin.

Nykykäsityksen mukaan he kehittivät teoriansa kumpikin tahoillaan itsenäisesti. Nykyisiä differentiaalilaskennan perusteita enemmän muistuttavan päättelyn esitti Newton, mutta Leibnizin näkemysten uskottavuus ja varsinkin hänen käyttämien merkintöjen tehokkuus, johtivat siihen, että differentiaalilaskennan kehitys eteni Leibnizin osoittamaan suuntaan.

# 4.1 Potenssin ja tulon derivaatta

**TUTKIMUS**

**1)** Määritä laskimella funktion $f$ derivaattafunktio.

**a)** $f(x) = x^4$ **b)** $f(x) = x^5$ **c)** $f(x) = x^6$

**2)** Päättele ilman laskinta funktion $f$ derivaattafunktio. Tarkista laskimella.

**a)** $f(x) = x^8$ **b)** $f(x) = x^{11}$ **c)** $f(x) = x^n$, missä $n = 2, 3, 4, \ldots$

**3)** Määritä laskimella funktion $f$ derivaattafunktio.

**a)** $f(x) = 2x^4$ **b)** $f(x) = x^5 + x^3$

**4)** Päättele ilman laskinta funktion $f(x) = 3x^4 + x^2$ derivaattafunktio. Tarkista laskimella.

**Derivaattafunktio laskimella**

Derivaattafunktio voidaan määrittää laskimella syöttämällä derivoitava funktio ja muuttujakirjain. Selvitä laskimestasi, millä komennolla derivaatta lasketaan.

Funktion $x^2$ derivaattafunktion laskentakomento voi olla esimerkiksi

$\frac{d}{dx}(x^2)$ tai `Derivaatta[x^2, x]`.

## Potenssin derivaatta

Luvussa 3 määritettiin funktion $f(x) = x^2$ derivaattafunktio $f'(x) = 2x$ (esimerkki 3).

Määritetään nyt funktion $g(x) = x^3$ derivaattafunktio.

$$g'(x) = \lim \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \qquad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \qquad \text{Erotetaan yhteinen tekijä } h.$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2)$$

$$= 3x^2$$

Siis funktion $g(x) = x^3$ derivaattafunktio on $g'(x) = 3x^2$.

Funktion $f(x)$ derivaatta voidaan merkitä myös $\mathrm{D}f(x)$ tai $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$:

$\mathrm{D}\, x^2 = 2x$ $\qquad$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^2 = 2x$

$\mathrm{D}\, x^3 = 3x^2$ $\qquad$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^3 = 3x^2$.

Nämä merkinnät ovat peräisin Leibnizilta. Newton käytti omia merkintöjään, jotka säilyivät käytössä pitkään Englannissa isänmaallisista syistä. Englantilaiset kieltäytyivät käyttämästä Leibnizin merkintöjä väittäen hänen kopioineen ideansa Newtonilta.

Huomataan, että kun potenssifunktiot $x^2$ ja $x^3$ derivoidaan, pienenee eksponentti yhdellä ja alkuperäisestä eksponentista tulee potenssin kerroin. Havainto voidaan yleistää seuraavaksi lauseeksi.

**Lause**

**Potenssifunktion derivaatta**

Olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku. Kun potenssifunktio $x^n$ derivoidaan pienenee eksponentti yhdellä ja alkuperäisestä eksponentista tulee potenssin kerroin.

$$\mathrm{D}\, x^n = nx^{n-1}$$

Lauseen todistus on harjoitustehtävänä 202.

**Vakiolla kerrotun funktion derivaatta** Lause

Olkoon $k$ reaaliluku ja $f$ derivoituva funktio. Tällöin

$$\mathrm{D}(k \cdot f(x)) = k \cdot f'(x)$$

Lauseen todistus on harjoitustehtävänä 201.

Derivaattafunktion määrittäminen erotusosamäärän raja-arvona (derivaatan määritelmä) on usein työlästä. Derivaattafunktio määritetäänkin yleensä käyttäen erotusosamäärän avulla johdettuja derivointisääntöjä, joita mm. edellä esitetyt lauseet ovat. Seuraavassa esimerkissä käytetään näitä derivointisääntöjä.

## ESIMERKKI 1

Derivoi funktio.

**a)** $x^{15}$ **b)** $-\dfrac{2x^6}{3}$

### RATKAISU

**a)** $\mathrm{D}\, x^{15}$ $\qquad \mathrm{D}\, x^n = nx^{n-1}$

$= 15x^{15-1}$

$= 15x^{14}$

**b)** $\mathrm{D}\left(-\dfrac{2x^6}{3}\right) = \mathrm{D}\left(-\dfrac{2}{3}x^6\right)$ $\qquad \mathrm{D}(k \cdot f(x)) = k \cdot f'(x)$

$= -\dfrac{2}{3}\mathrm{D}x^6$

$= -\dfrac{2}{3} \cdot 6x^5$

$= -4x^5$

### VASTAUS

**a)** $\mathrm{D}\, x^{15} = 15x^{14}$ **b)** $\mathrm{D}\left(-\dfrac{2x^6}{3}\right) = -4x^5$

## Polynomifunktion derivaatta

**Funktioiden summan derivaatta** — Lause

Olkoot $f$ ja $g$ derivoituvia funktiota. Tällöin

$$\mathrm{D}(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x).$$

TODISTUS

Oletetaan, että funktiot $f$ ja $g$ ovat derivoituvia kohdassa $x$.

**Summafunktio**
Funktioiden $f$ ja $g$ summafunktio $s$ on funktio, jonka arvo kohdassa $x$ on funktioiden $f$ ja $g$ arvojen summa:

$s(x) = f(x) + g(x)$.

Määritetään summafunktion $s(x) = f(x) + g(x)$ derivaattafunktio derivaatan määritelmän avulla.

$$\begin{aligned}
s'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{s(x+h)-s(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) \\
&= \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{f'(x)} + \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{g'(x)}
\end{aligned}$$

On siis osoitettu, että $\mathrm{D}(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x)$. □

Luvussa 3 (tehtävä 173) johdettiin vakiofunktion $f(x) = c$ derivaattafunktio $f'(x) = 0$. Lisäksi johdettiin ensimmäisen asteen polynomifunktion $f(x) = kx + s$ derivaattafunktio $f'(x) = k$, josta seuraa, että identtisen funktion $f(x) = x$ derivaattafunktio on $f'(x) = 1$.

**Vakiofunktion ja identtisen funktion derivaatta** — Lause

$$\mathrm{D}\,c = 0, \text{ kun } c \text{ on vakio}$$

$$\mathrm{D}\,x = 1$$

Polynomifunktio derivoidaan kaikkia edellä esitettyjä lauseita soveltaen.

**ESIMERKKI 2**

Määritä funktion derivaatta kohdassa $2$.

**a)** $h(x) = 4x^3 - 3x^2 + x + 5$ **b)** $p(x) = (2x^3 + 3)(2 - x^2)$

**RATKAISU**

**a)** Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \mathrm{D}(4x^3 - 3x^2 + x + 5) \\ &= \mathrm{D}\,4x^3 + \mathrm{D}(-3x^2) + \mathrm{D}\,x + \mathrm{D}\,5 \\ &= 4 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x + 1 + 0 \\ &= 12x^2 - 6x + 1 \end{aligned}$$

Derivoidaan polynomifunktion jokainen termi.

Lasketaan derivaattafunktion $h'(x)$ arvo kohdassa $x = 2$.

$$h'(2) = 12 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 1 = 48 - 12 - 1 = 37$$

**b)** Sievennetään lauseke ensin polynomiksi.

$$\begin{aligned} p(x) &= (2x^3 + 3)(2 - x^2) \\ &= 2x^3 \cdot 2 + 2x^3 \cdot (-x^2) + 3 \cdot 2 + 3 \cdot (-x^2) \\ &= 4x^3 - 2x^5 + 6 - 3x^2 \\ &= -2x^5 + 4x^3 - 3x^2 + 6 \end{aligned}$$

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} p'(x) &= -2 \cdot 5x^4 + 4 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x + 0 \\ &= -10x^4 + 12x^2 - 6x \end{aligned}$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa $2$.

$$p'(2) = -10 \cdot 2^4 + 12 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 = -160 + 48 - 12 = -124$$

**VASTAUS**

**a)** $h'(2) = 37$ **b)** $p'(2) = -124$

## ESIMERKKI 3

Millä muuttujan $t$ arvoilla funktion $f(t)=\frac{2}{3}t^3-2t^2-6t+15$ arvojen hetkellinen muutosnopeus on nolla?

### RATKAISU

Funktion arvojen hetkellinen muutosnopeus kohdassa $t$ on kuvaajalle tähän kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin. Kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakertoimen ilmaisee derivaatta. Pitää selvittää kohdat, joissa derivaatta on nolla, eli derivaattafunktion nollakohdat.

**Huomaa!**
Funktion $f$ derivointi voidaan merkitä myös $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{2}{3}t^3-2t^2-6t+15)$.

Derivoidaan.

$$f'(t)=\frac{2}{3}\cdot 3t^2-2\cdot 2t-6\cdot 1+0$$
$$=2t^2-4t-6$$

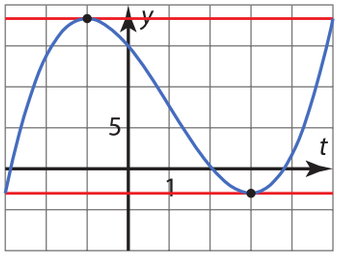
Määritetään derivaattafunktion nollakohdat.

$$f'(t)=0$$
$$2t^2-4t-6=0 \quad \vert :2$$
$$t^2-2t-3=0 \qquad a=1,\ b=-2 \text{ ja } c=-3$$

$$t=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}$$

$$t=\frac{2+4}{2}=\frac{6}{2}=3 \quad \text{tai} \quad t=\frac{2-4}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

**Graafinen tarkistus**
Kohdissa $t=-1$ ja $t=3$ funktion $f$ arvojen hetkellinen muutosnopeus on nolla, eli kuvaajalle piirretty tangentti on vaakasuora.




Funktion $f$ arvojen hetkellinen muutosnopeus on nolla, kun $t=-1$ tai $t=3$.

### VASTAUS

$t=-1$ tai $t=3$

## Tulon derivaatta

Esimerkin 2 b-kohdassa laskettiin funktioiden tulon $(2x^3 + 3)(2 - x^2)$ derivaatta sieventämällä lauseke ensin polynomiksi. Derivaatta voidaan laskea myös tulon derivointisäännöllä.

**Funktioiden tulon derivaatta** — Lause

Olkoot $f$ ja $g$ derivoituvia funktiota. Tällöin

$$\mathrm{D}\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

**Tulofunktio**

Funktioiden $f$ ja $g$ tulofunktio $p$ on funktio, jonka arvo kohdassa $x$ on funktioiden $f$ ja $g$ arvojen tulo:

$p(x) = f(x)g(x)$.

TODISTUS

Olkoot $f$ ja $g$ derivoituvia funktioita. Määritetään tulofunktion $p(x) = f(x)g(x)$ derivaattafunktio derivaatan määritelmän avulla.

$$p'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Lausekkeen arvo ei muutu, kun siihen lisätään ja siitä vähennetään sama termi.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\big(f(x+h) - f(x)\big)g(x+h) + f(x)\big(g(x+h) - g(x)\big)}{h}$$

Erotetaan yhteinen tekijä kahdesta ensimmäisestä ja kahdesta viimeisestä termistä.

$$= \lim_{h \to 0} \left( \frac{\big(f(x+h) - f(x)\big)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)\big(g(x+h) - g(x)\big)}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} g(x+h) + \lim_{h \to 0} f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x)g(x+0) + f(x)g'(x)$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

On siis osoitettu, että $\mathrm{D}\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. □

## ESIMERKKI 4

Derivoi funktio $p(x) = (2x^3 + 3)(2 - x^2)$ tulon derivointisäännöllä.

### RATKAISU

Derivoidaan.

$p'(x) = \mathrm{D}\big((2x^3 + 3)(2 - x^2)\big)$ $\qquad \mathrm{D}(f \cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g'$

$= \mathrm{D}(2x^3 + 3) \cdot (2 - x^2) + (2x^3 + 3) \cdot \mathrm{D}(2 - x^2)$

$= 6x^2 \cdot (2 - x^2) + (2x^3 + 3) \cdot (-2x)$

$= 6x^2(2 - x^2) - 2x(2x^3 + 3)$

$= 12x^2 - 6x^4 - 4x^4 - 6x$

$= -10x^4 + 12x^2 - 6x$

### VASTAUS

$p'(x) = -10x^4 + 12x^2 - 6x$

## Harjoitustehtäviä

**Sarja I**

**179.** Derivoi funktio.

E1 **a)** $x^8$ **b)** $5x^3$ **c)** $-2x^6$

**d)** $\dfrac{2x^{10}}{5}$ **e)** $-17x$ **f)** 13

**180.** Derivoi funktio.

E2 **a)** $f(x) = 2x^5 - 12x^3 + 5x$

**b)** $g(x) = 3x^4 + \dfrac{3}{4}x^2 + 5$

**181.** Derivoi funktio ja määritä derivaatta kohdassa 2.

**a)** $f(x) = -2x^3 + x^2 - x + 1$

**b)** $f(t) = 125t^2 - 110t$

**182.** Derivoi funktio.

**a)** $f(x) = 2x^3(8 - 4x + x^2)$

**b)** $g(t) = 3t(t + 4)^2$

**183.** Määritä funktion

E3 $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{5}{2}x^2 - 3x + 2$

**a)** derivaattafunktio

**b)** derivaattafunktion arvo kohdassa 0

**c)** derivaattafunktion nollakohdat.

**184.** Millä muuttujan $x$ arvoilla funktion $f(x) = -2x^2 + 6x - 1$ arvojen hetkellinen muutosnopeus on **a)** 0 **b)** 2?

**185.** Matiaksen älypuhelin tipahtaa Näsinneulan huipulta. Puhelimen putoaman matkan metreinä $t$ sekunnin kuluttua putoamishetkestä ilmaisee likimääräisesti funktio $s(t) = 4{,}9t^2$. Millä nopeudella puhelin putoaa **a)** kahden **b)** kolmen sekunnin kuluttua?

**186.** Olkoon $f(x) = 3x^4 - px^3 - x^2 + 1$. Määritä vakion $p$ arvo niin, että $f'(1) = 4$.

**187.** Millä muuttujan $x$ arvoilla funktion $f(x) = -3x^2 + 12x - 5$ derivaatta on positiivinen?

**188.** Derivoi funktio tulon derivointisäännöllä.

E4 **a)** $h(x) = 3x(x^2 + 2x)$

**b)** $s(x) = (2x - 5)(6x^3 + 4)$

## Sarja II

**189.** Derivoi funktio.

**a)** $2x^3$ **b)** $-3x^{12}$ **c)** $\frac{2x^4}{5}$

**d)** $\frac{x^8}{4}$ **e)** 2017 **f)** $x\sqrt{2}$

**190.** Derivoi funktio.

**a)** $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 36x + 2$

**b)** $g(t) = \frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{8}t^2 + t + \pi$

**191.** Määritä funktion derivaatta kohdassa $-1$.

**a)** $f(t) = 2t^8 - 5t^4 + 15t^3$

**b)** $g(x) = 4x(11 - 2x^4)$

**192.** Olkoon $f(x) = x^2 + bx + c$. Määritä vakioiden $b$ ja $c$ arvot niin, että $f(1) = 2$ ja $f'(1) = 5$.

**193.** Kivi heitettiin kohtisuoraan ylöspäin nopeudella 18 m/s. Kiven korkeuden maanpinnasta $t$ sekunnin kuluttua heittohetkestä ilmaisee likimääräisesti funktio $h(t) = 18t - 5t^2$.

**a)** Mikä oli kiven nopeus maanpinnan suhteen yhden sekunnin ja kahden sekunnin kuluttua?

**b)** Millä ajanhetkellä kiven nopeus maanpinnan suhteen oli nolla eli kivi oli hetkellisesti paikallaan?

**c)** Kuinka korkealla kivi korkeimmillaan kävi?

**194.** Olkoon $f(x) = \frac{3}{2}x^4 + 15$ ja $g(x) = 10x^3 - 12x^2 - 7$.

**a)** Kumman funktion kuvaaja on jyrkempi kohdassa $x = 2$?

**b)** Missä kohdassa funktioiden kuvaajat ovat yhtä jyrkät?

**195.** Millä muuttujan $x$ arvoilla funktion $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x$ derivaatta on negatiivinen?

**196.** Derivoi funktio $f(x) = (2x^3 - 5x + 1)(4x^4 - 2x^2 - 1)$ tulon derivointisäännöllä ja määritä $f'(1)$.

**197.** Funktiosta $g$ tiedetään, että $g(2) = 5$ ja $g'(2) = -3$. Määritä funktion $s(x) = x^3 \cdot g(x)$ derivaatta kohdassa $x = 2$.

**198.** Olkoon funktio $f(x) = 5x^2 + 14x - 3$. Määritä funktion $f$

**a)** derivaatta

**b)** toinen derivaatta

**c)** kolmas derivaatta.

**199.** Toisen asteen polynomifunktiosta $f$ tiedetään, että $f(2) = 4$, $f'(2) = -2$ ja $f''(2) = 6$. Määritä funktion lauseke.

**200.** Olkoon funktion $f$ lauseke $x^3 + 5t^3x - 2t^2$. Määritä **a)** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ **b)** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$.

**201.** Olkoon $k$ reaaliluku ja $f$ derivoituva funktio. Osoita, että tällöin $\mathrm{D}(k \cdot f(x)) = k \cdot f'(x)$.

**202.** Olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku. Osoita induktiolla, että $\mathrm{D}\, x^n = nx^{n-1}$. (Induktiotodistus opiskellaan kurssissa 11.)

# 4.2 Polynomifunktion kasvaminen ja väheneminen

**TUTKIMUS**

Määritä funktion $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2+3$ derivaattafunktio $f'$. Piirrä funktion $f$ ja sen derivaattafunktion $f'$ kuvaajat. Vastaa kuvaajien perusteella seuraaviin kysymyksiin.

**1)** **a)** Millä muuttujan $x$ arvoilla derivaattafunktion arvo on positiivinen?

**b)** Millä muuttujan $x$ arvoilla funktion kuvaaja on nouseva eli funktion arvo suurenee muuttujan $x$ arvon suurentuessa?

**c)** Vertaa a- ja b-kohdan tuloksia. Mitä havaitset?

**2)** **a)** Millä muuttujan $x$ arvoilla derivaattafunktion arvo on negatiivinen?

**b)** Millä muuttujan $x$ arvoilla funktion kuvaaja on laskeva eli funktion arvo pienenee muuttujan $x$ arvon suurentuessa?

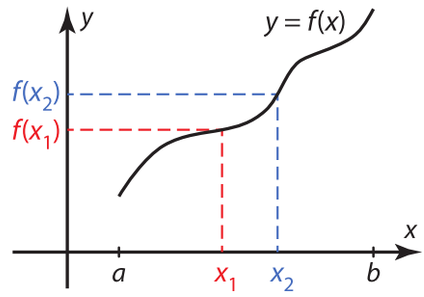
**c)** Vertaa a- ja b-kohdan tuloksia. Mitä havaitset?

**3)** **a)** Kuvaile funktion kuvaajaa niissä kohdissa, joissa derivaattafunktion arvo on nolla.

**b)** Millainen funktion arvo on näissä kohdissa ympäröiviin arvoihin verrattuna?

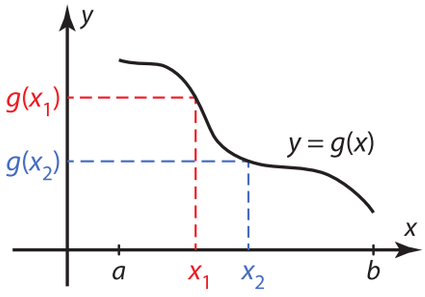
## Funktion kasvaminen ja väheneminen

Vieressä on erään funktion $f$ kuvaaja välillä $[a, b]$. Kun valitaan mitkä tahansa kaksi lukua $x_1$ ja $x_2$ siten, että $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) < f(x_2)$. Siis, kun muuttujan arvo kasvaa, niin funktion arvo kasvaa. Sanotaan, että funktio $f$ on *aidosti kasvava* välillä $[a, b]$.




**Huomaa!**
Aidosti kasvava funktio säilyttää suuruusjärjestyksen.

Vieressä on erään funktion $g$ kuvaaja välillä $[a, b]$. Kun valitaan mitkä tahansa kaksi lukua $x_1$ ja $x_2$ siten, että $x_1 < x_2$, niin $g(x_1) > g(x_2)$. Siis, kun muuttujan arvo kasvaa, niin funktion arvo pienenee. Sanotaan, että funktio $g$ on *aidosti vähenevä* välillä $[a, b]$.




**Huomaa!**
Aidosti vähenevä funktio kääntää suuruusjärjestyksen.

**Määritelmä**

**Aidosti monotoninen funktio**

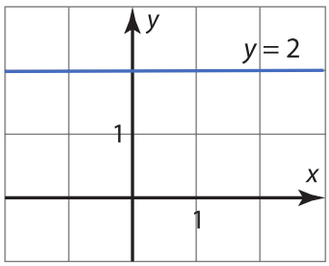
Funktio $f$ on *aidosti kasvava*, jos muuttujan arvon kasvaessa funktion arvo kasvaa, eli

aina kun $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) < f(x_2)$.

Funktio $f$ on *aidosti vähenevä*, jos muuttujan arvon kasvaessa funktion arvo pienenee, eli

aina kun $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) > f(x_2)$.

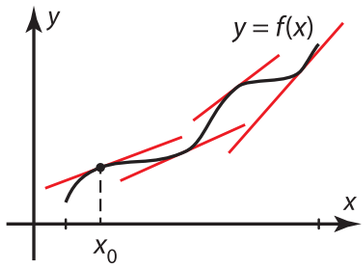
Jos funktio on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä, niin sanotaan, että funktio on *aidosti monotoninen*.




Määritelmässä sana **aidosti** liittyy vaatimukseen, että muuttujan arvon kasvaessa funktion arvot todella kasvavat tai pienenevät. Funktion sanotaan olevan *kasvava*, jos muuttujan arvon kasvaessa funktion arvo kasvaa tai pysyy samana, eli aina kun $x_1 < x_2$, niin $f(x_1) \le f(x_2)$. Esimerkiksi vakiofunktio $f(x) = 2$ on kasvava mutta ei aidosti kasvava. Vastaavasti funktio on *vähenevä*, jos muuttujan arvon kasvaessa funktion arvo pienenee tai pysyy samana. Siis vakiofunktio $f(x) = 2$ on myös vähenevä mutta ei aidosti vähenevä.

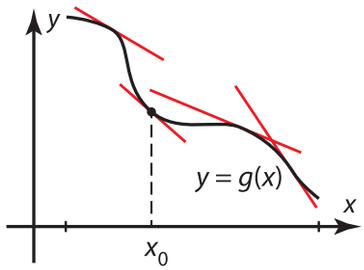
## Funktion monotonisuus ja derivaatta

Jos funktio on derivoituva, voidaan funktion kasvamista ja vähenemistä tutkia derivaatan merkin avulla. Geometrisesti derivaatta on käyrälle piirretyn tangentin kulmakerroin, ja tangentin suunta kertoo funktion kuvaajan suunnan tietyssä kohdassa.



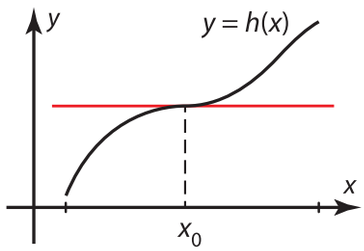

Jos funktion $f$ derivaatta kohdassa $x_0$ on positiivinen, niin kuvaajalle tähän kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin on positiivinen ja tangentti on nouseva suora.

Jos funktion $f$ derivaatan arvo on positiivinen jollakin välillä, niin kaikki tälle välille piirretyt tangentit ovat nousevia suoria ja funktio $f$ on aidosti kasvava tällä välillä.




Jos funktion $g$ derivaatan arvo kohdassa $x_0$ on negatiivinen, niin kuvaajalle tähän kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin on negatiivinen ja tangentti on laskeva suora.

Jos jollakin välillä funktion $g$ derivaatan arvo on negatiivinen, niin kaikki tälle välille piirretyt tangentit ovat laskevia suoria ja funktio $g$ on aidosti vähenevä tällä välillä.




Aidosti kasvavalla tai aidosti vähenevällä funktiolla voi olla myös yksittäisiä kohtia, joissa tangentti on vaakasuora eli derivaatan arvo on $0$. Tällaisia kohtia kutsutaan *terassikohdiksi*.

**Funktion monotonisuus ja derivaatta** — Lause

Olkoon $f$ jollakin lukusuoran välillä derivoituva funktio.

1) Jos $f'(x) > 0$ kaikissa tämän välin kohdissa lukuun ottamatta yksittäisiä kohtia, joissa $f'(x) = 0$, niin funktio $f$ on aidosti kasvava tällä välillä.

2) Jos $f'(x) < 0$ kaikissa tämän välin kohdissa lukuun ottamatta yksittäisiä kohtia, joissa $f'(x) = 0$, niin funktio on aidosti vähenevä tällä välillä.

Välin mahdollisissa päätepisteissä pitää tutkia toispuolisia derivaattoja eli erotusosamäärän toispuolisia raja-arvoja.

Lauseen todistus perustuu differentiaalilaskennan väliarvolauseeseen, johon tutustutaan kurssissa 13. Todistus sivuutetaan tällä kurssilla.

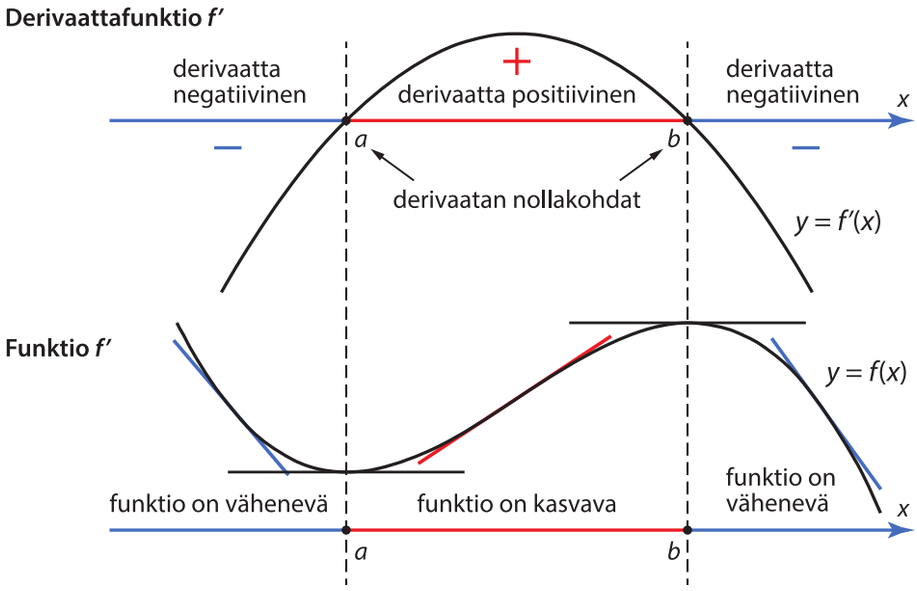
Funktion kasvamisen ja vähenemisen tutkimista sanotaan funktion kulun tutkimiseksi. Tarkastellaan, kuinka derivaattafunktion $f'$ kuvaajaan perusteella voidaan päätellä funktion $f$ kulku.

**Välillä $x < a$**
Derivaatta on negatiivinen ja funktio on aidosti vähenevä.

**Välillä $a < x < b$**
Derivaatta on positiivinen ja funktio on aidosti kasvava.

**Välillä $x > b$**
Derivaatta on negatiivinen ja funktio on aidosti vähenevä.

**Kohdissa $x = a$ ja $x = b$**
Derivaatta on nolla ja funktion kuvaaja on (yhdessä pisteessä) vaakasuora.




Yllä olevien kuvaajien havainnot voidaan koota funktion *kulkukaavioon*.

- Päätellään derivaatan merkit ja laaditaan derivaatan merkkikaavio.
- Päätellään derivaatan merkin perusteella funktion kulkusuunta.

**Huomaa!**
Välin päätepisteet ovat yksittäisiä kohtia, joissa derivaatan arvo on nolla, joten ne voidaan lukea mukaan sekä väliin, jossa $f$ on aidosti kasvava, että väliin, jossa $f$ on aidosti vähenevä.

Kulkukaavion perusteella funktio $f$ on aidosti kasvava välillä $a \le x \le b$ ja aidosti vähenevä välillä $x \le a$ ja välillä $x \ge b$.

Seuraavassa esimerkissä opitaan, kuinka funktion kulkukaavio laaditaan.

## ESIMERKKI 1

**a)** Millä väleillä funktio $f(x) = 2x^3 - 75x^2 + 625$ on aidosti kasvava ja millä aidosti vähenevä?

**b)** Kumpi funktion arvoista $f(25{,}00001)$ ja $f(25{,}00002)$ on suurempi?

### RATKAISU

**Huomaa!**
Kaikki polynomifunktiot ovat derivoituvia, joten niiden kulkua voidaan tutkia derivaatan avulla.

**a)** Tutkitaan, missä kohdissa funktion $f$ derivaattafunktion $f'$ arvot ovat positiivisia ja missä negatiivisia.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 6x^2 - 150x$.

Derivaattafunktio $f'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$6x^2 - 150x = 0$ Erotetaan yhteinen tekijä.

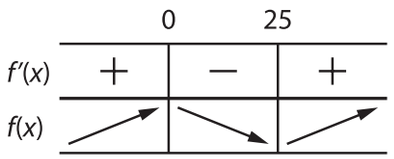
$x(6x - 150) = 0$ Käytetään tulon nollasääntöä.

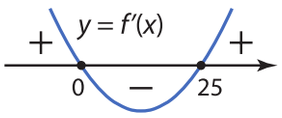
$x = 0$ tai $6x - 150 = 0$

$6x = 150 \quad | : 6$

$x = 25$

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Derivaattafunktion $f'(x) = 6x^2 - 150x$ merkit voidaan päätellä hahmottelemalla sen kuvaaja.



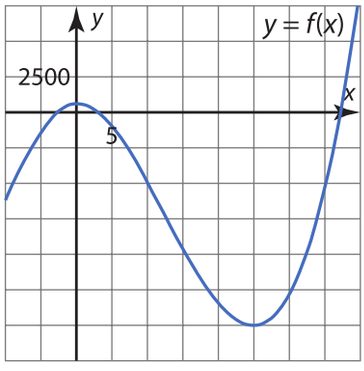




Derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = 25$.

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio $f$ on aidosti kasvava välillä $x \le 0$ ja välillä $x \ge 25$.

Funktio $f$ on aidosti vähenevä välillä $0 \le x \le 25$.

**Graafinen tarkistus**




Huomaa kuvaajan skaalaus.

**b)** Funktio on aidosti kasvava, kun $x \ge 25$. Siis mitä suurempi on muuttujan arvo, sitä suurempi on funktion arvo. Täten $f(25{,}00002) > f(25{,}00001)$.

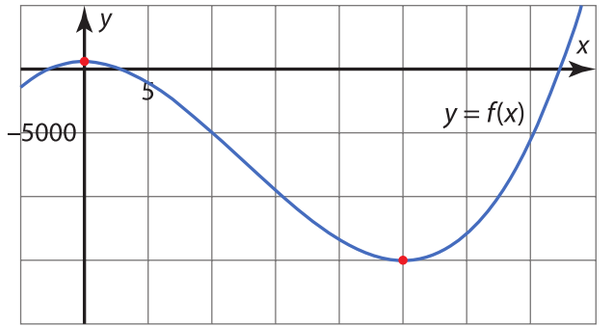
### VASTAUS

**a)** aidosti kasvava välillä $x \le 0$ ja välillä $x \ge 25$, aidosti vähenevä välillä $0 \le x \le 25$

**b)** Arvo $f(25{,}00002)$ on suurempi.

## Funktion ääriarvot

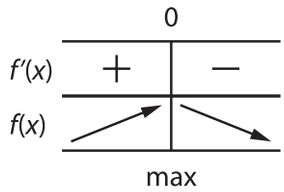
Edellä tutkittiin derivoituvan funktion $f(x) = 2x^3 - 75x^2 + 625$ kulkua.




Kohdassa $x = 0$ funktio $f$ vaihtuu aidosti kasvavasta aidosti väheneväksi. Kuvaajasta havaitaan, että funktion arvo kohdassa $0$ on suurin, jonka funktio saa kyseisen kohdan lähiympäristössä.

Sanotaan, että kohta $x = 0$ on funktion $f$ (*paikallinen*) *maksimikohta* ja funktion arvo $f(0) = 625$ (*paikallinen*) *maksimiarvo*.

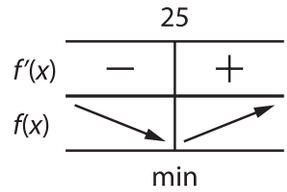
Maksimikohdassa derivoituvan funktion $f$ derivaatta on nolla, ja derivaatan merkki vaihtuu positiivisesta negatiiviseksi.




Kohdassa $x = 25$ funktio $f$ vaihtuu aidosti vähenevästä aidosti kasvavaksi. Kuvaajasta havaitaan, että funktion arvo kohdassa $25$ on pienin, jonka funktio saa kyseisen kohdan lähiympäristössä.

Sanotaan, että kohta $x = 25$ on funktion $f$ (*paikallinen*) *minimikohta* ja funktion arvo $f(25) = -15\,000$ on (*paikallinen*) *minimiarvo*.

Minimikohdassa derivoituvan funktion $f$ derivaatta on nolla, ja derivaatan merkki vaihtuu negatiivisesta positiiviseksi.

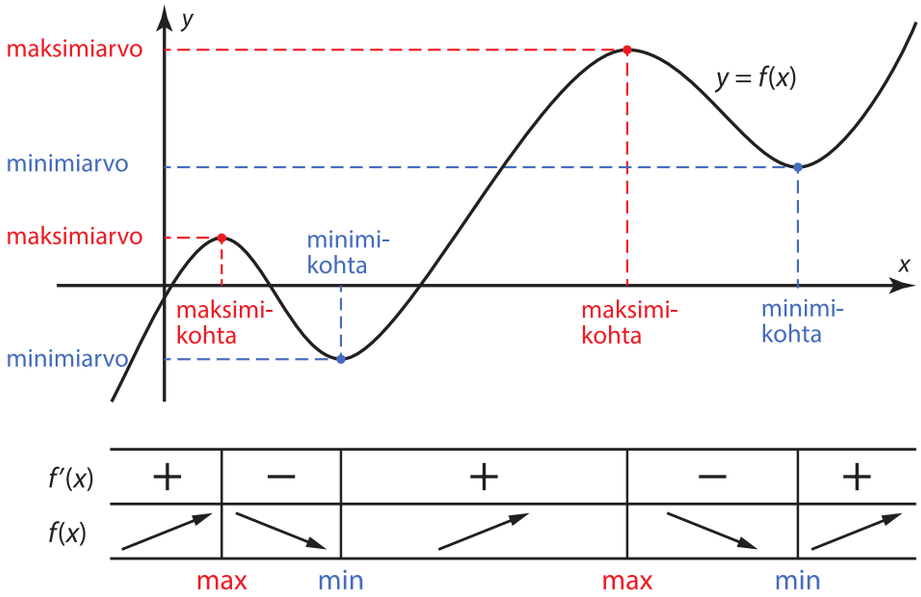


Maksimikohtia ja minimikohtia kutsutaan funktion *ääriarvokohdiksi*. Maksimiarvoja ja minimiarvoja kutsutaan funktion *ääriarvoiksi*.

**Funktion ääriarvot** Määritelmä

1) Kohta $x_0$ on funktion *maksimikohta*, jos funktio saa paikallisesti suurimman arvonsa kohdassa $x_0$. Funktion arvo $f(x_0)$ on *maksimiarvo* eli *maksimi*.
2) Kohta $x_0$ on funktion *minimikohta*, jos funktio saa paikallisesti pienimmän arvonsa kohdassa $x_0$. Funktion arvo $f(x_0)$ on *minimiarvo* eli *minimi*.

Funktiolla voi olla useita maksimikohtia ja minimikohtia.



Ajatellaan, että kiipeät kukkulan huipulle. Olet lähimaaston korkeimmassa kohdassa eli paikallisessa maksimikohdassa. Kaverisi kiipeää vielä korkeamman naapurikukkulan huipulle. Hän on myös lähimaastonsa korkeimmassa kohdassa eli paikallisessa maksimikohdassa. Paikallisia maksimikohtia (tai minimikohtia) voi siis olla useampia.

## ESIMERKKI 2

Määritä funktion $f(x) = x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 16x^2 + 100$ ääriarvokohdat.

### RATKAISU

Funktion $f$ kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 4x^3 - 8x^2 - 32x$.

Derivaattafunktio $f'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

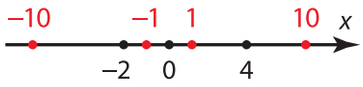
$4x^3 - 8x^2 - 32x = 0$ Erotetaan yhteinen tekijä.

$4x(x^2 - 2x - 8) = 0$ Tulon nollasääntö.

$4x = 0$ tai $x^2 - 2x - 8 = 0$ $a = 1,\ b = -2,\ c = -8$

$$x = 0 \text{ tai } x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2}$$

$$x = \frac{2-6}{2} = -2 \text{ tai } x = \frac{2+6}{2} = 4$$




Nollakohdat $-2$, $0$ ja $4$ jakavat lukusuoran neljään osaan. Päätellään derivaattafunktion merkit laskemalla yksi derivaattafunktion arvo jokaiselta osaväliltä ja laaditaan funktion $f$ kulkukaavio.

**Huomaa!**
Tässä käytetään derivaattafunktion $f'$ lauseketta, koska testipisteillä tutkitaan derivaatan merkkiä.

$f'(x) = 4x^3 - 8x^2 - 32x$

$f'(-10) = 4 \cdot (-10)^3 - 8 \cdot (-10)^2 - 32 \cdot (-10) = -4480 < 0$

$f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - 8 \cdot (-1)^2 - 32 \cdot (-1) = 20 > 0$

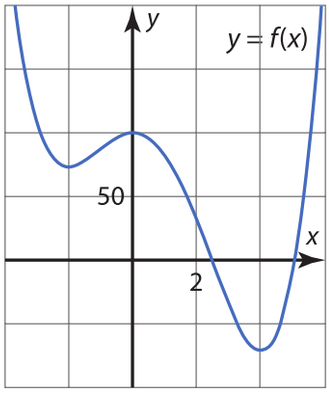
$f'(1) = 4 \cdot 1^3 - 8 \cdot 1^2 - 32 \cdot 1 = -36 < 0$

$f'(10) = 4 \cdot 10^3 - 8 \cdot 10^2 - 32 \cdot 10 = 2880 > 0$

| | | –2 | | 0 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | – | | + | | – | + |
| $f(x)$ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | ↗ |
| | | | min | | max | | min |

Kulkukaavion perusteella funktiolla $f$ on maksimikohta $x = 0$ ja minimikohdat $x = -2$ ja $x = 4$.

**Graafinen tarkistus**




### VASTAUS

maksimikohta $x = 0$ ja minimikohdat $x = -2$ ja $x = 4$

## ESIMERKKI 3

Määritä funktion $f(x) = 3x^5 - 80x^3 + 200$ ääriarvokohdat ja ääriarvot, kun $x \geq -5$. Onko funktiolla terassikohtia?

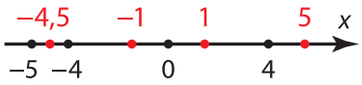
### RATKAISU

Funktion $f$ kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 15x^4 - 240x^2$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

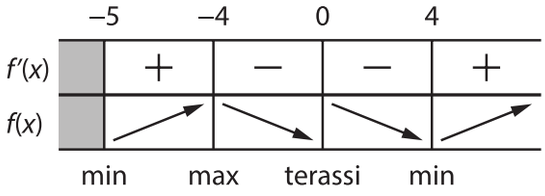
$15x^4 - 240x^2 = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = -4$, $x = 0$ tai $x = 4$




Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio, kun $x \geq -5$. Derivaattafunktio $f'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

**Huomaa!**
Myös tutkittavan välin päätepiste voi olla funktion ääriarvokohta.




| $x$ | $f'(x)$ | merkki |
|---|---|---|
| −4,5 | 1290,9… | + |
| −1 | −225 | − |
| 1 | −225 | − |
| 5 | 3375 | + |

**Huomaa!**
Tässä käytetään funktion $f$ lauseketta, koska ääriarvo on funktion arvo.

Funktion $f$ maksimikohta on $x = -4$ ja maksimiarvo

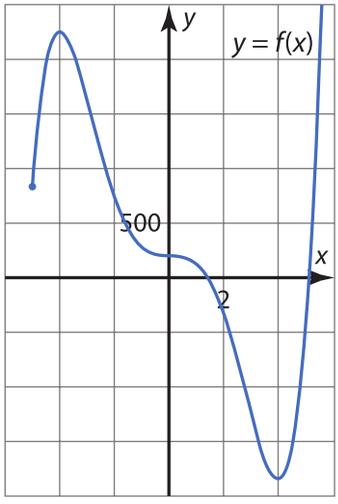
$f(-4) = 3 \cdot (-4)^5 - 80 \cdot (-4)^3 + 200 = 2248.$

Funktion $f$ minimikohdat ovat $x = -5$ ja $x = 4$ ja minimiarvot

$f(-5) = 3 \cdot (-5)^5 - 80 \cdot (-5)^3 + 200 = 825$ ja

$f(4) = 3 \cdot 4^5 - 80 \cdot 4^3 + 200 = -1848.$

**Graafinen tarkistus**




Koska funktion kulkusuunta ei vaihdu derivaattafunktion nollakohdassa $x = 0$, on tämä terassikohta.

### VASTAUS

maksimikohta $x = -4$ ja maksimiarvo 2248,
minimikohta $x = -5$ ja minimiarvo 825,
minimikohta $x = 4$ ja minimiarvo −1848,
terassikohta $x = 0$

## ESIMERKKI 4

Osoita, että yhtälöllä $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$ on täsmälleen yksi ratkaisu.

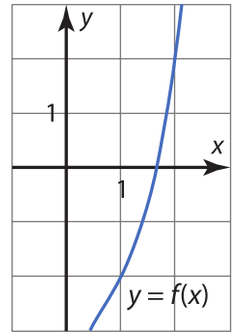
### RATKAISU

Yhtälön $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ nollakohdat. Pitää siis osoittaa, että funktiolla $f$ on täsmälleen yksi nollakohta.

**Huomaa!**
Kuvaajan perusteella ei voida sanoa, että välillä $]1, 2[$ sijaitseva nollakohta olisi funktion ainoa nollakohta.

**Bolzanon lause**
Jos $f$ on jatkuva välillä $[a, b]$ ja funktion arvot $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset, niin funktiolla $f$ on ainakin yksi nollakohta välillä $]a, b[$.

Tilannetta voi hahmotella piirtämällä funktion $f$ kuvaajan. Funktiolla näyttää olevan yksi nollakohta välillä $]1, 2[$.




**1)** Perustellaan ensin, että funktiolla $f$ on ainakin yksi nollakohta.

Funktio $f$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Koska funktion arvot $f(1) = -2$ ja $f(2) = 2$ ovat erimerkkiset, niin funktiolla $f$ on ainakin yksi nollakohta välillä $]1, 2[$. Täten funktiolla $f$ on ainakin yksi nollakohta.

**2)** Perustellaan seuraavaksi, että funktiolla $f$ on korkeintaan yksi nollakohta.

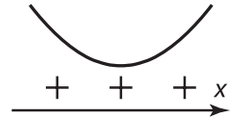
Tutkitaan funktion $f$ kulkua sen derivaattafunktion $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$ avulla. Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$3x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{-20}}{6}$$

Koska $\sqrt{-20}$ ei ole määritelty, niin derivaattafunktiolla ei ole nollakohtia.

Derivaattafunktion $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jolla ei ole nollakohtia. Siis $f'(x) > 0$ kaikilla $x$.




Funktio $f$ on aidosti kasvava ja saa kaikki arvonsa täsmälleen yhden kerran. Siten funktiolla $f$ voi olla korkeintaan yksi nollakohta.

On siis osoitettu, että funktiolla $f$ on ainakin yksi nollakohta ja korkeintaan yksi nollakohta. Funktiolla $f$ on siis täsmälleen yksi nollakohta ja yhtälöllä $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$ täsmälleen yksi ratkaisu. □

## Harjoitustehtäviä

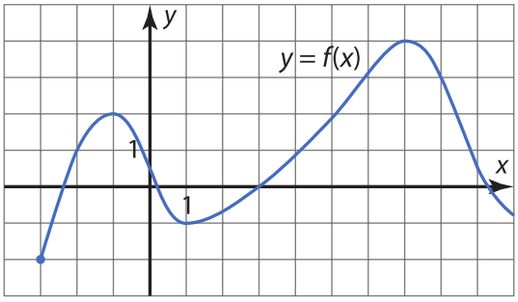
**Sarja I**

**203.** Määritä funktion $f$ kuvaajan perusteella

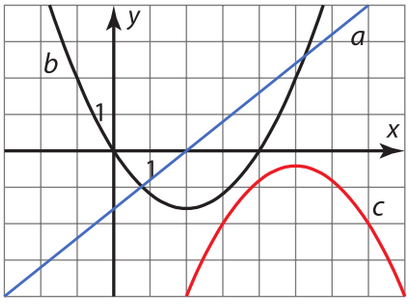
**a)** millä väleillä funktio on kasvava ja millä vähenevä

**b)** ääriarvokohdat

**c)** ääriarvot.




**204.** Kuvassa on kolmen derivaattafunktion kuvaajat $a$, $b$ ja $c$. Yhdistä kuhunkin kuvaajaan sopiva väittämä.




**1)** Funktio on aidosti kasvava kaikkialla.

**2)** Funktio on aidosti vähenevä kaikkialla.

**3)** Funktio on aidosti vähenevä, kun $x \le 2$, ja aidosti kasvava, kun $x \ge 2$.

**4)** Funktio on aidosti vähenevä, kun $0 \le x \le 4$, ja muualla aidosti kasvava.

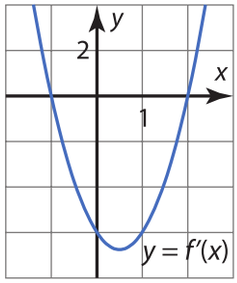
**205.** E1

**a)** Millä väleillä funktio $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$ on aidosti kasvava ja millä aidosti vähenevä?

**b)** Kumpi arvoista $f(1{,}0000001)$ ja $f(1{,}0000002)$ on suurempi?

**206.**

**a)** Laadi derivaattafunktion kuvaajan perusteella funktion $f$ kulkukaavio.

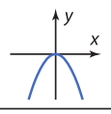
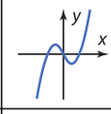
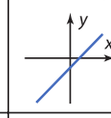
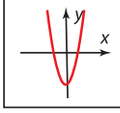
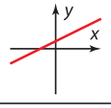
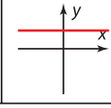
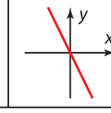
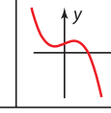



**b)** Millä väleillä funktio on kasvava ja millä vähenevä?

**c)** Määritä funktion ääriarvokohdat.

**d)** Hahmottele funktion kuvaaja, kun $f(-1) = 3{,}5$ ja $f(2) = -10$.

**207.** Taulukon ylärivissä ovat funktioiden $f(x)$, $g(x)$ ja $h(x)$ kuvaajat. Alemassa rivissä on viiden eri funktion kuvaajat. Näiden joukossa ovat myös derivaattafunktioiden $f'(x)$, $g'(x)$ ja $h'(x)$ kuvaajat.

| | Funktio $f(x)$ | Funktio $g(x)$ | Funktio $h(x)$ | |
|---|---|---|---|---|
| |  |  |  | |
| Kuvaaja 1 | Kuvaaja 2 | Kuvaaja 3 | Kuvaaja 4 | Kuvaaja 5 |
|  |  |  |  |  |

Yhdistä funktion kuvaaja oikeaan derivaattafunktion kuvaajaan.
[yo pitkä k2014]

**208.** E2 Määritä funktion $f(x) = -3x^4 - 4x^3 + 36x^2$ ääriarvokohdat.

**209.** Olkoon $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x$.

**a)** Millä väleillä funktio on aidosti kasvava ja millä aidosti vähenevä?

**b)** Määritä funktion ääriarvokohdat.

**210.** Olkoon $f(x) = x^4 + 2x^3$

**a)** Määritä funktion ääriarvokohdat.

**b)** Määritä funktion ääriarvot.

**c)** Onko funktiolla terassikohtia?

**211.** E3 Määritä funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ ääriarvot, kun $x \geq -1$.

**212.** E4 Osoita, että yhtälöllä $x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$ on tasan yksi ratkaisu.

**213.** Osoita, että luku $1$ on yhtälön $x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$ ainoa ratkaisu.

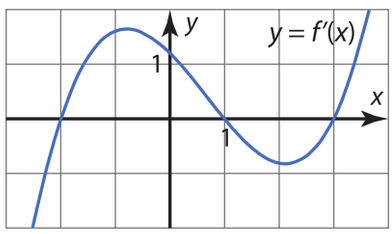
**214.** Määritä vakion $a$ arvo niin, että yhtälöllä $x^5 - 5x + a = 0$ on ainakin yksi ratkaisu välillä $]1, 2[$.

## Sarja II

**215.** **a)** Millä väleillä funktio $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 15x^2 + 2$ on aidosti kasvava ja millä aidosti vähenevä?

**b)** Kumpi arvoista $f(15{,}0000001)$ ja $f(15{,}0000002)$ on suurempi?

**216.** Kuvassa on derivaattafunktion $f'$ kuvaaja. Määritä funktion $f$ ääriarvokohdat.




**217.** Funktion $f$ derivaattafunktion $f'$ nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = 2$, ja sen merkkikaavio on alla. Lisäksi tiedetään, että $f(0) = 2$ ja $f(2) = -14$. Hahmottele funktion $f$ kuvaaja.

| | | 0 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | | − | | + |

**218.** Määritä funktion $f(x) = 5x^5 - 27x^3 - 2$ ääriarvokohdat. Onko funktiolla terassikohtia?

**219.** Olkoon $f(x) = x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 1$.

**a)** Millä väleillä funktio on kasvava ja millä vähenevä?

**b)** Määritä funktion ääriarvot.

**220.** Olkoon $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + a$.

**a)** Määritä vakio $a$ niin, että funktiolla $f$ on maksimiarvo $8$.

**b)** Mikä on tällöin funktion minimiarvo?

**221.** Olkoon $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + c$.

**a)** Määritä sellaiset vakiot $a$, $b$ ja $c$, että funktiolla $f$ on maksimiarvo $f(0) = 1$ ja minimikohdat $x = -1$ ja $x = 2$.

**b)** Määritä funktion $f$ minimiarvot.

**222.** Osoita, että funktioiden $f(x) = x^5 + x$ ja $g(x) = 5 - x^3$ kuvaajilla on täsmälleen yksi leikkauspiste.

**223.** Osoita, että yhtälöllä $x^4 + x = 1$ on täsmälleen kaksi ratkaisua. Minkä peräkkäisten kokonaislukujen välissä ratkaisut sijaitsevat?

**224.** Tutki, kuinka monta ratkaisua yhtälöllä $(x + 1)^3 = 3x$ on.

**225.** Määritä vakio $a$ niin, että yhtälöllä $x^3 - 3x^2 + a = 0$ on ainakin kaksi ratkaisua.

**226.** Osoita, että funktio $f(x) = ax^3 + ax^2 + ax$ on aidosti kasvava, kun $a > 0$, ja aidosti vähenevä, kun $a < 0$.

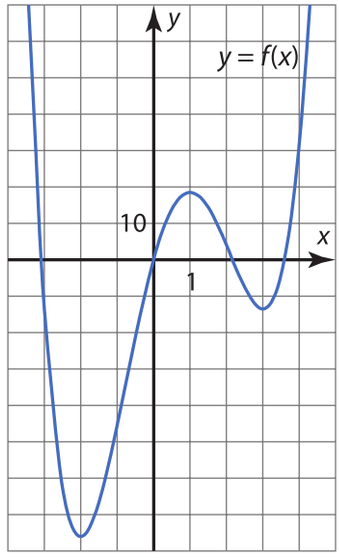
# 4.3 Polynomifunktion suurin ja pienin arvo

**TUTKIMUS**

**1)** Kuvassa on kaikilla reaaliluvuilla määritellyn funktion

$f(x) = -\frac{3}{2}x^4 - 4x^3 - 15x^2 + 36x$

kuvaaja.




Vastaa kuvaajan perusteella seuraaviin kysymyksiin.

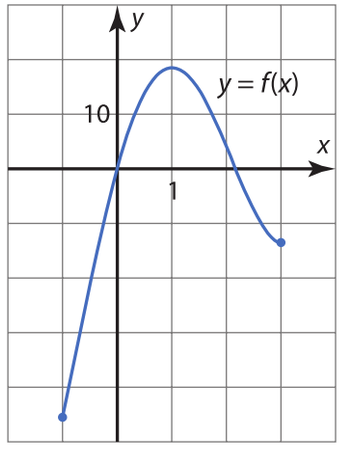
**a)** Mitkä ovat funktion ääriarvokohdat?

**b)** Millä muuttujan $x$ arvolla funktio saa pienimmän arvonsa?

**c)** Millä muuttujan $x$ arvolla funktio saa suurimman arvonsa?

**d)** Päättele, missä kohdissa kaikkialla määritelty derivoituva funktio voi saada suurimman ja pienimmän arvonsa.

**2)** Rajataan funktion $f$ määrittelyjoukoksi väli $[-1, 3]$. Vastaa kuvaajan perusteella seuraaviin kysymyksiin.




**a)** Mitkä ovat funktion ääriarvokohdat ja ääriarvot?

**b)** Millä muuttujan $x$ arvolla funktio saa pienimmän arvonsa?

**c)** Millä muuttujan $x$ arvolla funktio saa suurimman arvonsa?

## Suurin ja pienin arvo

Edellisessä luvussa havaittiin, että funktiolla voi olla useita paikallisia maksimiarvoja ja minimiarvoja. Usein ollaan kuitenkin kiinnostuneita siitä, mikä on funktion *suurin arvo* ja mikä *pienin arvo*, ja millä muuttujan arvoilla ne saavutetaan. Näitä etsitään erityisesti käytännön sovelluksissa.

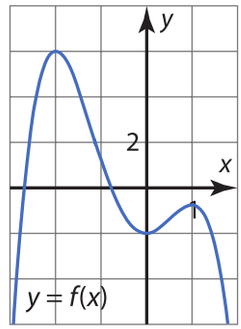
**ESIMERKKI 1**

Määritä funktion $f(x) = -\frac{3}{4}x^4 - x^3 + 3x^2 - 2$ suurin ja pienin arvo.

**RATKAISU**

**Huomaa!**
Havainnollistaminen ei ole välttämätön osa tehtävän ratkaisua. Usein se kuitenkin auttaa hahmottamaan tehtävää ja toimii keinona tarkistaa laskemalla saatu ratkaisu.

Havainnollistetaan tilannetta piirtämällä funktion $f$ kuvaaja.




Kuvaajan perusteella näyttäisi, että funktion suurin arvo on $6$, ja että funktiolla ei ole pienintä arvoa. Kuvaajasta tehdyt havainnot pitää perustella laskemalla.

Funktion $f$ kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä.

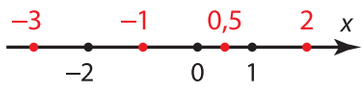
Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = -3x^3 - 3x^2 + 6x$.

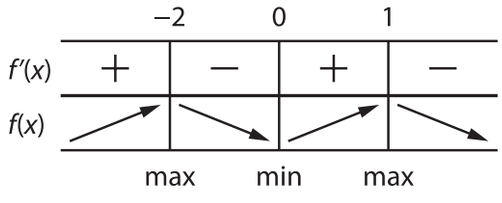
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$-3x^3 - 3x^2 + 6x = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = -2$, $x = 0$ tai $x = 1$

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Derivaattafunktio $f'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.




| $x$ | $f'(x)$ | merkki |
|---|---|---|
| $-3$ | $36$ | $+$ |
| $-1$ | $-6$ | $-$ |
| $0{,}5$ | $1{,}875$ | $+$ |
| $2$ | $-24$ | $-$ |

Kulkukaavion perusteella funktion suurin arvo saavutetaan kohdassa $x = -2$ tai kohdassa $x = 1$. Lasketaan funktion arvot näissä kohdissa.

$$f(-2) = -\frac{3}{4} \cdot (-2)^4 - (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 2 = 6 \quad \text{suurin}$$

$$f(1) = -\frac{3}{4} \cdot 1^4 - 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 2 = -\frac{3}{4}$$

Funktion suurin arvo on 6.

**Huomaa!**

Derivoituvan funktion suurin arvo on myös funktion (paikallinen) maksimiarvo ja pienin arvo on funktion (paikallinen) minimiarvo.

Mikäli suurin ja pienin arvo ovat olemassa, ne löytyvät aina funktion ääriarvojen joukosta.

Kulkukaavion perusteella ainoa kohta, jossa funktio voisi saavuttaa pienimmän arvonsa on $x = 0$. Lasketaan funktion arvo tässä kohdassa.

$$f(0) = -\frac{3}{4} \cdot 0^4 - 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 2 = -2$$

Funktio $f$ on aidosti vähenevä, kun $x \geq 1$. Koska esimerkiksi $f(2) = -10 < -2$, niin funktion pienin arvo ei voi olla $-2$. Siis funktiolla $f$ ei ole pienintä arvoa.

**VASTAUS**

suurin arvo 6, ei pienintä arvoa

## ESIMERKKI 2

Määritä funktion $f(x)=\frac{4}{3}x^3-x^2-6x$ suurin ja pienin arvo välillä $]0, 2[$.

### RATKAISU

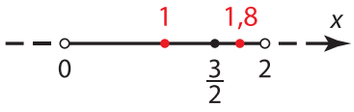
Funktion $f$ kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x)=4x^2-2x-6$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$4x^2-2x-6=0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

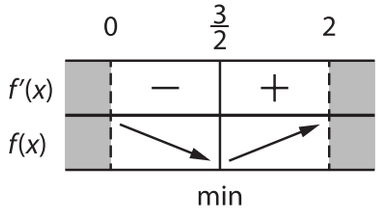
$x=-1$ tai $x=\frac{3}{2}$

Derivaattafunktion nollakohdista välille $]0, 2[$ kuuluu vain $x=\frac{3}{2}$.




Laaditaan funktion $f$ välille $]0, 2[$ rajattu kulkukaavio. Derivaattafunktio $f'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

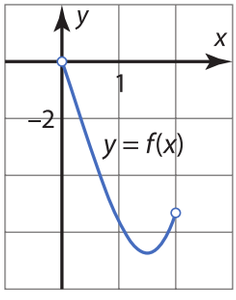
**Huomaa!**
Koska välin päätepisteet 0 ja 2 eivät kuulu tutkittavalle välille, niin ne merkitään kulkukaavioon katkoviivalla.




| $x$ | $f'(x)$ | merkki |
|---|---|---|
| 1 | –4 | – |
| 1,8 | 3,36 | + |

Kulkukaavion perusteella funktion pienin arvo saavutetaan kohdassa $x=\frac{3}{2}$.

**Graafinen tarkistus**




Pienin arvo on

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3-\left(\frac{3}{2}\right)^2-6\cdot\frac{3}{2}=-\frac{27}{4}.$$

Kulkukaavion perusteella funktiolla ei ole suurinta arvoa.

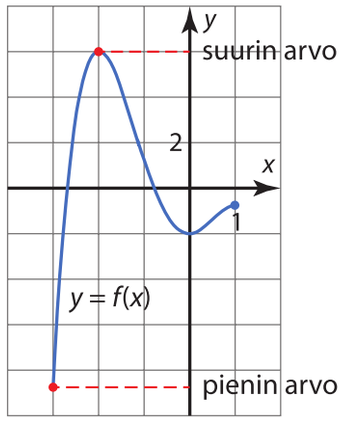
### VASTAUS

pienin arvo $-\frac{27}{4}$, ei suurinta arvoa

## Suurin ja pienin arvo suljetulla välillä

Esimerkissä 1 määritettiin, että funktiolla $f(x) = -\frac{3}{4}x^4 - x^3 + 3x^2 - 2$ on suurin arvo mutta ei pienintä arvoa. Tarkastellaan seuraavaksi funktiota $f$ suljetulla välillä.

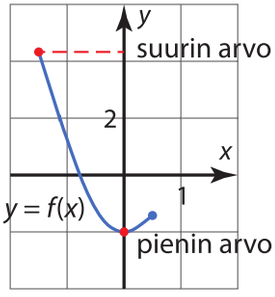
Kun funktiota $f$ tarkastellaan välillä $[-3, 1]$ havaitaan, että tällä suljetulla välillä funktiolla on sekä suurin että pienin arvo.




Suurin arvo on $6$ ja se saavutetaan välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa $x = -2$.

Pienin arvo on noin $-8{,}8$ ja se saavutetaan välin päätepisteessä $x = -3$.

Kun funktiota $f$ tarkastellaan välillä $[-1{,}5;\ 0{,}5]$ havaitaan, että myös tällä suljetulla välillä funktiolla on suurin ja pienin arvo.




Suurin arvo on noin $4{,}3$ ja se saavutetaan välin päätepisteessä $x = -1{,}5$.

Pienin arvo on $-2$ ja se saavutetaan välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa $x = 0$.

Havainnot voidaan yleistää seuraavaksi lauseeksi.

**Suurin ja pienin arvo suljetulla välillä** — Lause

Olkoon $f$ suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuva funktio.

1) Funktiolla $f$ on aina suurin ja pienin arvo.
2) Jos funktio $f$ on lisäksi derivoituva avoimella välillä $]a, b[$, niin se saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa välille $]a, b[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Suljetulla välillä $[a, b]$ määritelty polynomifunktio- tai rationaalifunktio on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä $]a, b[$. Lausetta voidaan siis soveltaa kaikkiin polynomi- ja rationaalifunktioihin.

TODISTUS

1) Todistus sivuutetaan, koska todistaminen edellyttää lukion oppimäärän ylittäviä tietoja.

2) Oletetaan, että $x_0$ kuuluu välille $]a, b[$ ja $x_0$ ei ole derivaattafunktion $f'$ nollakohta. Siis $x_0$ kuuluu välille $[a, b]$ mutta ei ole välin päätepiste eikä välille kuuluva derivaattafunktion nollakohta.

   Derivoituvan funktion suurin ja pienin arvo on aina myös funktion paikallinen ääriarvo. Koska $f'(x_0)$ on olemassa mutta $f'(x_0) \neq 0$, niin $x_0$ ei voi olla funktion paikallinen ääriarvokohta. Siis funktio ei voi saada suurinta eikä pienintä arvoaan kohdassa $x_0$.

   Koska kohdan 1 mukaan funktio kuitenkin saa suurimman ja pienimmän arvonsa, niiden täytyy löytyä joko välin päätepisteistä tai välille kuuluvista derivaattafunktion nollakohdista. □

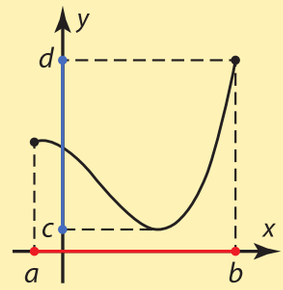
Suljetulla välillä jatkuvan funktion arvojoukon määrittämisessä voidaan käyttää tietoa, että jatkuva funktio saa suljetulla välillä myös kaikki arvot suurimman ja pienimmän arvonsa väliltä.

**Jatkuvan funktion arvojoukko** Lause

Suljetulla välillä jatkuva funktio saa tällä välillä pienimmän ja suurimman arvon sekä kaikki arvot niiden väliltä.

Määrittelyjoukko $[a, b]$.

Arvojoukko $[c, d]$.




Todistus sivuutetaan, koska todistaminen edellyttää lukion oppimäärän ylittäviä tietoja.

**Suurin ja pienin arvo laskimella**

Funktion suurin ja pienin arvo suljetulla välillä voidaan selvittää myös laskimella. Tehtävän ratkaisun voi tarkistaa laskimella. Esimerkissä 3 komento voi näyttää esimerkiksi tältä

`fmax(2x^4 − 20x, x, −2, 4)`.

Selvitä laskimestasi, miten funktion suurin ja pienin arvo määritetään, ja harjoittele esimerkin 3 funktiolla.

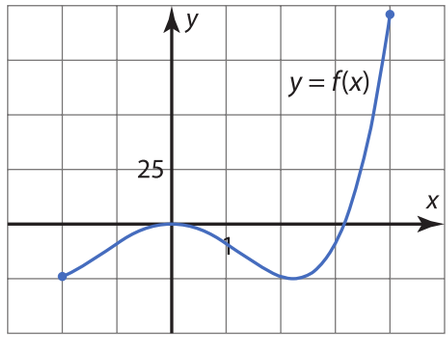
## ESIMERKKI 3

Määritä funktion $f(x) = 2x^4 - 20x^2$ suurin ja pienin arvo välillä $[-2, 4]$. Missä kohdassa funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa?

### RATKAISU

**Laskin**
Selvitä laskimestasi, miten saat piirrettyä funktion kuvaajan rajatulla välillä.

Havainnollistetaan tehtävää piirtämällä funktion $f$ kuvaaja tutkittavalla välillä.




Kuvaajan perusteella funktion $f$ suurin arvo saavutetaan välin päätepisteessä $x = 4$ ja pienin arvo välin päätepisteessä $x = -2$ tai derivaatan nollakohdassa.

**Derivoituvan funktion suurin ja pienin arvo suljetulla välillä**
1) Derivoidaan funktio ja määritetään tarkasteluvälille kuuluvat derivaattafunktion nollakohdat.
2) Lasketaan funktion arvo välin päätepisteissä ja välille kuuluvissa derivaattafunktion nollakohdissa.
3) Valitaan arvoista suurin ja pienin.

Polynomifunktio $f(x) = 2x^4 - 20x^2$ saavuttaa välillä $[-2, 4]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välille $]-2, 4[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 8x^3 - 40x$. Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$8x^3 - 40x = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = -\sqrt{5}\ (\approx -2{,}2)$ tai $x = 0$ tai $x = \sqrt{5}\ (\approx 2{,}2)$

Derivaattafunktion nollakohdista välille $]-2, 4[$ kuuluvat $x = 0$ ja $x = \sqrt{5}$.

Lasketaan funktion $f$ arvo välin päätepisteissä $-2$ ja $4$ sekä välille kuuluvissa derivaattafunktion nollakohdissa $0$ ja $\sqrt{5}$.

$f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 20 \cdot (-2)^2 = -24$

$f(4) = 2 \cdot 4^2 - 20 \cdot 4^2 = 96$ suurin

$f(0) = 2 \cdot 0^2 - 20 \cdot 0^2 = 0$

$f(\sqrt{5}) = 2 \cdot (\sqrt{5})^2 - 20 \cdot (\sqrt{5})^2 = -25$ pienin

Lasketuista arvoista suurin on $96$ ja se saadaan, kun $x = 4$. Pienin arvoista on $-25$ ja se saadaan, kun $x = \sqrt{5}$.

### VASTAUS

suurin arvo $96$ kohdassa $x = 4$, pienin arvo $-25$ kohdassa $x = \sqrt{5}$

## Harjoitustehtäviä

**Sarja I**

**227.** Voidaanko kulkukaavion perusteella sanoa kohdat, joista funktion $f$ suurin arvo löytyy?

**a)**

| | | 1 | | 3 | | 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | | − | | + | | − |
| $f(x)$ | ↗ | | ↘ | | ↗ | | ↘ |

**b)**

| | | 1 | | 3 | | 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | | + | | + | | − |
| $f(x)$ | ↘ | | ↗ | | ↗ | | ↘ |

**228.** E1 Määritä funktion $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 10$ suurin ja pienin arvo.

**229.** E2 Määritä funktion $f(x) = x^3 - 12x^2$ suurin ja pienin arvo välillä $]-10, 2[$.

**230.** E3 Määritä funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ suurin ja pienin arvo välillä $[0, 3]$. Missä kohdassa funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa?

**231.** Määritä funktion $f(x) = x^4 - 4x^3$ suurin ja pienin arvo välillä **a)** $[-2, 4]$ **b)** $[-2, 2]$.

**232.** Lämpötila celsiusasteina eräänä heinäkuun vuorokautena Varkaudessa noudatti likimain funktiota $f(t) = -0{,}0008t^3 - 0{,}0393t^2 + 1{,}3332t + 15{,}1940$, missä $t$ on aika tunteina vuorokauden alusta. Määritä vuorokauden korkein lämpötila asteen tarkkuudella. Mihin aikaan (minuutin tarkkuudella) se saavutettiin?

**233.** Alla on erään polynomifunktion $f(x)$ kulkukaavio.

| | | −4 | | 1 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | | + | | − | | + |
| $f(x)$ | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ |

Rajaa kulkukaavio välille

**a)** $[-2, 2]$ **b)** $[-5, 0]$ **c)** $[2, \infty[$

ja päättele, missä kohdissa funktio $f$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa.

**234.** Määritä vakio $k$ siten, että funktion $f(x) = x^3 - \frac{33}{2}x^2 + 72x + k$ pienin arvo välillä $[4, 10]$ on 8.

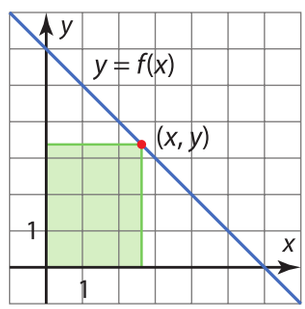
**235.** Osoita, että funktio $f(x) = -3x^4 + 16x^3 + 30x^2 - 900$ saa vain negatiivisia arvoja.

**236.** Hahmottele jokin välillä $[2, 5]$ määritellyn polynomifunktion $f$ kuvaaja annettujen tietojen perusteella.

**a)** Funktion maksikohdat ovat $x = 2$ ja $x = 4$. Funktion minimikohdat ovat $x = 3$ ja $x = 5$.

**b)** Funktion suurin arvo on $f(2) = 4$ ja pienin arvo $f(4) = 2$.

**237.** Suorakulmion yksi kärki on origossa, ja siitä lähtevät kaksi sivua sijaitsevat positiivisilla koordinaattiakseleilla. Neljäs kärki $(x, y)$ on koordinaatiston ensimmäisessä neljänneksessä funktion $f(x) = 6 - x$ kuvaajalla.

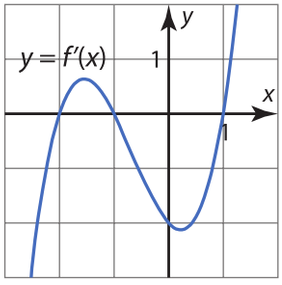



**a)** Määritä suorakulmion pinta-alan funktio $A(x)$. Mikä on funktion määrittelyjoukko?

**b)** Määritä pinta-alan suurin arvo.

## Sarja II

**238.** Kuvassa on polynomifunktion $f$ derivaattafunktion $f'$ kuvaaja. Laadi funktion $f$ kulkukaavio. Voidaanko kulkukaavion perusteella sanoa missä kohdassa funktio $f$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa?




**239.** Määritä funktion $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$ suurin ja pienin arvo, kun funktion määrittelyjoukko on **a)** $\mathbf{R}$ **b)** $]-1, 1[$ **c)** $[1, \infty[$.

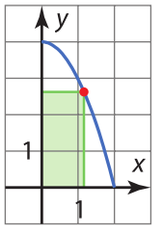
**240.** Määritä funktion $f(x) = 2x^3 - 65x^2 + 500x$ suurin ja pienin arvo välillä $[-2, 20]$. Missä kohdassa funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa?

**241.** Funktio $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2$ on määritelty välillä $[-2, 2]$. Määritä funktion arvojoukko.

**242.** Osoita, että epäyhtälö $x^6 - 5x + 7 > 0$ on aina tosi.

**243.** Osoita, että epäyhtälö
$3x^2 + 12x \le 2x^3 + 20$
on tosi, kun $x > 1$.

**244.** Suorakulmion yksi kärki on origossa, ja siitä lähtevät kaksi sivua sijaitsevat positiivisilla koordinaattiakseleilla. Neljäs kärki sijaitsee paraabelilla $y = 4 - x^2$ alueessa $x \ge 0$ ja $y \ge 0$. Määritä suorakulmion suurimman mahdollisen pinta-alan tarkka-arvo. [yo pitkä s2016]




**245.** Määritä funktion $f(x) = |-x^2 + 6x - 5|$ suurin ja pienin arvo välillä $[2, 6]$.

**246.** Määritä lukujonon
$a_n = -n^3 + 29n^2 - 61n$, kun $n = 1, 2, 3\ldots$,
suurin luku.

**247.** Olkoon $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x$.
**a)** Millä välillä funktio on kasvava?
**b)** Millä muuttujan arvolla funktion arvot kasvavat nopeimmin?

**248.** Esko mittasi tammikuun jokaisena päivänä lumen paksuuden pihassaan. Hän syötti mittaustulokset taulukkolaskentaohjelmaan ja havaitsi lumen paksuuden senttimetreinä noudattavan likimain funktiota
$f(t) = -0{,}0006t^4 + 0{,}02t^3 - 0{,}02t^2 + 0{,}88t + 22$,
missä $t$ on tammikuun päivämäärä. Esimerkiksi $f(2)$ tarkoittaa päivän 2.1. lumimäärää. Minä tammikuun päivänä lumikerroksen paksuus
**a)** kasvoi
**b)** pieneni
mallin mukaan nopeimmin?

**249.** Piste $(x, y)$ on ympyrällä $x^2 + y^2 = 4$. Määritä lausekkeen $x^2(4 - x - y^2)$
**a)** suurin **b)** pienin arvo sekä missä ympyrän pisteissä se saavutetaan.

**250.** Olkoon $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{kun } x \le 4 \\ -2x + 12, & \text{kun } x > 4. \end{cases}$
**a)** Piirrä funktion kuvaaja.
**b)** Onko funktiolla suurin ja pienin arvo suljetulla välillä $[2, 5]$?
**c)** Miksi funktio ei saa suurinta ja pienintä arvoa välin $[2, 5]$ päätepisteissä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa?

# 4.4 Tangentin yhtälö

**TUTKIMUS**

Funktion $f(x) = x^2 + 2$ kuvaajalle piirretään tangentti kohtaan $x = 2$.

1) Määritä tangentin ja kuvaajan sivuamispisteen $y$-koordinaatti.

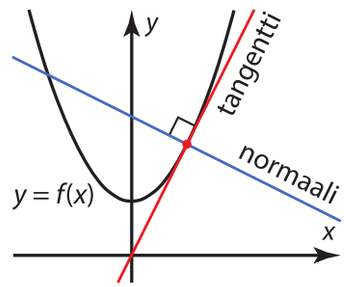
2) Määritä funktion $f$ derivaattafunktio $f'$.

3) Määritä tangentin kulmakerroin ja yhtälö.

4) Tarkista tangentin yhtälö piirtämällä laskimella funktion $f$ kuvaaja ja tangentti.

## Tangentin ja normaalin yhtälön määrittäminen

*Käyrän normaali* on suora, joka on kohtisuorassa samaan käyrän pisteeseen piirrettyä tangenttia vastaan. Esimerkissä 1 palautetaan mieleen kurssissa 5 opittuja suoran yhtälöön liittyviä asioita ja opitaan määrittämään kuvaajalle piirretyn tangentin ja normaalin yhtälö.




**ESIMERKKI 1**

Määritä funktion $f(x) = x^3 + x$ kuvaajalle kohtaan $x = -1$ piirretyn

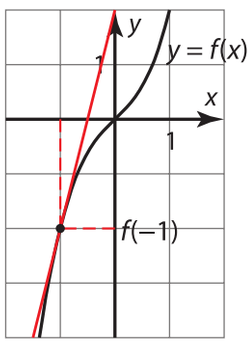
**a)** tangentin **b)** normaalin yhtälö.

**RATKAISU**

**a)** Määritetään kuvaajan piste, johon tangentti piirretään.

$y = f(-1) = (-1)^3 + (-1) = -2$

Tangentti piirretään kuvaajan pisteeseen $(-1, -2)$.




Funktion $f$ kuvaajalle kohtaan $x = -1$ piirretyn tangentin kulmakerroin $k = f'(-1)$. Derivoidaan funktio $f$ ja lasketaan kulmakerroin.

$f'(x) = 3x^2 + 1$ Sijoitetaan $x = -1$.

$k = f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 1 = 4$

**Lause**
Jos suora kulkee pisteen $(x_0, y_0)$ kautta ja sen kulmakerroin on $k$, niin suoran yhtälö on $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Tangentti kulkee pisteen $(-1, -2)$ kautta ja sen kulmakerroin on $4$. Muodostetaan tangentin yhtälö.

$y - (-2) = 4(x - (-1))$ $\quad y - y_0 = k(x - x_0)$, $(x_0, y_0) = (-1, -2)$, $k = 4$

$y + 2 = 4x + 4$

$y = 4x + 2$

Tangentin yhtälö on $y = 4x + 2$.

**b)** Normaali piirretään kuvaajalle samaan pisteeseen kuin tangentti, eli normaali kulkee pisteen $(-1, -2)$ kautta.

**Kohtisuoruusehto**
Jos suorien kulmakertoimet ovat $k_1$ ja $k_2$, niin suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan täsmälleen silloin, kun $k_1 \cdot k_2 = -1$.

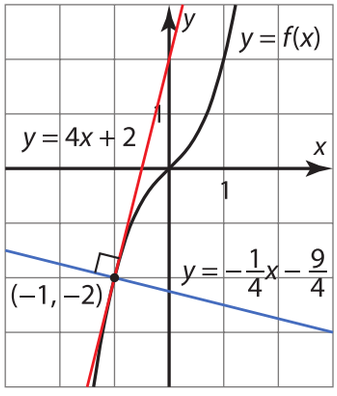
Normaali on kohtisuorassa tangenttia vastaan, joten sen kulmakerroin voidaan ratkaista kohtisuoruusehdosta.

$k_t \cdot k_n = -1$ $\quad$ Sijoitetaan $k_t = 4$.

$4 \cdot k_n = -1$

$k_n = -\frac{1}{4}$

**Graafinen tarkistus**




Normaali kulkee pisteen $(-1, -2)$ kautta ja sen kulmakerroin on $-\frac{1}{4}$. Muodostetaan normaalin yhtälö.

$y - (-2) = -\frac{1}{4}(x - (-1))$ $\quad y - y_0 = k(x - x_0)$, $(x_0, y_0) = (-1, -2)$ ja $k = -\frac{1}{4}$.

$y + 2 = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$

$y = -\frac{1}{4}x - \frac{9}{4}$

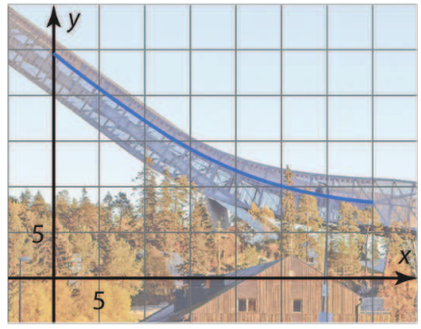
Normaalin yhtälö on $y = -\frac{1}{4}x - \frac{9}{4}$.

**Huomaa!**
Suorien yhtälöt voi antaa myös yleisessä muodossa
a) $-4x + y - 2 = 0$
b) $x + 4y + 9 = 0$

**VASTAUS**

**a)** $y = 4x + 2$ $\quad$ **b)** $y = -\frac{1}{4}x - \frac{9}{4}$

## ESIMERKKI 2




Kuvassa on sovitettu Holmenkollenin hyppyrimäkeen käyrä. Käyrän yhtälö on $y = 0{,}009x^2 - 0{,}78x + 24{,}6$, kun $0 \le x \le 35$. Määritä tämän sovituksen mukaan asteen tarkkuudella mäen kaltevuus vaakatasoon nähden

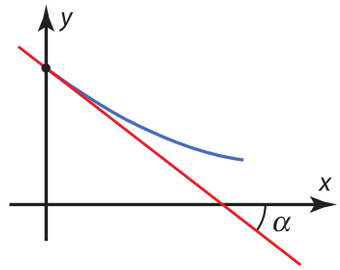
**a)** lähtöpisteessä $(x = 0)$

**b)** hyppyrin nokalla $(x = 35)$.

### RATKAISU

**Suuntakulma**
- Suoran suuntakulma on suoran ja $x$-akselin positiivisen suunnan välinen terävä kulma.
- Pystysuoran suoran suuntakulma on $90°$.
- Nousevan suoran suuntakulma on positiivinen ja laskevan negatiivinen.

Kaltevuuskulma on käyrälle tarkastelupisteeseen piirretyn tangentin ja $x$-akselin välinen kulma. Tämä kulma saadaan selville määrittämällä tangentin suuntakulma $\alpha$.




**a)** Merkitään $f(x) = 0{,}009x^2 - 0{,}78x + 24{,}6$, jolloin tutkittava käyrä on $y = f(x)$. Käyrälle kohtaan $x$ piirretyn tangentin kulmakerroin on funktion $f$ derivaatta kohdassa $x$.

$f'(x) = 0{,}018x - 0{,}78$

Tangentin kulmakerroin kohdassa $x = 0$ on

$f'(0) = 0{,}018 \cdot 0 - 0{,}78 = -0{,}78.$

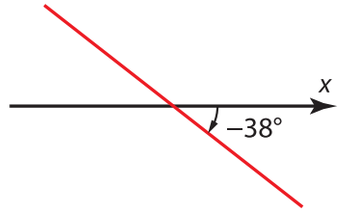
**Lause**
Suoran suuntakulmalle $\alpha$ ja kulmakertoimelle $k$ on voimassa yhtälö $\tan\alpha = k$.

Määritetään tangentin suuntakulma.

$\tan\alpha = -0{,}78$

$\alpha = \tan^{-1}(-0{,}78) = -37{,}954...° \approx -38°$

Tangentin suuntakulma on $-38°$, joten lähtöpisteessä mäen kaltevuus on $38°$ vaakatasosta alaspäin.



**b)** Tangentin kulmakerroin kohdassa $x = 35$ on

$f'(35) = 0{,}018 \cdot 35 - 0{,}78 = -0{,}15.$

Määritetään tangentin suuntakulma.

$\tan\alpha = -0{,}15$

$\alpha = \tan^{-1}(-0{,}15) = -8{,}530...^\circ \approx -9^\circ$

Tangentin suuntakulma on $-9°$, joten hyppyrin nokalla mäen kaltevuus on $9°$ vaakatasosta alaspäin.

Holmenkollenin K-120 mäen kaltevuuskulma on todellisuudessa lähdössä noin 36° ja hyppyrin nokalla noin 11°. Kuvan päälle sovitetulla käyrällä saatiin melko hyvä arvio kulmista.

VASTAUS

**a)** 38° **b)** 9°

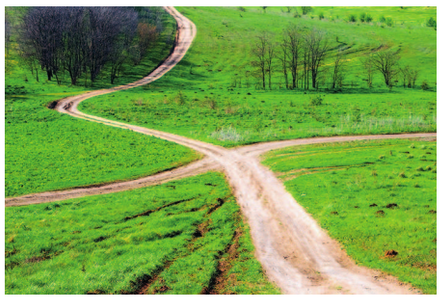
**Tangentin ja normaalin yhtälö geometriaohjelmalla**

Geometriaohjelmalla voidaan piirtää kuvaajalle tiettyyn pisteeseen asetettu tangentti ja ohjelma kertoo tangentin yhtälön.

Käyrän normaali saadaan piirtämällä tangentille normaali.

Harjoittele geometriaohjelman käyttöä piirtämällä esimerkin 1 funktion kuvaaja ja määrittämällä tangentin ja normaalin yhtälöt.

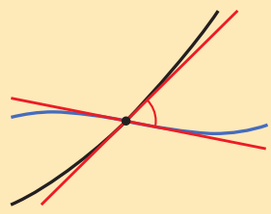
## Käyrien välinen kulma



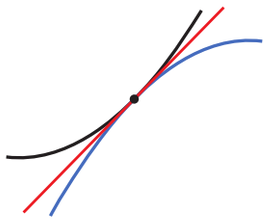
Missä kulmassa kuvan tiet kohtaavat? Miten käyrien välinen kulma voidaan mitata?

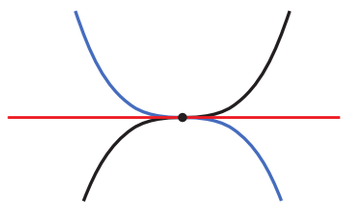
**Käyrien välinen kulma** Määritelmä

*Kahden käyrän välinen kulma* leikkauspisteessä on leikkauspisteeseen piirrettyjen tangenttien välinen kulma.



Jos kahdella käyrällä on leikkauspisteessä yhteinen tangentti, niin käyrien välinen kulma on $0°$. Sanotaan, että käyrät *sivuavat* toisiaan.





## ESIMERKKI 3

Laske asteen tarkkuudella kulma, jossa käyrät $y = x^2 - 2x$ ja $y = x^2 - 12x + 20$ leikkaavat toisensa.

### RATKAISU

Määritetään käyrien leikkauspisteen $x$-koordinaatti.

$x^2 - 2x = x^2 - 12x + 20$

Merkitään käyrien lausekkeet yhtä suuriksi.

$10x = 20$

$x = 2$

Määritetään käyrien derivaatat ja tangenttien kulmakertoimet leikkauskohdassa $x = 2$.

**Huomaa!**
Käyrän $y$ derivaatta voidaan merkitä $y'(x)$ tai $y'$.

$y_1(x) = x^2 - 2x$

$y_1'(x) = 2x - 2$

$k_1 = y_1'(2)$

$= 2 \cdot 2 - 2 = 2$

$y_2(x) = x^2 - 12x + 20$

$y_2'(x) = 2x - 12$

$k_2 = y_2'(2)$

$= 2 \cdot 2 - 12 = -8$

Lasketaan tangenttien suuntakulmat.

$\tan \alpha_1 = 2$

$\alpha_1 = \tan^{-1} 2 = 63{,}434...°$

$\tan \alpha_2 = -8$

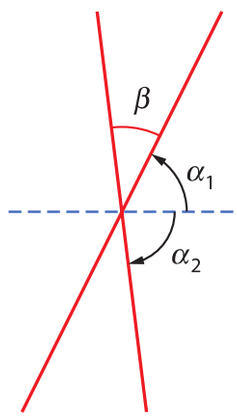
$\alpha_2 = \tan^{-1}(-8) = -82{,}874...°$

**Huomaa!**
Päättele mallikuvan avulla, miten suuntakulmista saadaan tangenttien välinen kulma.

Piirretään mallikuva tangenteista ja lasketaan tangenttien välinen kulma.

$|\alpha_1| + |\alpha_2|$

$= 63{,}434...° + 82{,}874...° = 146{,}309...°$




Koska suorien välinen kulma toteuttaa aina ehdon $0° \le \beta \le 90°$, niin tangenttien välinen kulma on

$\beta = 180° - 146{,}309...°$

$= 33{,}690...° \approx 34°$.

### VASTAUS

34°

**ESIMERKKI 4** Syventävä

Määritä vakion $a$ arvo niin, että käyrät $y_1 = \frac{1}{2}x^2 + 1$ ja $y_2 = -\frac{1}{2}x^2 + ax$ sivuavat toisiaan.

**RATKAISU**

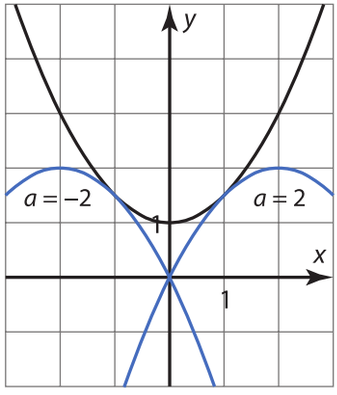
Käyrät sivuavat toisiaan, jos niillä on leikkauspisteessä yhteinen tangentti. Sivuamiskohdassa käyrien derivaattojen on siis oltava yhtä suuret.

$$y_1'(x) = y_2'(x)$$
$$x = -x + a$$
$$2x = a$$

Koska sivuamiskohdassa käyrillä on yhteinen piste, niin niiden $y$-koordinaatit ovat sivuamiskohdassa yhtä suuret.

$$y_1 = y_2$$
$$\frac{1}{2}x^2 + 1 = -\frac{1}{2}x^2 + ax$$
$$x^2 - ax + 1 = 0$$

**Graafinen tarkistus**




Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} 2x = a \\ x^2 - ax - 1 = 0 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari laskimella.

$x = -1$ ja $a = -2$ tai $x = 1$ ja $a = 2$

Käyrät sivuavat toisiaan, kun $a = -2$ tai $a = 2$

**VASTAUS**

$a = -2$ tai $a = 2$

## Harjoitustehtäviä

**Sarja I**

**251.** Määritä funktion $f(x) = x^4 - 12x^2$ kohtaan $x = 2$ piirretyn **a)** tangentin **b)** normaalin kulmakerroin.

**252.** E1 Määritä funktion $f(x) = x^2 - 3$ kuvaajalla kohtaan $x = 1$ piirretyn **a)** tangentin **b)** normaalin yhtälö.

**253.** Olkoon $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 1$.

**a)** Piirrä funktion kuvaaja ja määritä kohtaan $x = 2$ piirretyn tangentin yhtälö.

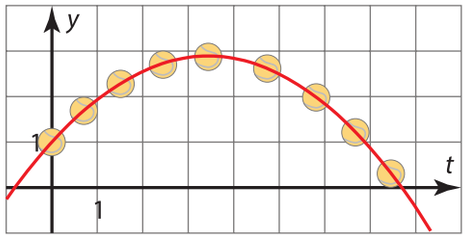
**b)** Varmista a-kohdan tulos määrittämällä tangentin yhtälö laskemalla.

**254.** Käyrälle $y = -x^2 + 3$ piirretään tangentti kohtaan $x = -1$. Määritä tangentin, $x$-akselin ja $y$-akselin rajaaman kolmion pinta-ala.

**255.** E2 Jirko kuvasi tennispallon heiton ja sovitti kuvasarjaan lentorataa kuvaavan käyrän $y = -0{,}16t^2 + 1{,}1t + 1$, missä $t$ on heiton alusta kulunut aika sekunteina ja $y$ on pallon etäisyys maanpinnasta. Määritä asteen tarkkuudella, missä kulmassa

**a)** pallo nousee 2 s kuluttua

**b)** pallo osuu maahan.




**256.** E3 Laske asteen tarkkuudella kulma, jossa käyrät $y = x^2 - 2$ ja $y = x^2 - 8x + 16$ leikkaavat toisensa.

**257.** Osoita, että käyrät $y = x^2 - 5x + 2$ ja $y = x^2 - 7x + 8$ leikkaavat toisensa kohtisuorasti.

**258.** Osoita, että käyrät $y = -x^3$ ja $y = -x^2 - x + 1$ sivuavat toisiaan pisteessä $(1, -1)$.

**259.** Määritä se paraabelin $y = x^2 - 2x - 3$ piste, jossa paraabelin tangentin suuntakulma on $+45°$.
[yo pitkä k2004]

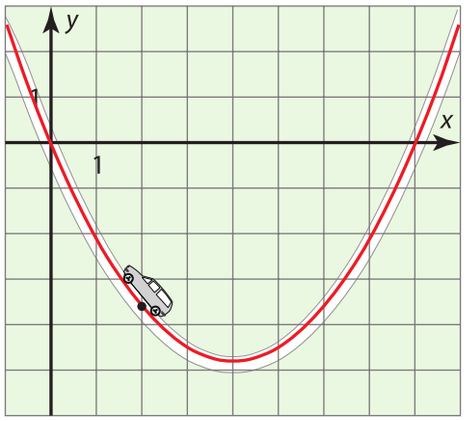
**260.** **a)** Mihin käyrän $y = x^3 - 2x + 4$ pisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin on 1?

**b)** Määritä tangentin yhtälö.

## Sarja II

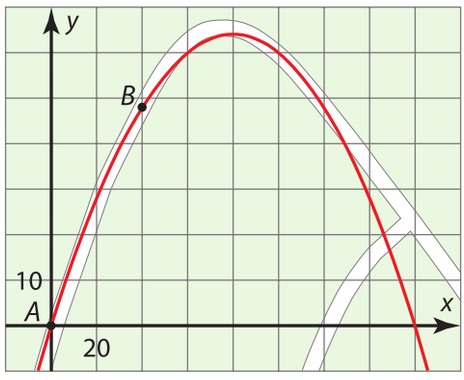
**261.** Määritä funktion $f(x) = 2x^3 - x^2 - x$ kuvaajalle kohtaan $x = -1$ piirretyn
**a)** tangentin **b)** normaalin yhtälö.

**262.** Auto saapuu oheisen kuvan mukaisesti oikealta ylhäältä jäiseen tien kaarteeseen, joka on likimain käyrän $y = 0{,}3x^2 - 2{,}4x$ mukainen, kun $0 \le x \le 8$. Auton renkaat menettävät pitonsa pisteessä $(2; -3{,}6)$ ja auto jatkaa liikettään tangentin suuntaisesti. Missä pisteessä auto osuu lumivalliin, joka on $y$-akselilla?




**263.** Käyrälle $y = -x^4 + 4x^2 - 2x$ piirretään tangentti ja normaali kohtaan $x = 1$. Määritä tangentin, normaalin ja $x$-akselin rajaaman kolmion pinta-ala.

**264.** Alina pyöräilee kaarteessa, joka koordinaatistoon sijoitettuna on likimain käyrän $y = -0{,}01x^2 + 1{,}6x$ mukainen, kun $0 \le x \le 120$. Määritä asteen tarkkuudella, kuinka monta astetta tie kääntyy pisteiden $A(0, 0)$ ja $B(40, 48)$ välillä.




**265.** Käyrät $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ ja $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 3$ leikkaavat toisensa kahdessa pisteessä. Määritä käyrien väliset leikkauskulmat asteen tarkkuudella.

**266.** Osoita, että käyrillä $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$ ja $y = 2x^2 + 1$ on yksi yhteinen piste ja että ne sivuavat siinä toisiaan.

**267.** E4 Määritä vakion $a$ arvo niin, että käyrät $y = -4x^2 + ax$ ja $y = 2x^2 + \frac{a}{4}$ sivuavat toisiaan.

**268.** Määritä vakion $a$ arvo niin, että käyrät $y = -x^2 + 3x$ ja $y = -x^2 + 5x + a$ leikkaavat toisensa kohtisuorasti.

**269.** Käyrälle $y = 2x^5 + 10x^3 - 38x$ piirretään tangentti, jonka kulmakerroin on 2. Määritä tangentin yhtälö.

**270.** Käyrälle $y = x^2 - 3x$ piirretään normaali, jonka kulmakerroin on $-1$. Määritä normaalin yhtälö.

**271.** Räjäytystyömaalta lentää kivi 30 metrin päähän, jolloin sen lentoratana olevan paraabelin huippu on 10 metrin korkeudessa. Määritä lähtökulma 0,1° tarkkuudella vaakasuoran maanpinnan suhteen mitattuna. [yo pitkä k1989]

**272.** Olkoon $f(x) = x^4 - 7x^2$ ja $g(x) = 4x - 21$.
**a)** Piirrä funktioiden kuvaajat, ja päättele millä ehdolla löytyy kohta, jossa funktion $f$ kuvaaja on lähimpänä funktion $g$ kuvaajaa.
**b)** Mikä funktion $f$ kuvaajan pisteistä on lähimpänä funktion $g$ kuvaajaa?

# 5 Rationaalifunktion derivaatta

*Tässä luvussa opitaan derivoimaan funktioiden osamäärä ja tutkimaan rationaalifunktioiden kulkua derivaattafunktion avulla.*

## 5.1 Osamäärän derivaatta

**TUTKIMUS** CAS

Piirrä funktioiden $h(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ ja $s(x)=\dfrac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$ kuvaajat samaan koordinaatistoon.

**a)** Määritä kuvaajan avulla funktion $h$ ääriarvokohdat ja funktion $s$ nollakohdat. Mitä havaitset?

**b)** Millä väleillä funktio $h$ on aidosti kasvava ja millä väleillä aidosti vähenevä?

**c)** Millä väleillä funktio $s$ on negatiivinen ja millä väleillä positiivinen?

**d)** Vertaa c- ja b-kohdan tuloksia. Mitä havaitset?

**e)** Toinen annetuista funktioista on toisen derivaattafunktio. Kumpi on alkuperäinen funktio ja kumpi sen derivaattafunktio?

Derivoituvien funktioiden $f$ ja $g$ osamäärä $\frac{f}{g}$ voidaan derivoida seuraavalla derivointisäännöllä.

**Funktioiden osamäärän derivaatta** Lause

Olkoot $f$ ja $g$ derivoituvia funktioita ja $g(x) \neq 0$. Tällöin

$$\mathrm{D}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}.$$

**Funktioiden osamäärä**

Funktioiden $f$ ja $g$ osamääräfunktio $r$ on funktio, jonka arvo kohdassa $x$ on funktioiden $f$ ja $g$ arvojen osamäärä:

$r(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

TODISTUS

Olkoot $f$ ja $g$ derivoituvia funktioita. Erotusosamäärän avulla voidaan osoittaa, että niiden osamäärä $r = \frac{f}{g}$ on derivoituva. Kaava, jolla $r'$ voidaan laskea, voidaan todistaa helpommin tulon derivointisäännön avulla.

Koska $r = \frac{f}{g}$, niin $f = rg$.

Derivoidaan funktio $f$ käyttämällä tulon derivointisääntöä.

$$f' = r'g + rg'$$

Sijoitetaan $r = \frac{f}{g}$ ja ratkaistaan derivaatta $r'$.

$$f' = r'g + \frac{f}{g} \cdot g'$$

$$r'g = f' - \frac{f}{g} \cdot g' \qquad \big| : g\,(\neq 0)$$

$$r' = \overset{g)}{\frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2}}$$

$$r' = \frac{f'g}{g^2} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

On siis osoitettu, että

$$\mathrm{D}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}, \text{ kun } g(x) \neq 0. \quad \square$$

## ESIMERKKI 1

Määritä funktion $h$ derivaattafunktio.

**a)** $h(x)=\dfrac{1}{x+1}$ **b)** $h(x)=\dfrac{2x}{6-3x}$

### RATKAISU

**a)** Derivoidaan funktio $h(x)=\dfrac{1}{x+1}$ käyttäen osamäärän derivointisääntöä.

$$\mathrm{D}\frac{f}{g}=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$$

$$\begin{aligned}h'(x)&=\mathrm{D}\frac{1}{x+1}\\&=\frac{\mathrm{D}1\cdot(x+1)-1\cdot\mathrm{D}(x+1)}{(x+1)^2}\\&=\frac{0\cdot(x+1)-1\cdot 1}{(x+1)^2}\\&=-\frac{1}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

**Huomaa!**
Muista ilmoittaa derivaattafunktion määrittelyehto.

Rationaalifunktio $h$ ja sen derivaattafunktio $h'$ ovat määriteltyjä, kun $x+1\neq 0$ eli $x\neq -1$.

**b)** Derivoidaan funktio $h(x)=\dfrac{2x}{6-3x}$ käyttäen osamäärän derivointisääntöä.

$$\mathrm{D}\frac{f}{g}=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$$

$$\begin{aligned}h'(x)&=\frac{\mathrm{D}(2x)\cdot(6-3x)-2x\cdot\mathrm{D}(6-3x)}{(6-3x)^2}\\&=\frac{2\cdot(6-3x)-2x\cdot(-3)}{(6-3x)^2}\\&=\frac{12-6x+6x}{(6-3x)^2}\\&=\frac{12}{(6-3x)^2}\end{aligned}$$

Rationaalifunktio $h$ ja sen derivaattafunktio $h'$ ovat määriteltyjä, kun $6-3x\neq 0$ eli $x\neq 2$.

### VASTAUS

**a)** $h'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$, kun $x\neq -1$

**b)** $h'(x)=\dfrac{12}{(6-3x)^2}$, kun $x\neq 2$

Potenssifunktio $x^n$, kun $n = 2, 3, 4, \ldots$, opittiin derivoimaan luvussa 4.1 säännöllä $\mathrm{D}x^n = nx^{n-1}$. Tarkastellaan seuraavaksi, miten potenssifunktio derivoidaan, kun eksponentti on negatiivinen kokonaisluku.

**Määritelmä**

$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, kun $x \neq 0$.

Esimerkiksi derivoitaessa funktiota $x^{-5}$ voidaan käyttää hyväksi tietoa, että $x^{-5} = \frac{1}{x^5}$.

$\mathrm{D}\frac{f}{g} = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}x^{-5} &= \mathrm{D}\frac{1}{x^5} \\
&= \frac{\mathrm{D}1 \cdot x^5 - 1 \cdot \mathrm{D}x^5}{(x^5)^2} \\
&= \frac{0 \cdot x^5 - 5x^4}{x^{10}} \\
&= \frac{-5x^4}{x^{10}} \\
&= -5x^{4-10} = -5x^{-6}
\end{aligned}$$

**Huomaa!**

Funktio $x^{-5}$ ja sen derivaattafunktio $-5x^{-6}$ ovat määriteltyjä, kun $x \neq 0$.

Saatiin selville, että $\mathrm{D}x^{-5} = -5x^{-6}$, kun $x \neq 0$.

Edellisen perusteella näyttäisi siltä, että derivointisääntö $\mathrm{D}x^n = nx^{n-1}$ toimii myös, kun eksponentti on negatiivinen kokonaisluku. Osoittautuu, että tämä sääntö pitää paikkansa, kun $n$ on mikä tahansa kokonaisluku.

**Huomaa!**

Derivointisääntö pitää paikkansa, kun vasen ja oikea puoli ovat määriteltyjä. On siis oltava $x \neq 0$, kun $n \leq 1$.

**Potenssifunktion derivointisääntö** — Lause

Olkoon $n$ kokonaisluku. Tällöin

$$\mathrm{D}x^n = nx^{n-1}.$$

**TODISTUS**

Lause on todistettava kaikille eksponentin $n$ kokonaislukuarvoille eli arvoille $n = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ .

**1)** Lause on jo aiemmin todistettu tapauksessa $n = 2, 3, 4, \ldots$ (luku 4.1, tehtävä 202).

**Huomaa!**

$0^0$ ei ole määritelty.

$\frac{1}{0}$ ei ole määritelty.

**2)** Tapauksessa $n = 1$ tarkasteltava funktio on identtinen funktio $x^1 = x$, jonka derivaatta on $1$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.
Toisaalta $1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$, kun $x \neq 0$.

Siis $\mathrm{D}x^1 = 1 \cdot x^{1-1}$, kun $x \neq 0$.

**Huomaa!**

Vaikka potenssifunktion derivointikaavaa ei voi käyttää identtiselle funktiolle $x$ ja vakiofunktiolle $c$, kun $x = 0$, niin luvun 3 perusteella tiedämme, että

- jos $f(x) = x$, niin $f'(x) = 1$ kaikilla muuttujan $x$ arvoilla. Funktio $x$ on siis derivoituva myös kohdassa $0$.
- jos $f(x) = c$, niin $f'(x) = 0$ kaikilla muuttujan $x$ arvoilla. Vakiofunktio on siis derivoituva myös kohdassa $0$.

**3)** Tapauksessa $n = 0$ tarkasteltava funktio on vakiofunktio $x^0 = 1$, kun $x \neq 0$. Vakiofunktion derivaatta on $0$.
Toisaalta $0 \cdot x^{0-1} = 0 \cdot x^{-1} = 0$, kun $x \neq 0$.

Siis $\mathrm{D}x^0 = 0 \cdot x^{0-1}$, kun $x \neq 0$.

**4)** Tapaus $n = -1, -2, -3, \ldots$ seuraa funktioiden osamäärän derivointisäännöstä. Tutkitaan funktiota $x^{-k}$, kun $x \neq 0$ ja $k = 1, 2, 3, \ldots$ . Lasketaan tämän funktion derivaatta osamäärän derivointisäännön avulla.

$$\mathrm{D}\frac{f}{g} = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$\mathrm{D}x^n = nx^{n-1}$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$ (kohdat 1 ja 2).

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}x^{-k} &= \mathrm{D}\frac{1}{x^k} \\
&= \frac{\mathrm{D}1 \cdot x^k - 1 \cdot \mathrm{D}x^k}{(x^k)^2} \\
&= \frac{0 \cdot x^k - kx^{k-1}}{x^{2k}} \\
&= \frac{-kx^{k-1}}{x^{2k}} \\
&= -kx^{k-1-2k} \\
&= -kx^{-k-1}
\end{aligned}$$

Saatiin tulos, jonka mukaan $\mathrm{D}x^{-k} = -kx^{-k-1}$, kun $x \neq 0$ ja $k = 1, 2, 3, \ldots$ . Merkitsemällä $-k = n$, saadaan $\mathrm{D}x^n = nx^{n-1}$, $x \neq 0$, kun $n = -1, -2, -3, \ldots$, joten väite on todistettu, kun $n$ on negatiivinen kokonaisluku.

Kohtien 1, 2, 3 ja 4 perusteella derivointisääntö on todistettu. □

## ESIMERKKI 2

Määritä funktion $f(x)=\frac{4}{x^3}+\frac{x^4}{3}$ derivaattafunktion nollakohdat.

### RATKAISU

Rationaalifunktio $f$ on määritelty ja derivoituva, kun $x \neq 0$.

Derivoidaan.

$$f'(x)=\mathrm{D}\left(\frac{4}{x^3}+\frac{x^4}{3}\right)$$

$\frac{4}{x^3}=4\cdot\frac{1}{x^3}=4x^{-3}$

$$=\mathrm{D}\left(4x^{-3}+\frac{1}{3}x^4\right)$$

$\mathrm{D}\,x^n=nx^{n-1}$

$$=4\cdot(-3)x^{-3-1}+\frac{1}{3}\cdot 4x^{4-1}$$

$$=-12x^{-4}+\frac{4}{3}x^3$$

$$=\frac{-12}{x^4}+\frac{4x^3}{3}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$f'(x)=0$$

$$\frac{-12}{x^4}+\frac{4x^3}{3}=0 \qquad \big|\cdot 3x^4 \quad (\neq 0)$$

$$\frac{3\cancel{x^4}^{\,1}\cdot(-12)}{\cancel{x^4}_{\,1}}+\frac{\cancel{3}^{\,1}x^4\cdot 4x^3}{\cancel{3}_{\,1}}=0$$

$$-36+4x^7=0$$

$$4x^7=36 \qquad \big|:4$$

$$x^7=9$$

$$x=\sqrt[7]{9}$$

Saatu ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon $x \neq 0$.

### VASTAUS

$x=\sqrt[7]{9}$

## ESIMERKKI 3

Määritä funktion $s(x)=\frac{1+x}{1-x}$ kuvaajalle kohtaan $x=-2$ piirretyn tangentin yhtälö.

### RATKAISU

Funktio $s$ on määritelty, kun $1-x\neq 0$ eli $x\neq 1$.

Määritetään kuvaajan piste, johon tangentti piirretään.

$$y=s(-2)=\frac{1+(-2)}{1-(-2)}=-\frac{1}{3}$$

Tangentti piirretään kuvaajan pisteeseen $(-2,-\frac{1}{3})$.

Funktion $s$ kuvaajalle kohtaan $x=-2$ piirretyn tangentin kulmakerroin $k=s'(-2)$.

Derivoidaan funktio $s(x)=\frac{1+x}{1-x}$ ja lasketaan tangentin kulmakerroin.

$$s'(x)=\frac{\mathrm{D}(1+x)\cdot(1-x)-(1+x)\cdot\mathrm{D}(1-x)}{(1-x)^2} \qquad \mathrm{D}\frac{f}{g}=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$$

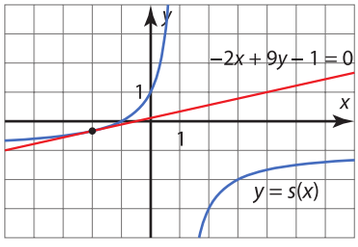
$$=\frac{1\cdot(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{2}{(1-x)^2}$$

$$k=s'(-2)=\frac{2}{(1-(-2))^2}=\frac{2}{9}$$

**Graafinen tarkistus**




Tangentti kulkee pisteen $(-2,-\frac{1}{3})$ kautta ja sen kulmakerroin on $\frac{2}{9}$. Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y-(-\tfrac{1}{3})=\frac{2}{9}(x-(-2)) \qquad y-y_0=k(x-x_0)$$

$$y+\frac{1}{3}=\frac{2}{9}(x+2) \quad |\cdot 9 \qquad (x_0, y_0)=(-2,-\tfrac{1}{3}) \text{ ja } k=\frac{2}{9}$$

$$9y+3=2(x+2)$$

$$9y+3=2x+4$$

$$-2x+9y-1=0$$

**Huomaa!**
Tangentin yhtälön voi antaa myös ratkaistussa muodossa $y=\frac{2}{9}x+\frac{1}{9}$.

### VASTAUS

$-2x+9y-1=0$

## Harjoitustehtäviä

**Sarja I**

**273.** Määritä funktion $h$ derivaattafunktio.

E1

**a)** $h(x)=\dfrac{x}{5-x}$ **b)** $h(x)=\dfrac{3-x^2}{x+1}$

**274.** Määritä funktion $f(x)=\dfrac{4x}{x^2-4}$

**a)** derivaattafunktio

**b)** derivaatta kohdassa 0.

**275.** Derivoi.

E2

**a)** $t(x)=x^{-8}$

**b)** $s(x)=\dfrac{5}{x^3}$

**c)** $r(x)=\dfrac{-1}{6x^6}$

**276.** Määritä funktion $r(x)=\dfrac{2-x}{x^3}$ derivaattafunktion nollakohdat.

**277.** Määritä funktion $f(x)=\dfrac{2}{x^3-4x^2}$ derivaattafunktion nollakohdat.

**278.** Määritä funktion $s(x)=\dfrac{x-2}{x^2+1}$ kuvaajalle kohtaan $x=-1$ piirretyn tangentin yhtälö.

E3

**279.** Määritä funktion $f(x)=x^{-4}$ kuvaajalle kohtaan $x=-1$ piirretyn normaalin yhtälö. Tarkista tulos piirtämällä.

**280.** Määritä $f(1)$ ja $f'(1)$, kun

**a)** $f(x)=\dfrac{6}{x+2}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x^3-7}{5}$.

**281.** Missä pisteissä ja missä kulmassa funktion $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+2}$ kuvaaja leikkaa $x$-akselin? Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.

**282.** Millä muuttujan $x$ arvoilla funktion $f(x)=\dfrac{-2x}{1+x^3}$ derivaatta on negatiivinen?

**283.** Määritä vakio $a$ niin, että funktion $f(x)=\dfrac{a+2x}{x^2-3}$ derivaatalla on täsmälleen yksi nollakohta.

## Sarja II

**284.** Määritä funktion $s$ derivaattafunktio.

**a)** $s(x)=\dfrac{2+x}{x^2}$

**b)** $s(x)=\dfrac{3x}{x^2-5x+4}$

**285.** Derivoi.

**a)** $u(x)=\dfrac{5x^{12}}{6}$ **b)** $v(x)=\dfrac{6}{5x^{12}}$

**286.** Olkoon $f(x)=\dfrac{(3x-5)^2}{x^3}$.

**a)** Määritä funktion $f$ derivaattafunktio.

**b)** Onko funktio $f$ aidosti vähenevä?

**287.** Määritä funktion $g(x)=\dfrac{x^2-3x}{x-4}$ derivaattafunktion nollakohdat.

**288.** Määritä vakio $a$ niin, että funktion $f(x)=\dfrac{a^2-4}{x-a}$ derivaatta on aina positiivinen.

**289.** Määritä funktion $f(x)=\dfrac{5x}{2x^2-18}$ kuvaajalle kohtaan $x=-2$ piirretyn **a)** tangentin **b)** normaalin yhtälö.

**290.** Mihin funktion $h(x)=-9x^{-3}+2$ kuvaajan pisteeseen piirretty tangentti on suoran $x-3y+6=0$ suuntainen?

**291.** Funktion $f(x)=\dfrac{2x-x^2}{1-x^3}$ kuvaajalle kohtaan $x=-2$ piirretty tangentti rajaa koordinaattiakselien kanssa kolmion.

**a)** Määritä geometriaohjelman avulla kolmion pinta-alan likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.

**b)** Laske kolmion pinta-alan tarkka arvo.

**292.** Osoita, että funktioiden $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ ja $g(x)=\dfrac{x-14}{x-6}$ kuvaajat leikkaavat kohtisuorasti.

**293.** Määritä $f(-1)$, $f'(-1)$ ja $f''(-1)$, kun $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^3+5}$.

**294.** Määritä vakio $a$ niin, että funktio $g(x)=\dfrac{x+1}{x+a^2}$, kun $x>0$, on aidosti kasvava.

**295.** Olkoon $f(x)=\dfrac{1+x}{1-ax^2}$.

**a)** Määritä funktion $f$ derivaattafunktio $f'$.

**b)** Määritä geometriaohjelmalla vakio $a$ niin, että derivaattafunktiolla $f'$ ei ole nollakohtia.

**c)** Vahvista b-kohdassa saamasi tulos laskemalla.

# 5.2 Rationaalifunktion kulku

**TUTKIMUS**

Piirrä funktion $f(x)=\dfrac{x^2+15}{x-1}$ kuvaaja.

**a)** Millä muuttujan $x$ arvoilla funktio $f$ on määritelty?

**b)** Mihin kuvaajan pisteisiin piirretyt tangentit ovat vaakasuoria?

**c)** Millä väleillä funktio $f$ on aidosti vähenevä?

**d)** Millä väleillä funktion $f$ derivaatta on negatiivinen?

## Rationaalifunktion ääriarvot

Kun tutkitaan rationaalifunktion kulkua derivaattafunktion avulla ja laaditaan kulkukaavio, on oltava erityisen tarkkana nimittäjän mahdollisten nollakohtien kanssa.

**ESIMERKKI 1**

Olkoon $f(x)=\dfrac{2-x^2}{2x-3}$.

**a)** Millä väleillä funktio $f$ on kasvava ja millä vähenevä?

**b)** Määritä funktion $f$ ääriarvokohdat.

**RATKAISU**

**Määrittelyehto**
Rationaalifunktiota $f$ ei ole määritelty nimittäjän nollakohdissa.

Funktio $f$ on määritelty, kun $2x-3\neq 0$ eli $x\neq\dfrac{3}{2}$.

Funktion $f$ kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Derivoidaan.

$$f'(x)=\frac{-2x\cdot(2x-3)-(2-x^2)\cdot 2}{(2x-3)^2}$$

$$\mathrm{D}\frac{f}{g}=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$$

$$=\frac{-4x^2+6x-4+2x^2}{(2x-3)^2}$$

$$=\frac{-2x^2+6x-4}{(2x-3)^2}$$

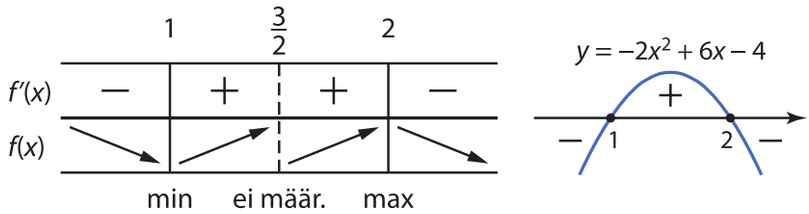
Derivaattafunktion $f'(x)=\dfrac{-2x^2+6x-4}{(2x-3)^2}$ nimittäjä on määrittelyjoukossaan positiivinen, joten osoittaja määrää derivaattafunktion merkit. Osoittaja on polynomifunktio, ja siksi jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Ratkaistaan osoittajan nollakohdat.

$-2x^2+6x-4=0$ $\quad a=-2,\ b=6,\ c=-4$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot(-2)\cdot(-4)}}{2\cdot(-2)}=\frac{-6\pm\sqrt{4}}{-4}=\frac{-6\pm2}{-4}$$

$$x=\frac{-6+2}{-4}=1 \quad \text{tai} \quad x=\frac{-6-2}{-4}=2$$

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Merkit voidaan päätellä hahmottelemalla osoittajan kuvaaja, joka on alaspäin aukeava paraabeli.



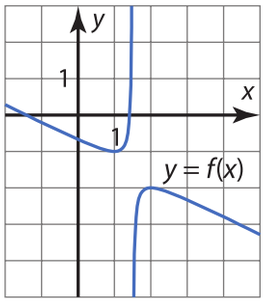

**Huomaa!**
Kohta, jossa funktio ei ole määritelty, merkitään kulkukaavioon katkoviivalla, jotta tämä kohta tulee huomioiduksi kulkukaaviota tulkittaessa.

**a)** Kulkukaavion perusteella funktio $f$ on kasvava välillä $1\le x<\dfrac{3}{2}$ ja välillä $\dfrac{3}{2}<x\le 2$.

Funktio $f$ on vähenevä välillä $x\le 1$ ja välillä $x\ge 2$.

**b)** Kulkukaavion perusteella funktiolla $f$ on maksimikohta $x=2$ ja minimikohta $x=1$.

**Graafinen tarkistus**




**VASTAUS**

**a)** kasvava välillä $1\le x<\dfrac{3}{2}$ ja välillä $\dfrac{3}{2}<x\le 2$, vähenevä välillä $x\le 1$ ja välillä $x\ge 2$

**b)** minimikohta $x=1$, maksimikohta $x=2$

## ESIMERKKI 2

Määritä funktion $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-6x+9}$ ääriarvokohdat ja ääriarvot.

### RATKAISU

Selvitetään ensin funktion määrittelyehto. Ratkaistaan nimittäjän nollakohdat.

$x^2-6x+9=0$

$x=3$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

Funktio $f$ on määritelty, kun $x\neq 3$.

Funktion $f$ kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Derivoidaan.

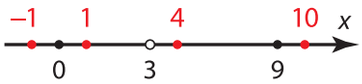
$$f'(x)=\mathrm{D}\left(\frac{x^3}{x^2-6x+9}\right)=\frac{x^3-9x^2}{(x-3)^3}$$ Derivoidaan funktio laskimella.

**Huomaa!**
Laskin antaa derivaattafunktion supistetussa muodossa.

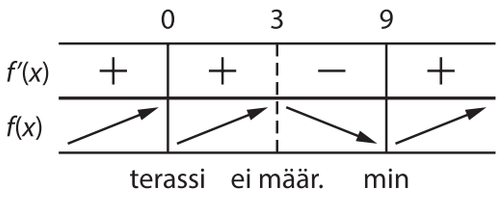
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$\dfrac{x^3-9x^2}{(x-3)^3}=0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x=0$ tai $x=9$

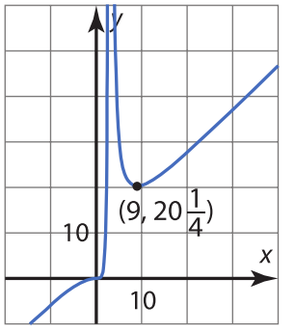



Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Derivaattafunktio $f'$ on rationaalifunktio, ja siksi jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa 0 ja 9, sekä kohdassa 3, jossa $f'$ ei ole määritelty. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.




| $x$ | $f'(x)$ | merkki |
|---|---|---|
| –1 | 0,15… | + |
| 1 | 1 | + |
| 4 | –80 | – |
| 10 | 0,29… | + |

**Graafinen tarkistus**




Kulkukaavion perusteella funktiolla $f$ ei ole maksimikohtia, mutta sen minimikohta on $x=9$. Funktion minimiarvo on

$$f(9)=\frac{9^3}{9^2-6\cdot 9+9}=\frac{81}{4}=20\frac{1}{4}.$$

### VASTAUS

minimikohta $x=9$ ja minimiarvo $20\dfrac{1}{4}$

## Rationaalifunktion suurin ja pienin arvo

Rationaalifunktion suurinta ja pienintä arvoa etsittäessä pätevät samat periaatteet kuin polynomifunktioilla. Koska suljetulla välillä $[a, b]$ määritelty rationaalifunktio $f$ on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä $]a, b[$, niin funktion $f$ suurin ja pienin arvo löytyvät derivaattafunktion nollakohdista tai välin päätepisteistä (luku 4.3, lause sivulla 109).

**ESIMERKKI 3**

Määritä funktion $f(x)=\dfrac{3x^3}{x^2-4}$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 1]$.

**RATKAISU**

Ratkaistaan nimittäjän nollakohdat.

$$\begin{aligned} x^2-4&=0\\ x^2&=4\\ x&=2 \quad \text{tai} \quad x=-2 \end{aligned}$$

Funktio $f$ on määritelty suljetulla välillä $[-1, 1]$, sillä nimittäjän nollakohdat $x=-2$ ja $x=2$ eivät kuulu tarkasteluvälille. Siis rationaalifunktio $f(x)=\dfrac{3x^3}{x^2-4}$ saavuttaa välillä $[-1, 1]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välille $]-1, 1[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Derivoidaan.

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{9x^2\cdot(x^2-4)-3x^3\cdot(2x)}{(x^2-4)^2}\\ &=\frac{9x^4-36x^2-6x^4}{(x^2-4)^2}\\ &=\frac{3x^4-36x^2}{(x^2-4)^2} \end{aligned}$$

$$\mathrm{D}\frac{f}{g}=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$f'(x) = \frac{3x^4 - 36x^2}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{3x^4 - 36x^2}{(x^2-4)^2} = 0 \qquad \big| \cdot (x^2-4)^2 \quad (\neq 0)$$

$$3x^4 - 36x^2 = 0$$

$$3x^2(x^2 - 12) = 0$$

$$3x^2 = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 12 = 0$$

$$x^2 = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 = 12$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \sqrt{12} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{12}$$

Derivaattafunktion nollakohdista välille $]-1, 1[$ kuuluu ainoastaan $x = 0$.

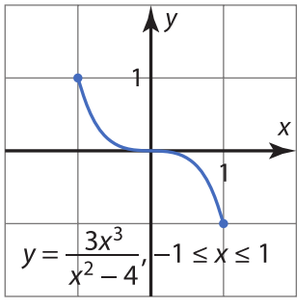
Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$$f(-1) = \frac{3 \cdot (-1)^3}{(-1)^2 - 4} = \frac{-3}{-3} = 1 \qquad \text{suurin}$$

$$f(1) = \frac{3 \cdot 1^2}{1^2 - 4} = \frac{3}{-3} = -1 \qquad \text{pienin}$$

$$f(0) = \frac{3 \cdot 0^2}{0^2 - 4} = 0$$

**Graafinen tarkistus**




**VASTAUS**

suurin arvo 1, pienin arvo $-1$

**Määritelmä**
Funktion arvojoukko muodostuu kaikista funktion saamista arvoista.

**Lause**
Suljetulla välillä jatkuva funktio saa tällä välillä suurimman ja pienimmän arvon sekä kaikki arvot niiden väliltä.

Funktion arvojoukkona on siis suljettu väli, jonka päätepisteinä ovat funktion suurin ja pienin arvo.

## ESIMERKKI 4

Määritä funktion $g(x)=\dfrac{2-4x}{x^2+2}$ arvojoukko, kun $-3 \le x \le 2$.

### RATKAISU

Nimittäjä $x^2+2 \ge 2$ kaikilla $x$:n arvoilla. Nimittäjällä ei siis ole nollakohtia, joten funktio $g$ on määritelty koko annetulla välillä $-3 \le x \le 2$.

Rationaalifunktio $g$ on jatkuva, joten se saa kaikki arvot suurimman ja pienimmän arvonsa välillä. Määritetään suurin ja pienin arvo.

Funktio $g$ saavuttaa välillä $[-3, 2]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välille $]-3, 2[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Funktion $g$ derivaattafunktio on

$$g'(x)=\mathrm{D}\left(\frac{2-4x}{x^2+2}\right)=\frac{4x^2-4x-8}{(x^2+2)^2}.$$ Derivoidaan funktio laskimella.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{4x^2-4x-8}{(x^2+2)^2}=0$$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x=-1$ tai $x=2$

**Huomaa!**
Funktion arvo välin $[-3, 2]$ päätepisteissä lasketaan joka tapauksessa. Riittää siis määrittää ne derivaatan nollakohdat, jotka ovat avoimella välillä $]-3, 2[$.

Derivaattafunktion nollakohdista avoimelle välille $]-3, 2[$ kuuluu ainoastaan $x=-1$.

Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

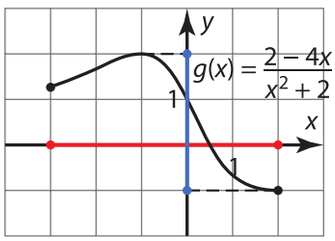
$$g(-3)=\frac{2-4\cdot(-3)}{(-3)^2+2}=\frac{14}{11} \quad (\approx 1{,}3)$$

$$g(2)=\frac{2-4\cdot 2}{2^2+2}=-1 \qquad \text{pienin}$$

$$g(-1)=\frac{2-4\cdot(-1)}{(-1)^2+2}=2 \qquad \text{suurin}$$

Jatkuva funktio $g$ saa kaikki arvot välillä $[-1, 2]$.

**Graafinen tarkistus**




Kuvaajasta havaitaan, että välillä $[-3, 2]$ funktio saa arvot $[-1, 2]$.

### VASTAUS

Arvojoukko on $[-1, 2]$.

**ESIMERKKI 5** Syventävä

Määritä funktion $f(x)=\dfrac{x^4+16}{x^2}$ suurin ja pienin arvo.

**RATKAISU**

**Huomaa!**
Aina, kun määrittelyjoukko ei ole suljettu väli, on käytettävä apuna funktion kulkukaaviota ja pääteltävä erikseen suurimman ja pienimmän arvon olemassaolo.

Funktio $f$ on määritelty, kun $x \neq 0$. Laaditaan funktion kulkukaavio ja päätellään sen perusteella funktion suurin ja pienin arvo, jos ne ovat olemassa.

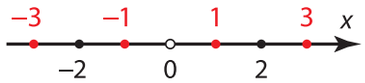
Funktion $f$ derivaattafunktio on

$$f'(x)=\frac{2x^4-32}{x^3}.$$ Derivoidaan funktio laskimella.

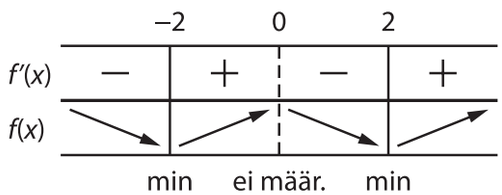
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{2x^4-32}{x^3}=0$$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x=-2$ tai $x=2$




Derivaattafunktio $f'$ on rationaalifunktio, ja siksi jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa $-2$ ja $2$, sekä kohdassa $0$, jossa $f'$ ei ole määritelty. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla ja laaditaan funktion $f$ kulkukaavio.



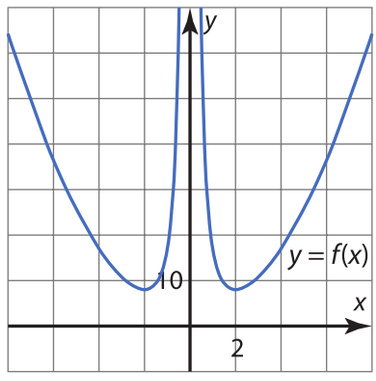

| $x$ | $f'(x)$ | merkki |
|---|---|---|
| $-3$ | $-4{,}81\ldots$ | $-$ |
| $-1$ | $30$ | $+$ |
| $1$ | $-30$ | $-$ |
| $3$ | $4{,}81\ldots$ | $+$ |

**Huomaa!**
Funktion suurin ja pienin arvo ovat aina myös paikallisia ääriarvoja.

Kulkukaavion perusteella funktiolla $f$ ei ole yhtään maksimikohtaa, joten sillä ei ole suurinta arvoa.

Minimikohtia ovat $x=-2$ ja $x=2$, joten kulkukaavion perusteella funktion pienin arvo on joko $f(-2)$ tai $f(2)$.

**Graafinen tarkistus**




$$f(-2)=\frac{(-2)^4+16}{(-2)^2}=\frac{16+16}{4}=8$$ pienin

$$f(2)=\frac{2^4+16}{2^2}=\frac{16+16}{4}=8$$ pienin

**VASTAUS**

Funktion pienin arvo on $8$, suurinta arvoa ei ole.

## Harjoitustehtäviä

**Sarja I**

### Rationaalifunktion ääriarvot

**296.** Piirrä funktion $f(x)=\dfrac{x^3-2x}{4-x^2}$ kuvaaja. Määritä kuvaajan avulla yhden desimaalin tarkkuudella funktion

a) määrittelyehto
b) ääriarvokohdat
c) ääriarvot.

**297.** Olkoon $f(x)=\dfrac{3x^2-9}{x+2}$.

E1

a) Millä väleillä funktio $f$ on kasvava ja millä vähenevä?
b) Määritä funktion $f$ ääriarvokohdat.

**298.** Olkoon $f(x)=\dfrac{21}{x^4+7}$.

a) Millä väleillä funktio $f$ on kasvava ja millä vähenevä?
b) Määritä funktion $f$ ääriarvokohdat ja ääriarvot.

**299.** Määritä funktion $f(x)=\dfrac{x^4}{8x-4x^2}$ ääriarvokohdat ja ääriarvot.

E2

**300.** Määritä funktion $f(x)=\dfrac{3x^3}{4-x^2}$ ääriarvokohdat.

**301.** Osoita, että funktiolla $h(x)=\dfrac{x^7}{x^2+1}$ ei ole ääriarvoja.

**302.** Maria Agnesi (1718–1799) oli italialainen matemaatikko, jonka on sanottu olleen ensimmäinen merkittävä naismatemaatikko 400-luvun jälkeen. Hän tutki *Agnesin noita* nimellä tunnettua käyrää $y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$, jossa $a\neq 0$ on vakio.

a) Piirrä käyriä vakion $a$ eri arvoilla.
b) Määritä *Agnesin noidan* ääriarvot, kun $a=2$.

### Rationaalifunktion suurin ja pienin arvo

**303.** Määritä funktion $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ suurin ja pienin arvo välillä $[-2, 3]$.

E3

**304.** Määritä funktion $g(x)=\dfrac{24x^2}{1+x^4}$ suurin ja pienin arvo välillä $[-2, 2]$.

**305.** Lintuvuorella asustavan kiislapopulaation yksilömäärän (tuhatta yksilöä) havaittiin kuuden vuoden tutkimusjakson aikana noudattavan likimain funktiota $f(t)=5-\dfrac{2-t}{t^2-6t+10}$, missä $t$ on aika vuosina tutkimusjakson alusta. Millä hetkellä populaation yksilömäärä oli suurimmillaan? Kuinka paljon kiisloja oli tällöin?

**306.** Olkoon $g(x)=\dfrac{8}{(x-3)^2+2}$. Määritä funktion $g$ arvojoukko, kun $0\le x\le 5$.

E4

**307.** Osoita, että funktio $h(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+2}+3$ saa vain positiivisia arvoja.

## Sarja II

### Rationaalifunktion ääriarvot

**308.** Piirrä funktion $f(x)=\dfrac{2x^5-4x-1}{x^4-4}$ kuvaaja. Määritä kuvaajan avulla yhden desimaalin tarkkuudella funktion

**a)** määrittelyehto
**b)** ääriarvokohdat
**c)** ääriarvot.
**d)** Onko funktiolla suurin tai pienin arvo?

**309.** Olkoon $f(x)=\dfrac{x^2-12}{x-4}$.

**a)** Millä väleillä funktio $f$ on kasvava ja millä vähenevä?
**b)** Määritä funktion ääriarvokohdat ja ääriarvot.

**310.** Määritä funktion $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}$ ääriarvokohdat.

**311.** Määritä funktion $g(x)=\dfrac{-x^3}{2x^2-4}$ määrittelyjoukko ja ääriarvokohdat.

**312.** Määritä funktion $f(x)=\dfrac{x^5}{3-x^2}$ ääriarvokohdat ja ääriarvot.

**313.** Määritä vakio $a$ niin, että funktiolla $f(x)=\dfrac{(x-a)^2}{x^2+3}$ on maksimiarvo kohdassa $x=-1$. Määritä maksimiarvo. Onko funktiolla tällöin muita ääriarvoja?

### Rationaalifunktion suurin ja pienin arvo

**314.** Määritä funktion $f(x)=\dfrac{x^3-20x+16}{-x}$ suurin ja pienin arvo välillä $[1, 4]$.

**315.** Määritä funktion $g(x)=\dfrac{x-x^2}{3x+1}$ suurin ja pienin arvo välillä $[0, 3]$.

**316.** Olkoon funktio $f(x)=\dfrac{8x^2+2}{x^4+3}$. Määritä funktion $f$ arvojoukko, kun $-1 \le x \le 2$.

**317.** E5 Määritä funktion $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}$ suurin ja pienin arvo.

**318.** Määritä funktion $h(x)=\dfrac{2x^2+12x+21}{x^2+6x+10}$ suurin ja pienin arvo.

**319.** Savannilla tehtiin lantakuoriaistutkimusta. Tutkimustulosten perusteella tehtiin arvio, että alueen lantakuoriaisten määrä (tuhatta yksilöä) noudatti likimain funktiota $f(t)=7-\dfrac{4t-10}{t^2-4t+8}$, missä $t$ on aika kuukausina tutkimusjaksolla $0 \le t \le 8$. Millä hetkellä lantakuoriaisten määrä muuttui nopeimmin? Mikä oli lukumäärän muutosnopeus?

**320.** Määritä funktion $g(x)=x^4+\dfrac{4}{x^2}-8x$ ääriarvokohdat. Onko funktiolla suurinta tai pienintä arvoa?

**321.** Määritä vakio $a$ niin, että funktio $g(x)=\dfrac{ax^2+4x+a}{x^2+1}$ saa vain negatiivisia arvoja.

**322.** Onko funktiolla $f(x)=\dfrac{1-x^4}{x^2}$ suurinta tai pienintä arvoa? Perustele.

# 6 Derivaatan sovelluksia

*Tässä luvussa ratkaistaan sovellustehtäviä derivaattafunktion avulla ja syvennetään osaamista käyrän tangentin määrittämisestä.*

## TUTKIMUS

Piirrä geometriaohjelmalla paraabeli $y = -x^2 + 6$ ja valitse paraabelilta piste $A$, jonka $x$- ja $y$-koordinaatit ovat positiivisia.

Piirrä suorakulmio, jonka kaksi kärkeä ovat $x$-akselilla ja kaksi kärkeä paraabelilla niin, että jo valittu piste $A$ on yksi kärjistä. Hyödynnä geometriaohjelman toimintoja (’piirrä normaali’, ’käyrien leikkauspiste’, …) niin, että pisteen $A$ siirtäminen paraabelilla säilyttää nelikulmion suorakulmaisena.

Mittaa geometriaohjelman avulla suorakulmion pinta-ala.

1) Siirrä pistettä $A$ paraabelilla ja päättele, mikä on suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala yhden desimaalin tarkkuudella, kun pisteen $A$ $x$- ja $y$-koordinaatit ovat positiivisia.

2) Mikä on suorakulmion $x$-akselilla olevan sivun pituus pisteen $A = (x, y)$ koordinaattien avulla ilmaistuna?

3) Mikä on suorakulmion korkeus pisteen $A = (x, y)$ koordinaattien avulla ilmaistuna?

4) Muodosta funktio $f(x)$, joka ilmaisee suorakulmion pinta-alan, kun muuttujana on pisteen $A$ $x$-koordinaatti. Mikä on funktion määrittelyjoukko?

5) Piirrä funktion $f(x)$ kuvaaja ja määritä suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala.

## Suurin ja pienin arvo sovellustehtävissä

Sovellustehtävissä tärkeintä on osata mallintaa ongelma ja löytää tutkittava funktio. Pelkkä funktion lausekkeen löytäminen ei riitä, vaan on kiinnitettävä erityistä huomiota myös määrittelyjoukkoon.

Suurimman ja pienimmän arvon määrittäminen helpottuu huomattavasti, jos tutkittavana oleva jatkuva ja derivoituva funktio on määritelty nimenomaan suljetulla välillä. Esimerkissä 1 havaitaan, että toisinaan funktion määrittelyjoukoksi voidaan järjestää suljettu väli.

**ESIMERKKI 1**

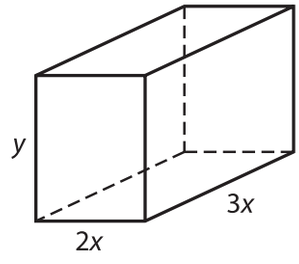
Akvaarioliike suunnittelee uutta akvaariomallia. Akvaario on suorakulmainen särmiö, jonka pohjan pituus on puolitoistakertainen pohjan leveyteen verrattuna. Akvaarion nurkkia kiertää alumiinilista, jota on käytettävissä 8,0 metriä akvaariota kohti. Miten akvaarion mitat pitää valita, jotta sen tilavuus olisi mahdollisimman suuri? Mikä on akvaarion suurin tilavuus?

**RATKAISU**

**Huomaa!**
Kun pohjan leveydeksi valitaan $2x$, niin pituus on kokonaislukukertoiminen $3x$.

Merkitään akvaarion pohjan leveyttä $2x$:llä, jolloin pituus on $1{,}5 \cdot 2x = 3x$.

Merkitään akvaarion korkeutta kirjaimella $y$.




Alumiinilistaa on käytettävissä 8,0 metriä eli särmien pituuksien summan pitää olla 8,0. Ratkaistaan lauseke muuttujalle $y$.

$4 \cdot 2x + 4 \cdot 3x + 4 \cdot y = 8$ Yhtälön voi ratkaista laskimella.

$y = 2 - 5x$

Muodostetaan akvaarion tilavuuden lauseke.

$V = 2x \cdot 3x \cdot y$ Sijoitetaan $y = 2 - 5x$.

$= 6x^2 \cdot (2 - 5x)$

$= -30x^3 + 12x^2$

Akvaarion sivujen pituuksien on oltava positiivisia. Muodostetaan tämän perusteella epäyhtälöt, joista voidaan päätellä funktion $V$ määrittelyehto.

$$\begin{array}{lll} x > 0 & \text{ja} & y > 0 \\ & & 2 - 5x > 0 \\ & & x < 0{,}4 \end{array}$$

**Huomaa!**
Kun $x = 0$, akvaario surkastuu janaksi, ja kun $x = 0{,}4$, akvaario surkastuu suorakulmioksi.

Hyväksymällä mukaan tapaukset, joissa $x = 0$ ja $x = 0{,}4$, saadaan funktion $V$ määrittelyjoukoksi suljettu väli $[0;\, 0{,}4]$.

Akvaarion tilavuus muuttujan $x$ funktiona on

$$V(x) = -30x^3 + 12x^2, \text{ kun } 0 \le x \le 0{,}4.$$

**Huomaa!**
Funktio $V$ on polynomifunktio, ja siksi derivoituva. Sen suurin arvo voidaan määrittää derivaattafunktion avulla.

Polynomifunktio $V$ saavuttaa välillä $[0;\, 0{,}4]$ suurimman arvonsa välille $]0;\, 0{,}4[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Funktion $V$ derivaattafunktio on $V'(x) = -90x^2 + 24x$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$-90x^2 + 24x = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = 0$ tai $x = \frac{4}{15}$ $(\approx 0{,}27)$

Derivaatan nollakohdista vain $x = \frac{4}{15}$ kuuluu välille $]0;\, 0{,}4[$.

**Huomaa!**
Funktion $V$ suurin arvo, ja sitä vastaava ääriarvokohta, voidaan etsiä myös kulkukaavion avulla avoimella välillä $]0;\, 0{,}4[$.

Lasketaan funktion $V$ arvot välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$V(0) = 0$

$V(0{,}4) = 0$

$V\left(\frac{4}{15}\right) = -30 \cdot \left(\frac{4}{15}\right)^3 + 12 \cdot \left(\frac{4}{15}\right)^2 = 0{,}28444... \approx 0{,}28$ suurin

Akvaarion tilavuus on suurin, kun $x = \frac{4}{15}$.

Suurin tilavuus on $0{,}28 \text{ m}^3 = 280 \text{ L}$.

Lasketaan akvaarion mitat, kun $x = \frac{4}{15}$.

pituus: $3x = 3 \cdot \frac{4}{15} = 0{,}8$ (m)

leveys: $2x = 2 \cdot \frac{4}{15} = 0{,}5333... \approx 0{,}53$ (m)

korkeus: $y = 2 - 5x = 2 - 5 \cdot \frac{4}{15} = 0{,}6666... \approx 0{,}67$ (m)

Suurimman akvaarion pituus on 0,80 m = 80 cm, leveys 0,53 m = 53 cm ja korkeus 0,67 m = 67 cm.

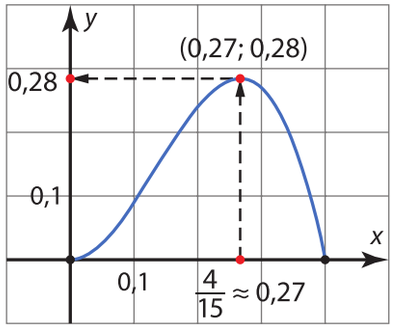
**VASTAUS**

pituus 80 cm, leveys 53 cm, korkeus 67 cm ja tilavuus 280 L

**Laskin**

Tehtävän ratkaisun voi tarkistaa myös määrittämällä funktion suurimman arvon laskimella algebrallisesti. Yleensä toiminto on `fmax`.

Piirtämällä funktion $V$ kuvaaja, voidaan tarkistaa, että tutkittavalla välillä funktiolle $V$ löydetty suurin arvo on oikein.



## ESIMERKKI 2

Leipomon tilastojen mukaan Rökälemunkin hinnan korottaminen 10 sentillä vähentää aina viikkomyyntiä 40 kappaleella. Kun munkin hinta oli 1,90 euroa, viikossa myytiin 2400 munkkia.

Millä kappalehinnalla viikon myyntitulot ovat mahdollisimman suuret? Kuinka monta munkkia tällöin myydään viikossa ja kuinka suuri on myyntitulo?

### RATKAISU

On selvitettävä, mikä on se Rökälemunkin kappalehinta, jolla viikon aikana saataisiin kassaan mahdollisimman suuri rahamäärä.

Merkitään 10 sentin hinnankorotusten lukumäärää kirjaimella $x$.

Jos hintaa korotetaan $x \cdot 10 \text{ snt} = 0{,}10x \text{ €}$, niin uusi myyntihinta on $1{,}90 + 0{,}10x$ (€/kpl).

Tällöin munkkien myyntimäärä pienenee $40x$ kappaletta ja uusi viikkomyyntimäärä on $2400 - 40x$ (kpl).

Myyntitulo saadaan kertomalla kappalehinta myyntimäärällä.

Viikon myyntitulon ilmaisee funktio

$$M(x) = (1{,}90 + 0{,}10x) \cdot (2400 - 40x) = -4x^2 + 164x + 4560 .$$

Funktion $M$ kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä.

Funktion $M$ derivaattafunktio on $M'(x) = -8x + 164$.

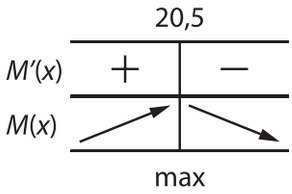
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$-8x + 164 = 0$$

$$x = \frac{-164}{-8} = 20{,}5$$

**Huomaa!**
Myyntitulon $M$ suurimman arvon voisi etsiä myös huomaamalla, että myyntitulofunktion kuvaaja $y = M(x)$ on alaspäin aukeava paraabeli, joka saa suurimman arvonsa paraabelin huipussa. Paraabelin huippu löytyy derivaatan nollakohdasta.

Laaditaan funktion $M$ kulkukaavio. Derivaattafunktio $M'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdassa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.




| $x$ | $M'(x)$ | merkki |
|---|---|---|
| 0 | 164 | + |
| 100 | –636 | – |

Kulkukaavion perusteella myyntitulo on suurin, kun $x = 20{,}5$.

Lasketaan kappalehinta, myyntimäärä ja myyntitulo kun $x = 20{,}5$.

kappalehinta: $1{,}90 + 0{,}10x = 1{,}90 + 0{,}10 \cdot 20{,}5 = 3{,}95$ (€/kpl)

myyntimäärä: $2400 - 40x = 2400 - 40 \cdot 20{,}5 = 1580$ (kpl)

myyntitulo: $M(20{,}5) = -4 \cdot (20{,}5)^2 + 164 \cdot 20{,}5 + 4560 = 6241$ (€)

**VASTAUS**

hinta 3,95 €/kpl, myyntimäärä 1580 kpl, suurin myyntitulo 6241 €

## Käyrän tangentin yhtälö (Syventävää tietoa)

Luvussa 4.4 opittiin määrittämään funktion kuvaajalle tiettyyn kohtaan piirretyn tangentin yhtälö. Seuraavassa esimerkissä opitaan määrittämään funktion kuvaajalle tietyn pisteen kautta piirrettyjen tangenttien yhtälöt.

**ESIMERKKI 3** Syventävä

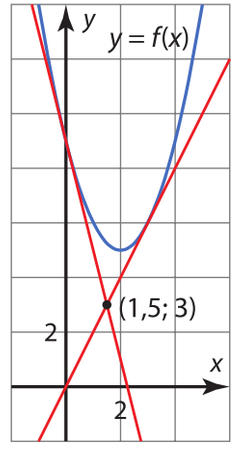
Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 9$ kuvaajalle piirretään tangentit, jotka kulkevat pisteen $(1{,}5;\ 3)$ kautta. Määritä tangenttien yhtälöt.

**RATKAISU**

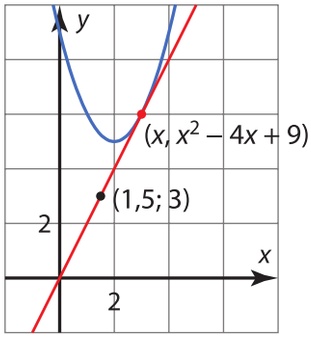
Tutkitaan, onko piste $(1{,}5;\ 3)$ funktion kuvaajalla.

Kohdassa $x = 1{,}5$ kuvaajan pisteen $y$-koordinaatti on $y = f(1{,}5) = (1{,}5)^2 - 4 \cdot (1{,}5) + 9 = 5{,}25$.

Koska $3 < 5{,}25$, niin piste $(1{,}5;\ 3)$ on ylöspäin aukeavan paraabelin $y = x^2 - 4x + 9$ alapuolella ja sen kautta voidaan piirtää kuvaajalle täsmälleen kaksi tangenttia.




Olkoon $(x, y)$ se piste, jossa tangentti sivuaa paraabelia. Koska piste on funktion $f$ kuvaajalla, sen $y$-koordinaatti on $y = f(x) = x^2 - 4x + 9$. Tangentti sivuaa paraabelia siis pisteessä $(x, x^2 - 4x + 9)$.




Tangentin kulmakerroin voidaan muodostaa kahdella eri tavalla.

**Derivaatan avulla**

Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 9$ kuvaajalle kohtaan $x$ asetetun tangentin kulmakerroin on

$k = f'(x) = 2x - 4.$

**Kahden pisteen avulla**

Pisteiden $(1{,}5;\ 3)$ ja

$(x, x^2 - 4x + 9)$ kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{x^2 - 4x + 9 - 3}{x - 1{,}5} = \frac{x^2 - 4x + 6}{x - 1{,}5}.$$

Merkitään tangentin kulmakertoimien lausekkeet yhtä suuriksi ja ratkaistaan yhtälöstä tangentin ja funktion $f$ kuvaajan leikkauskohta $x$.

$$2x - 4 = \frac{x^2 - 4x + 6}{x - 1{,}5}$$

Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = 0$ tai $x = 3$

Muodostetaan funktion kuvaajalle kohtiin $x = 0$ ja $x = 3$ piirrettyjen tangenttien yhtälöt.

**1)** Kohdassa $x = 0$ sivuamispisteen $y$-koordinaatti on

$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 9 = 9$

ja tangentin kulmakerroin on

$f'(0) = 2 \cdot 0 - 4 = -4.$

Muodostetaan tangentin yhtälö.

$y - 9 = -4(x - 0)$ $\qquad y - y_0 = k(x - x_0)$

$y = -4x + 9$ $\qquad (x_0, y_0) = (0,\ 9)$ ja $k = -4$

**2)** Kohdassa $x = 3$ sivuamispisteen $y$-koordinaatti on

$f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 9 = 6$

ja tangentin kulmakerroin on

$f'(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2.$

Muodostetaan tangentin yhtälö.

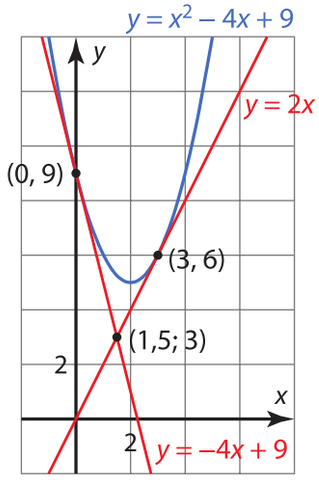
$y - 6 = 2(x - 3)$ $\qquad y - y_0 = k(x - x_0)$

$y = 2x$ $\qquad (x_0, y_0) = (3,\ 6)$ ja $k = 2$

**VASTAUS**

$y = -4x + 9$ ja $y = 2x$

Tarkistetaan saadut tulokset piirtämällä.

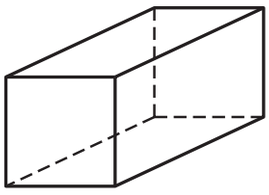


## Harjoitustehtäviä

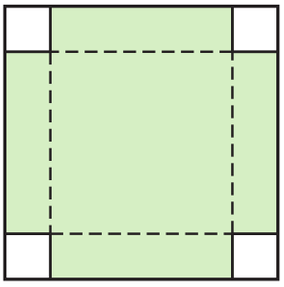
**Sarja I**

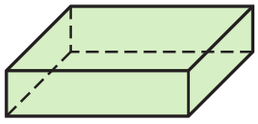
**323.** E1 Jussi rakentaa lampaille suorakulmion muotoisen aitauksen käyttäen 180 metriä aitaverkkoa. Miten aitauksen mitat tulee valita, jotta aitauksen pinta-ala olisi mahdollisimman suuri?

**324.** Rautalangasta taivutetaan suorakulmaisen särmiön muotoinen lampunvarjostimen kehikko, jonka pääty on neliö. Miten varjostimen mitat pitää valita, jotta varjostimen pinta-ala olisi mahdollisimman suuri? Rautalankaa on käytettävissä 3,0 metriä.



**325.** Neliön muotoisen pahvin nurkista leikataan pois samankokoiset neliöt ja pahvi taitellaan kannettoman suorakulmaisen särmiön muotoiseksi laatikoksi. Miten poisleikattavien neliöiden mitat pitää valita, jotta laatikon tilavuus olisi mahdollisimman suuri? Alkuperäisen pahvineliön sivun pituus on 30 cm.





**326.** Järven rantaan rakennetaan suorakulmion muotoinen aitaus, joka jaetaan järveä vastaan kohtisuoralla aidalla kahteen osaan. Aitaa on käytössä 144 metriä. Miten aitauksen mitat pitää valita, jotta sen pinta-ala on mahdollisimman suuri? Järven rantaviivalle ei tarvitse rakentaa aitaa.

**327.** Joen rantaan rakennetaan suorakulmion muotoinen aitaus, jonka pinta-ala on 2000 $m^2$. Miten aitauksen mitat tulee valita, jotta aitaa kuluu mahdollisimman vähän? Joen rantaviivalle ei tarvitse rakentaa aitaa. Anna vastaus metrin kymmenesosan tarkkuudella.

**328.** E2 Elokuvateatteriketju on tehnyt tutkimuksen elokuvalipun hinnan vaikutuksesta katsojamääriin. Tutkimuksen mukaan lipun hinnan ollessa 7 euroa, kävijöitä on ketjun teattereissa viikon aikana 8200 henkeä. Lisäksi jokainen 1 euron hinnankorotus vähentää viikon kävijämäärää 360 hengellä. Millä lipun hinnalla viikon myyntitulot ovat mahdollisimman suuret? Kuinka monta lippua tällöin myydään viikossa?

**329.** Huoltoasemalla myydään tuulilasinpesunestettä 4 litran kanistereissa. Kun kanisterin hinta on 8,90 euroa, niitä myydään kesäviikon aikana 760 kappaletta. Jokainen 50 sentin korotus myyntihinnassa laskee viikkomyyntiä 35 kanisterilla. Mikä pitäisi asettaa kanisterin hinnaksi, jotta viikon myyntitulot olisivat mahdollisimmat suuret?

**330.** Suorakulmion yksi sivu on $x$-akselilla ja kaksi kärkeä käyrällä $y = -x^2 + 9$, missä $y > 0$. Mikä on suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala?

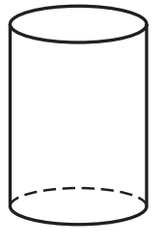
## Sarja II

**331.** Hevosyrittäjä rakentaa suorakulmion muotoisen aitauksen, joka jaetaan kahdella sivun suuntaisella aidalla kolmeen osaan. Aitaa on kaikkiaan käytössä 92,0 metriä. Miten aitauksen mitat tulee valita, jotta sen pinta-ala on mahdollisimman suuri?

**332.** Tavaratalon kirjanpidon mukaan suklaarasioiden viikkomyynti on 690 kpl, kun niiden hinta on 8,50 euroa kappaleelta. Lisäksi on havaittu, että jokainen 75 sentin hinnankorotus laskee viikkomyyntiä 23 kappaleella. Mikä pitäisi asettaa suklaarasioiden kappalehinnaksi, jotta myyntitulot olisivat mahdollisimman suuret? Kuinka monta suklaarasiaa tällöin myydään viikossa?

**333.** Talon seinustalle rakennetaan suorakulmion muotoinen aitaus kaneille. Aitaverkkoa on käytössä 30 metriä ja aitaukseen tarvitaan 3 sivua, yksi sivu on talon 12 metriä pitkällä seinällä. Miten aitauksen mitat pitää valita, jotta aitauksen pinta-ala on mahdollisimman suuri?

**334.** Pellistä valmistetaan suoran ympyrälieriön muotoinen säilyketölkki, jonka tilavuus on 1,0 litraa. Miten tölkin mitat pitää valita, jotta peltiä kuluu mahdollisimman vähän?



**335.** Leipomo aikoo valmistuttaa pahvista pieniä leivosrasioita, joiden korkeuden on oltava vähintään 6,0 cm. Rasiat valmistetaan suorakulmion muotoisesta pahvista, jonka mitat ovat 32,0 cm ja 26,0 cm. Pahvilevyn nurkista leikataan pois neliöt ja pahvi taitellaan kannettoman suorakulmaisen särmiön muotoiseksi laatikoksi. Miten pois leikattavan neliön mitat pitää valita, jotta rasian tilavuus olisi mahdollisimman suuri?

**336.** Mummo myy markkinoilla villasukkia. Hän on havainnut, että myyntihinnan ollessa 22 euroa parilta, markkinoiden kokonaismyynti on 90 paria. Lisäksi vaikuttaa siltä, että jokainen 4 euron hinnanalennus nostaa kokonaismyyntiä 10 parilla. Millä myyntihinnalla mummon villasukkamyynnistä saama voitto olisi mahdollisimman suuri, kun yhden parin valmistuskustannukset ovat 6 euroa? Kuinka paljon mummo tällöin saisi voittoa?

**337.** E3 Funktion $f(x) = -x^2 + 4$ kuvaajalle piirretään tangentit, jotka kulkevat pisteen $(1, 7)$ kautta. Määritä tangenttien yhtälöt.

**338.** Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ kuvaajalle piirretään tangentit, jotka kulkevat pisteen **a)** $(3, -1)$ **b)** $(2, 9)$ kautta. Määritä tangenttien yhtälöt.

**339.** Mihin paraabelin $y = 9 - x^2$ pisteeseen piirretty tangentti rajaa koordinaattiakselien kanssa pinta-alaltaan pienimmän kolmion?

**340.** Määritä funktion $f(x) = x^3 - 6x$ kuvaajalle piirretyt tangentit, jotka kulkevat pisteen $(2, -4)$ kautta. Tarkista saamasi ratkaisu piirtämällä.

**341.** Taiteilijalla on 6,0 metriä pitkä terästanko. Hän voi katkaista tangon ja taivuttaa toisesta osasta neliön ja toisesta ympyrän. Kuinka hänen tulee menetellä, jotta neliön ja ympyrän yhteispinta-ala on mahdollisimman **a)** pieni **b)** suuri?

**342.** Suorakulmion kaksi kärkeä ovat $x$-akselilla ja kaksi kärkeä käyrällä $y = \frac{4}{x^2 + 1}$.

**a)** Määritä suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala.

**b)** Käyrä pyörähtää $x$-akselin ympäri, jolloin suorakulmio piirtää suoran ympyrälieriön. Mikä on tämän suoran ympyrälieriön suurin mahdollinen tilavuus?

**c)** Käyrä pyörähtää $y$-akselin ympäri, jolloin suorakulmio piirtää suoran ympyrälieriön. Mikä on tämän suoran ympyrälieriön suurin mahdollinen tilavuus? Onko tilavuudella jokin yläraja?

# Kertaus

## 1 RATIONAALIFUNKTIO

**K1.** Olkoon $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x-1}+\dfrac{1}{x}$.

a) Määritä funktion määrittelyjoukko.

b) Määritä funktion arvot kohdissa $-1$ ja $1$.

c) Piirrä funktion kuvaaja.

**K2.** Selvitä määrittelyehto ja supista murtolauseke.

a) $\dfrac{6x^2-15x}{3x}$ b) $\dfrac{10x-5}{8x-4}$

c) $\dfrac{x-7}{7-x}$ d) $\dfrac{x^2-49}{7+x}$

**K3.** Olkoon $f(x)=\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{x}{x^2+x}$

a) Määritä funktion määrittelyehto.

b) Sievennä funktion lauseke ja laske funktion arvo $f(-\frac{2}{3})$.

**K4.** Määritä funktion nollakohdat.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{3x-6}$ b) $f(x)=\dfrac{12x^2-4x}{5x}$

**K5.** Ratkaise yhtälö.

a) $\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{x}=5$ b) $\dfrac{4}{2x-1}-\dfrac{1}{x+1}=1$

**K6.** Ratkaise epäyhtälö.

a) $\dfrac{x}{3x-6}\geq 0$ b) $\dfrac{x}{3x-6}<1$

**K7.** Ratkaise epäyhtälö $\dfrac{2x}{3}<\dfrac{1-3x}{x-2}$.

**K8.** Ratkaise epäyhtälö $\dfrac{x^3+x}{x^2-1}\leq\dfrac{x}{x-1}$.

**K9.** Selvitä funktion $f(x)=\dfrac{x^3+6x^2+9x}{4x^2+11x-3}$ määrittelyjoukko ja supista funktion lauseke.

**K10.** Sukellusretken hinta oli 702 euroa. Oli sovittu, että hinta jaetaan tasan kaikkien osallistujien kesken. Retkelle saapui 5 henkeä enemmän kuin oli ilmoittautunut, minkä jälkeen jokainen osallistuja joutui maksamaan 15 euroa ennakoitua vähemmän. Kuinka monta henkeä retkelle osallistui? Kuinka paljon jokainen heistä joutui maksamaan?

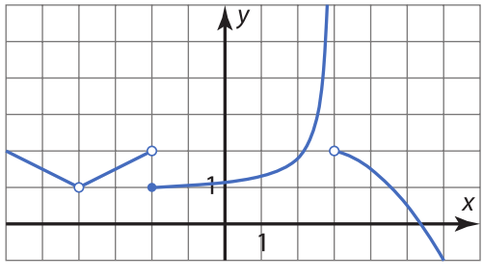
**K11.** Määritä vakiolle $c$ sellainen arvo, että funktion $f(x)=\dfrac{2x^2-12x+c}{5x-35}$ lauseke voidaan supistaa. Supista lauseke. Mikä on funktion määrittelyjoukko?

**K12.** Määritä vakioille $a$ ja $b$ sellaiset arvot, että epäyhtälö $\dfrac{x^3-ax^2}{(x+b)^2}\leq 0$ toteutuu vain, kun $x<-4$ tai $-4<x\leq 3$.

**K13.** Alla on erään funktion $f$ kuvaaja $y = f(x)$. Määritä kuvaajan perusteella funktion $f$

**a)** arvot

**b)** raja-arvot kohdissa $-4$, $-2$ ja $3$.




**K14.** Määritä arvoja taulukoimalla funktion $f(x) = \dfrac{5x^2 - 23x - 10}{x^2 - 4x - 5}$ raja-arvo kohdassa

**a)** 5 **b)** $-1$.

**K15.** Määritä raja-arvo.

**a)** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + x}{3x + 3}$ **b)** $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{6x^3 - 3x^2}{2x - 1}$

**K16.** Määritä funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 6, & \text{kun } x < -1 \\ x^2 + 3x + 6, & \text{kun } -1 \le x < 2 \\ 8 - 3x, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$$

raja-arvo kohdassa **a)** $-1$ **b)** 2.

**K17.** Onko funktio $f$ jatkuva kohdassa 2?

**a)** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 - 1, & \text{kun } x < 2 \\ 0, & \text{kun } x = 2 \\ x^2 - 4x + 4, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$

**b)** $f(x) = \begin{cases} -2x + 20, & \text{kun } x \neq 2 \\ 16 & \text{kun } x = 2 \end{cases}$

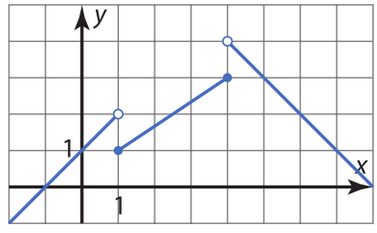
**K18.** Funktio $g$ on määritelty lausekkeella $g(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2}{2x - 8}$, kun $x \neq 4$. Määrittele arvo $g(4)$ niin, että funktio $g$ on jatkuva kohdassa 4.

**K19.** Määritä vakio $a$ niin, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 4, & \text{kun } x \le 3 \\ -x + a, & \text{kun } x > 3 \end{cases}$$

on jatkuva kohdassa 3. Piirrä funktion kuvaaja.

**K20.** Alla on erään funktion $f$ kuvaaja $y = f(x)$. Päättele kuvaajan perusteella, onko funktio $f$ jatkuva välillä **a)** $[1, 4]$ **b)** $[4, 6]$ **c)** $]4, 6]$.




**K21.** Osoita, että funktiolla $f(x) = x^7 - 3x^3 - 5x^2 - 20$ on ainakin yksi nollakohta.

**K22.** Osoita, että yhtälöllä $x^2 = x^4 - 3x - 2$ on ainakin yksi ratkaisu.

**K23.** Osoita, että funktiolla $f(x) = x^9 - 5x - 2$ on ainakin kaksi nollakohtaa välillä $[-3, 3]$.

**K24.** Määritä raja-arvo.

**a)** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 6x + 9}{2x^2 - 18}$

**b)** $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{4}} \dfrac{32x^2 - 2}{16x^2 + 8x + 1}$

**K25.** Määritä raja-arvo.

**a)** $\lim\limits_{x \to 2} \left( \dfrac{3x}{x - 2} - \dfrac{12x}{x^2 - 4} \right)$

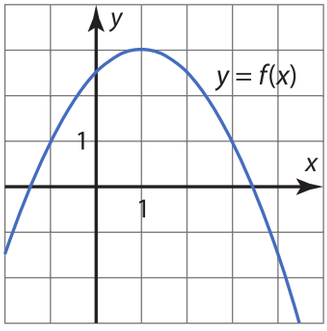
**b)** $\lim\limits_{x \to 1} \left( \dfrac{x}{x - 1} \left( \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x} \right) \right)$

## 3 DERIVAATTA

**K26.** Alla on erään funktion $f$ kuvaaja $y = f(x)$. Määritä kuvaajan perusteella

**a)** funktion arvot $f(1)$ ja $f(3)$

**b)** derivaatat $f'(1)$ ja $f'(3)$.




**K27.** Määritä erotusosamäärän raja-arvona funktion derivaatta kohdassa 2.

**a)** $f(x) = 3x^2$

**b)** $g(x) = -\frac{3}{x}$

**K28.** Määritä erotusosamäärän raja-arvona funktion derivaattafunktio.

**a)** $f(x) = 3x^2 + x$

**b)** $g(x) = \frac{7}{x}$

## 4 POLYNOMIFUNKTION DERIVAATTA

**K29.** Määritä funktion derivaatta kohdassa 2.

**a)** $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + x$

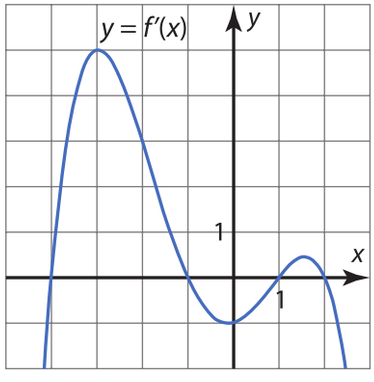
**b)** $g(x) = \frac{3x^4}{2} - 5x^3 - 145$

**K30.** Osoita, että funktion $f(x) = x^3 - 2x + 1$ kuvaajalla on kaksi pistettä, joihin piirretyt tangentit ovat suoran $y = x + 5$ suuntaisia.

**K31.** Alla on derivaattafunktion $f'$ kuvaaja.

**a)** Määritä funktion $f$ ääriarvokohdat.

**b)** Kumpi funktion $f$ arvoista $f(-3)$ ja $f(-2)$ on suurempi?




**K32.** Olkoon $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 5x - 2$.

**a)** Millä väleillä funktio on kasvava ja millä vähenevä?

**b)** Määritä funktion ääriarvokohdat ja ääriarvot.

**K33.** Määritä polynomin $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$ suurin ja pienin arvo välillä $[2, 6]$.
[yo pitkä s2012]

**K34.** Määritä käyrälle $y = x^4 - 2x^3 - x$ kohtaan $x = 2$ piirretyn **a)** tangentin **b)** normaalin yhtälö.

**K35.** Missä kulmassa funktion $f(x) = x^7 - 1$ kuvaaja leikkaa $x$-akselin? Anna vastaus asteen tarkkuudella.

**K36.** Osoita, että kaikilla välillä $[-3, 3]$ olevilla muuttujan $x$ arvoilla on $-75 \le x^3 - 3x^2 - 24x \le 28$.

**K37.** Osoita, että funktio $f(x) = x^5 + 4x^3$ on kaikkialla aidosti kasvava.

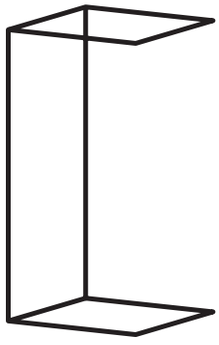
**K38.** Osoita, että yhtälöllä $2x^5 = 10 - 4x^3$ on täsmälleen yksi ratkaisu.

**K39.** Olkoon $f(x) = x^2 - 2x + 5$, kun $-1 \le x \le 2$. Määritä funktion arvojoukko.

**K40.** Määritä vakio $a$ niin, että funktiolla $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + a$ on maksimiarvo 5. Mikä on funktion minimiarvo?

**K41.** Millä parametrin $k$ arvoilla käyrien $y = kx^2$ ja $y = k(x - 2)^2$ leikkauspisteisiin piirretyt tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan? [yo pitkä s2013]

**K42.** Timo taivuttaa lampunvarjostimen kehikon rautalangasta, jonka pituus on 200 cm. Runko on kuvion mukainen neliöpohjainen suorakulmainen särmiö. Määritä pohjasärmän pituus ja kehikon korkeus niin, että särmiön tilavuus on mahdollisimman suuri.



**K43.** Opiskelijakunnan kahviosta vastaava Mikael on tutkinut kahvin myyntiä ja havainnut, että kahvia myydään viikossa 500 kuppia, jos kahvikupin hinta on 0,80 euroa. Lisäksi Mikael on havainnut, että hinnan korottaminen 5 sentillä vähentää aina viikkomyyntiä 25 kupilla. Millä kahvikupin hinnalla viikon myyntitulot ovat mahdollisimman suuret? Kuinka monta kuppia tällöin myydään viikossa?

**K44.** Määritä funktion derivaattafunktio.

**a)** $f(x)=\dfrac{4x}{2x-6}$ **b)** $g(x)=\dfrac{5x+1}{4x^2+2}$

**K45.** Määritä funktion $h(x)=\dfrac{8-x^2}{3-x}$ derivaattafunktion nollakohdat.

**K46.** Määritä funktion $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-12}$ ääriarvokohdat ja ääriarvot.

**K47.** Määritä funktion $f(x)=\dfrac{6}{x}-\dfrac{1}{x^3}$ ääriarvokohdat ja ääriarvot.

**K48.** Olkoon $f(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$, kun $-6 \le x \le 2$. Määritä funktion

**a)** suurin ja pienin arvo

**b)** arvojoukko.

**K49.** Määritä funktion $f(x)=\dfrac{5x-8}{3-x^2}$ kuvaajalle kohtaan $x=2$ piirretyn normaalin yhtälö. Tarkista tulos piirtämällä.

**K50.** Funktion $f(x)=-\dfrac{3}{x^6}-2$ kuvaajalle kohtaan $x=-1$ piirretään tangentti. Mikä on tangentin ja koordinaattiakselien rajaaman kolmion pinta-ala?

**K51.** Suorakulmaisen särmiön muotoisen akvaarion tilavuudeksi halutaan 180 litraa. Akvaarion pituuden tulee olla kolminkertainen leveyteen verrattuna. Akvaariossa on lasi myös kantena. Miten akvaarion mitat pitää valita, jotta sen valmistamiseen kuluu mahdollisimman vähän lasia? Anna mitat senttimetrin tarkkuudella.

**K52.** Suoran ympyrälieriön muotoisen kannettoman pahvirasian tilavuudeksi halutaan 3,0 litraa. Miten rasian mitat pitää valita, jotta sen valmistamiseen kuluisi mahdollisimman vähän pahvia?

**K53.** Määritä funktion $g(x)=\dfrac{15}{x^2-2x+4}$ suurin arvo. Onko funktiolla pienintä arvoa?

## MONIVALINTATEHTÄVÄT

Valitse oikeat vaihtoehdot. Oikeita vastauksia on 1–3 kappaletta.

**M1.** Funktion $f(x)=\frac{x}{3}-\frac{x}{x-6}$ määrittelyehto on

**a)** $x\neq 0$, $x\neq 3$ ja $x\neq 6$

**b)** $x\neq 0$ ja $x\neq 6$

**c)** $x\neq 6$.

**M2.** Murtolauseke $\frac{4x^2-9}{2x-3}$ supistuu muotoon

**a)** $\frac{2x^2-3}{x-1}$

**b)** $2x+3$

**c)** $2x-3$.

**M3.** Yhtälön $\frac{x^2-4x}{4x}=0$ ratkaisut ovat

**a)** $x=0$ ja $x=4$

**b)** $x=0$

**c)** $x=4$.

**M4.** Yhtälön $\frac{x^2+x-2}{x+2}=0$ ratkaisut ovat

**a)** $x=1$ ja $x=-2$

**b)** $x=1$

**c)** $x=-2$.

**M5.** Epäyhtälö $\frac{x-9}{x+2}\geq 0$ toteutuu, kun

**a)** $x\geq 9$

**b)** $x<-2$ tai $x\geq 9$

**c)** $x\leq -2$ tai $x\geq 9$.

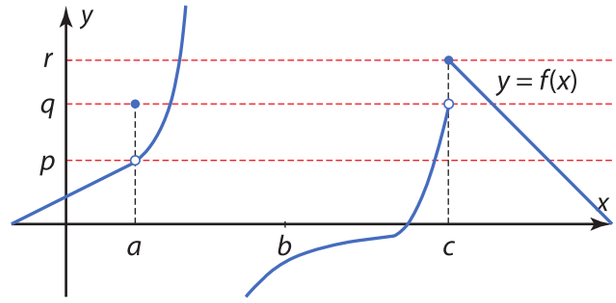
**M6.** Epäyhtälö $\frac{x}{x+1}\leq 2$ toteutuu, kun

**a)** $x\leq -2$ tai $x>-1$

**b)** $x<-2$ tai $x\geq -1$

**c)** $x\leq -2$ tai $x\geq -1$.

**M7.** Alla on funktion $f$ kuvaaja.




Funktiolla $f$ on raja-arvo kohdassa

**a)** $a$

**b)** $b$

**c)** $c$.

**M8.** Olkoon $f(x)=\begin{cases}\frac{x+7}{x+1}, & \text{kun } x\leq 2\\ 2x-1, & \text{kun } 2<x<5\\ -x+15, & \text{kun } x>5.\end{cases}$

**a)** Funktiolla $f$ on täsmälleen yksi kohta, jossa sitä ei ole määritelty.

**b)** Funktiolla $f$ on raja-arvo kohdassa 2.

**c)** Funktion $f$ raja-arvo kohdassa 5 on 10.

**M9.** Funktiolla $f(x)=\frac{x^2-ax}{3x-9}$ on raja-arvo kohdassa 3, kun

**a)** $a=1$

**b)** $a=3$

**c)** $a=9$.

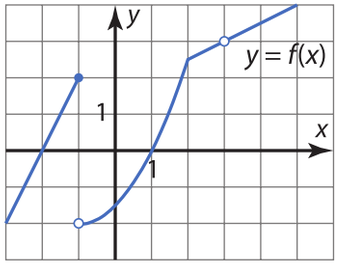
**M10.** Funktion $f(x)=\frac{2x^2+15x+28}{8x^2+31x-4}$ raja-arvo kohdassa $-4$ on

**a)** $\frac{3}{25}$

**b)** $\frac{1}{8}$

**c)** $\frac{1}{33}$.

**M11.** Alla on funktion $f$ kuvaaja.




Funktio $f$ on jatkuva kohdassa

**a)** $x = -1$

**b)** $x = 1$

**c)** $x = 3$.

**M12.** Funktio $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{kun } x < -2 \\ -3, & \text{kun } x \geq -2 \end{cases}$ on

**a)** on jatkuva kohdassa $2$

**b)** on jatkuva kohdassa $-2$

**c)** on epäjatkuva kohdassa $-2$.

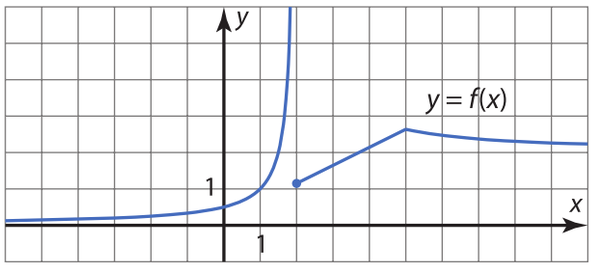
**M13.** Funktio $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ on

**a)** epäjatkuva kohdassa $3$

**b)** jatkuva kaikkialla

**c)** jatkuva.

**M14.** Alla on funktion $f$ kuvaaja.




Funktio $f$ on jatkuva välillä

**a)** $[-2, 4]$

**b)** $[0, 2]$

**c)** $[2, 5]$.

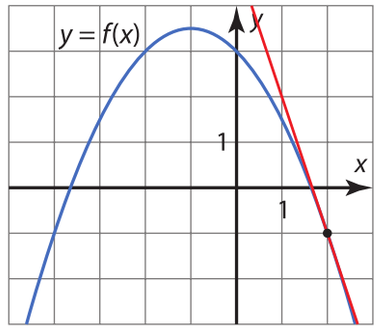
**M15.** Olkoon $f(x) = x^3 + 3x - 3$. Välillä $]0, 1[$

**a)** funktiolla on ainakin yksi nollakohta

**b)** funktiolla ei ole nollakohtia

**c)** funktio saa arvon $-1$.

**M16.** Alla on funktion $f$ kuvaaja ja sille kohtaan $x = 2$ piirretty tangentti.




Kuvaajan perusteella

**a)** $f(2) = -1$

**b)** $f'(2) = -3$

**c)** $f'(-1) = 0$.

**M17.** Olkoon $f(x) = x^2 - x$.

**a)** $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3+h)^2 - 3}{h}$

**b)** $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3+h)^2 - (3+h) - (3^2 - 3)}{h}$

**c)** $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3+h)^2 - (3+h)}{h}$

**M18.** Funktion $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3$ derivaatta on

**a)** $f'(x) = -x^2 + 6x - 3$

**b)** $f'(x) = -3x^2 + 6x$

**c)** $f'(x) = -3x^2 + 6x - 3$

**M19.** Kun $g(x) = x^2 + x$, niin

**a)** $g'(-3) = -5$

**b)** $g'(0) = 2$

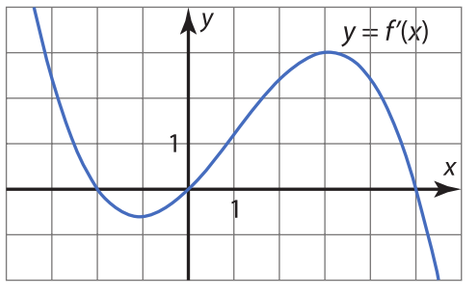
**c)** $g'(2) = 5$.

**M20.** Alla on derivaattafunktion $f'$ merkkikaavio.

| | | 4 | | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | | − | | + |

Funktion $f$
- **a)** maksimikohta on $x = 4$
- **b)** maksimikohta on $x = 7$
- **c)** minimikohta on $x = 7$.

**M21.** Kuvassa on derivaattafunktion $f'$ kuvaaja.




Funktio $f$
- **a)** on kasvava välillä $-1 \le x \le 3$
- **b)** on kasvava välillä $0 \le x \le 5$
- **c)** on vähenevä välillä $-2 \le x \le 0$.

**M22.** Välillä $[-1, 2]$ funktion $f(x) = x^2$
- **a)** suurin arvo on $4$
- **b)** pienin arvo on $0$
- **c)** pienin arvo on $-1$.

**M23.** Alla on funktion $f$ kulkukaavio.

| | | −5 | | 0 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | | − | | + | | − |
| $f(x)$ | ↗ | | ↘ | | ↗ | | ↘ |

Funktion $f$
- **a)** suurin arvo on kohdassa $x = -5$ tai $x = 2$
- **b)** suurinta arvoa ei ole olemassa
- **c)** pienin arvo on varmasti kohdassa $x = 0$.

**M24.** Funktion $f(x) = -x^3 + 2x$ kuvaajalle kohtaan $x = 1$ piirretyn
- **a)** tangentin kulmakerroin on $2$
- **b)** tangentin kulmakerroin on $-1$
- **c)** normaalin kulmakerroin on $1$.

**M25.** Käyrä $y = -x^3 + 1$ leikkaa $x$-akselin kulmassa
- **a)** 71,6°
- **b)** 45,0°
- **c)** 63,4°.

**M26.** Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^{13}}$ derivaattafunktio on
- **a)** $f'(x) = 13x^{-14}$, kun $x \neq 0$
- **b)** $f'(x) = -13x^{-12}$, kun $x \neq 0$
- **c)** $f'(x) = -13x^{-14}$, kun $x \neq 0$.

**M27.** Funktion $g(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + 1}$ derivaattafunktio on
- **a)** $g'(x) = \dfrac{2x \cdot (x^3 + 1) - 3x^2 \cdot x^2}{(x^3 + 1)^2}$
- **b)** $g'(x) = \dfrac{2x \cdot (x^3 + 1) + 3x^2 \cdot x^2}{(x^3 + 1)^2}$
- **c)** $g'(x) = \dfrac{2x}{3x^2}$.

**M28.** Funktion $g(x) = \dfrac{1 + x}{x}$ kuvaajalle kohtaan $x = -1$ piirretyn tangentin kulmakerroin on
**a)** $-1$ **b)** $1$ **c)** $-\dfrac{1}{2}$.

**M29.** Funktio $g(x) = \dfrac{2}{x^3}$, kun $x > 0$, on
- **a)** aidosti vähenevä
- **b)** aidosti kasvava
- **c)** rationaalifunktio.

**M30.** Funktiolla $f(x) = \dfrac{5x}{1 - x^2}$, kun $2 \le x \le 6$,
- **a)** on suurin arvo
- **b)** on pienin arvo
- **c)** ei välttämättä ole suurinta tai pienintä arvoa.

**M31.** Funktioiden $f(x)=\dfrac{2x}{3x^3-4x}$ ja $g(x)=\dfrac{2}{3x^2-4}$

**a)** määrittelyjoukot ovat samat

**b)** derivaattafunktiot ovat samat

**c)** ääriarvot ovat samat.

**M32.** Funktion $f$ derivaattafunktio $f'$ on aidosti kasvava. Tästä voidaan päätellä, että funktiolla $f$ on

**a)** ainakin yksi minimikohta

**b)** korkeintaan yksi minimikohta

**c)** jokin ääriarvokohta.

## TEHTÄVÄSARJA A

**A1.** **a)** Ratkaise yhtälö $\dfrac{6}{x}-\dfrac{4}{x+2}=2$.

**b)** Ratkaise epäyhtälö $\dfrac{2x^2}{x+1}\le 3x$.

**A2.** Määritä raja-arvo.

**a)** $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2-81}{x-9}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^4-10x^3}{3x^2-6x}$

**A3.** Määritä erotusosamäärän raja-arvona funktion derivaatta kohdassa 3.

**a)** $f(x)=2x^2-4x$ **b)** $g(x)=\dfrac{3}{x}$.

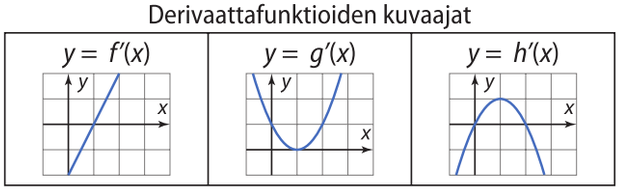
**A4.** Määritä $f'(1)$, kun

**a)** $f(x)=5x^3+4x^2+18$

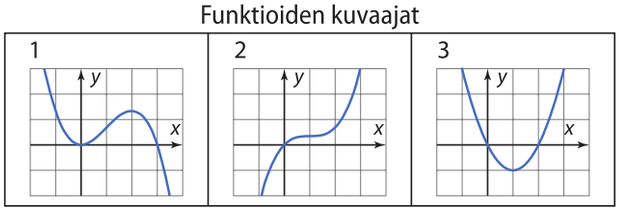
**b)** $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+2}$.

**A5.** Yhdistä derivaattafunktion kuvaaja oikeaan funktion kuvaajaan.

Derivaattafunktioiden kuvaajat




Funktioiden kuvaajat




**A6.** Olkoon $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4+x^3-5x^2+12$.

**a)** Millä väleillä funktio $f$ on kasvava ja millä vähenevä?

**b)** Kumpi funktion arvoista $f(-4{,}999999)$ ja $f(-4{,}999998)$ on suurempi?

**A7.** Määritä funktion $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-4x+2$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 3]$.

**A8.** Onko funktio $f$ jatkuva kohdassa 3?

**a)** $f(x)=\begin{cases}-2x+4, & \text{kun } x<3\\ -2, & \text{kun } x=3\\ -x^2+10x-23, & \text{kun } x>3\end{cases}$

**b)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x}{2x-6}, & \text{kun } x\ne 3\\ 1, & \text{kun } x=3\end{cases}$

**A9.** Funktion $f(x)=\dfrac{5x+1}{x+2}$ kuvaajalle piirretään kohtaan $x=1$ normaali. Missä pisteessä normaali leikkaa $x$-akselin?

**A10.** Määritä vakio $a$ niin, että funktio $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-3x^2+ax$ on aidosti kasvava.

## TEHTÄVÄSARJA B

**B1.** Osoita, että epäyhtälö
$7x^3 - 130 < x^4 + 5x^2$ on aina tosi.

**B2.** Voidaanko vakio $a$ määrittää niin, että funktio $f(x)$ on jatkuva kohdassa 4?

**a)** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 6, & \text{kun } x < 4 \\ a, & \text{kun } x = 4 \\ -\frac{1}{x} + \frac{9}{4}, & \text{kun } x > 4 \end{cases}$

**b)** $f(x) = \begin{cases} \frac{x+8}{2x-8}, & \text{kun } x \neq 4 \\ a, & \text{kun } x = 4 \end{cases}$

**B3.** Määritä funktion
$f(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{8}{x}$, kun $x \neq 0$ ja $x \neq 1$,
ääriarvokohdat ja ääriarvot.

**B4.** Osoita, että yhtälöllä $x^4 = 4x + 1$ on täsmälleen kaksi ratkaisua.

**B5.** Aiempien tilastojen perusteella tautiepidemian etenemistä koulussa ennustettiin seuraavalla matemaattisella mallilla: Kun taudin leviämisen alkamisesta on kulunut $t$ vuorokautta, sairastavien osuus prosentteina koko koulun opiskelijoista on $s(t) = -0{,}02t^3 + 0{,}42t^2$.

**a)** Kuinka monen vuorokauden kuluttua sairastavien määrä kääntyy laskuun?

**b)** Kuinka monta prosenttia koulun opiskelijoista on enimmillään sairaana?

**c)** Kuinka monen vuorokauden kuluttua sairastuneiden määrä kasvaa nopeimmin?

**B6.** Määritä vakio $a$ niin, että funktion
$f(x) = x^2 + \frac{a}{x^2}$, kun $x \neq 0$, minimikohta on $x = 2$.

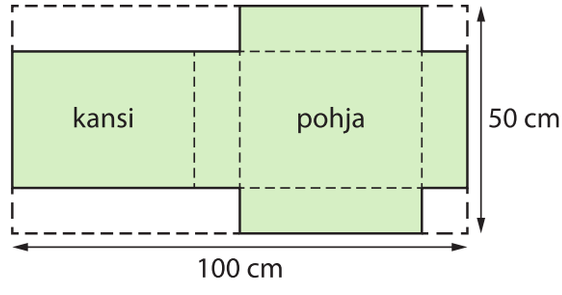
**B7.** Osoita, että funktion
$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + 3$ kuvaajalle kohtaan $x = 1$ piirretty tangentti on myös funktion $f$ kuvaajan normaali.

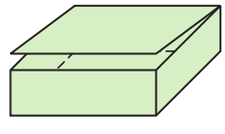
**B8.** Olkoon $f(x) = \frac{1-x}{x^2}$, kun $x \neq 0$ ja $g(x) = -x + 1$.

**a)** Millä muuttujan arvoilla funktion $f$ kuvaaja kulkee funktion $g$ kuvaajan yläpuolella?

**b)** Osoita, että funktioiden kuvaajilla on yhteinen piste, jossa ne sivuavat toisiaan.

**B9.** Suorakulmion muotoisen pahvilevyn pituus on 100 cm ja leveys 50 cm. Arja leikkaa pois kahdesta kulmasta keskenään yhtä suuret neliöt ja kahdesta kulmasta keskenään yhtä suuret suorakulmiot kuvan mukaisesti. Lopuksi hän taittelee pahvilevystä kannellisen laatikon. Määritä poistettavien neliöiden sivun pituus senttimetrin tarkkuudella niin, että laatikon tilavuus on mahdollisimman suuri.



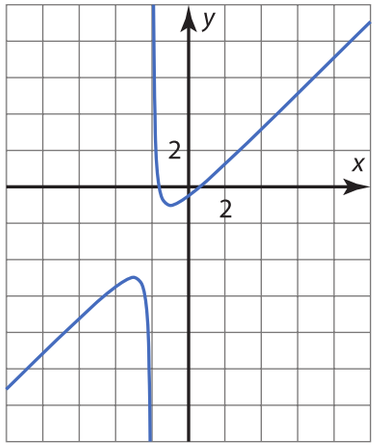
**B10.** Käyrälle $y = 2x^2$ piirretään normaali pisteeseen $(a, 2a^2)$, missä $a \neq 0$. Mitä pistettä normaalin ja $y$-akselin leikkauspiste lähestyy, kun $a$ lähestyy lukua 0?

# Vastaukset

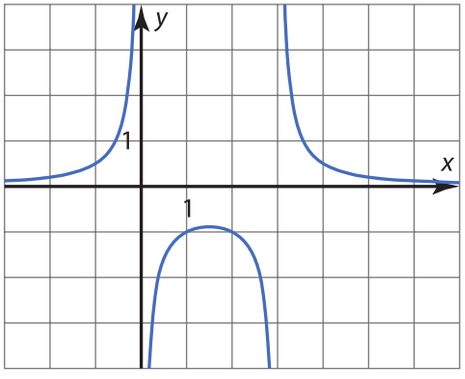
## 1.1 Rationaalifunktio

**1.** **a)** $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$

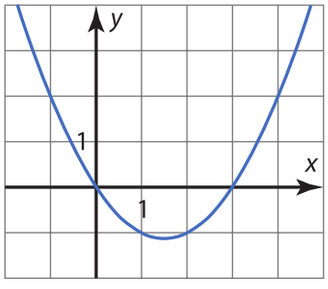
**b)**



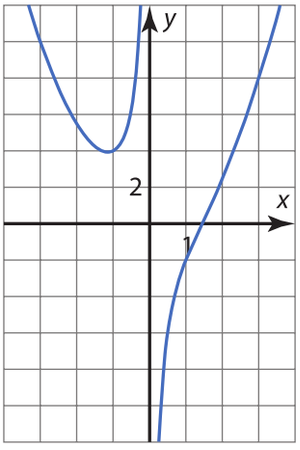

**2.** **a)** $x \neq 0$ ja $x \neq 3$



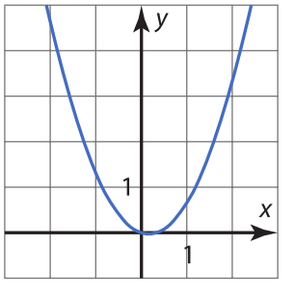

**b)** $x \in \mathbf{R}$




**c)** $x \neq 0$




**d)** $x \in \mathbf{R}$




**3.** **a)** $3x+1$, kun $x \neq 0$

**b)** $3-x$, kun $x \neq 0$

**c)** $\frac{2}{3+x}$, kun $x \neq -3$ ja $x \neq 0$

**4.** **a)** $2$, kun $x \neq \frac{1}{3}$

**b)** $\frac{5}{4}$, kun $x \neq -3$

**c)** $\frac{5x}{3}$, kun $x \neq 2$

**5.** **a)** $1$, kun $x \neq -1$

**b)** $-1$, kun $x \neq 1$

**c)** Ei voi supistaa. $x \neq 1$

**d)** $-1$, kun $x \neq \frac{1}{3}$

**6.** **a)** $x \neq -4$ **b)** $\frac{x-4}{2}$

**7.** **a)** $f(x) = x + 2$, kun $x \neq 0$, kuvaaja 2

**b)** $f(x) = x$, kun $x \neq 0$ ja $x \neq 2$, kuvaaja 3

**c)** $f(x) = x$, kun $x \neq 2$, kuvaaja 4

**d)** $f(x) = x + 2$, kun $x \neq 2$, kuvaaja 1

**8.** **a)** $\frac{11}{12x}$, kun $x \neq 0$

**b)** $\frac{2x-15}{6x}$, kun $x \neq 0$

**c)** $\frac{1+3x}{x}$, kun $x \neq 0$

**9.** **a)** $\frac{3x-1}{6x}$, kun $x \neq 0$

**b)** $\frac{-x+5}{6x}$, kun $x \neq 0$

**c)** $\frac{3x^2+2x-3}{x^2-x}$, kun $x \neq 0$ ja $x \neq 1$

**10.** **a)** $\frac{3x^2-x-1}{3x}$, kun $x \neq 0$

**b)** $\frac{x+4}{5x}$, kun $x \neq 0$

**c)** $\frac{6x+3}{x^2+x}$, kun $x \neq -1$ ja $x \neq 0$

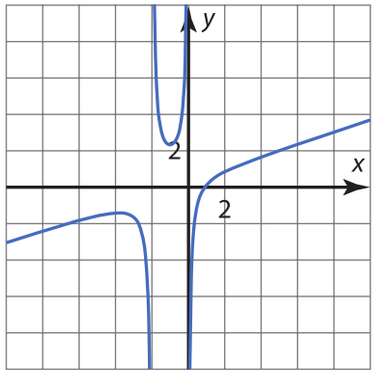
**11.** **a)** $\frac{-x^2+3x+2}{x^2+x}$, kun $x \neq -1$ ja $x \neq 0$

**b)** $\frac{-x^2+4x-1}{x^2-9}$, kun $x \neq -3$ ja $x \neq 3$

**Vihje:** Löydät sopivan laventajan, kun jaat nimittäjät ensin tekijöihin.

**12.** **a)** $\mathbf{R} \setminus \{-2, 0\}$

**b)**




**13.** **a)** $\frac{6x-1}{3}$, kun $x \neq 0$

**b)** $\frac{3x-2}{x-3}$, kun $x \neq 3$

**c)** $\frac{x^2}{x+7}$, kun $x \neq -7$ ja $x \neq 0$

**14.** **a)** $-1$, kun $x \neq \frac{1}{5}$

**b)** Ei voi supistaa. $x \neq 9$

**c)** $-1$, kun $x \neq 2$

**d)** 1, kun $x \in \mathbf{R}$

**15.** **a)** $t-1$, kun $t \neq -1$

**b)** $\frac{t+1}{t-1}$, kun $t \neq 1$

**c)** $\frac{t-1}{t+1}$, kun $t \neq -1$ ja $t \neq 1$

**16.** **a)** $x = -1$ tai $x = 3$

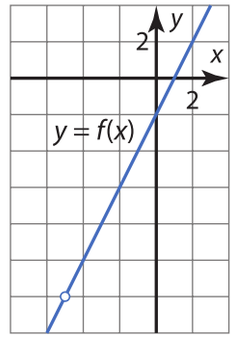
**b)** $(x+1)(x-3)$

**c)** $\frac{x+1}{2}$, kun $x \neq 3$

**Vihje:** Vertaa esimerkkiin 5.

**17.** **a)** $x \neq -5$ **b)** $f(x) = 2x - 2$

**c)** Kuvaaja on suora $y = 2x - 2$, josta puuttuu piste $(-5, -12)$.




**Vihje:** Vertaa esimerkkiin 5.

**18.** **a)** $\frac{1}{x^2}$, kun $x \neq 0$

**b)** $\frac{5}{x^2+x-6}$, kun $x \neq -3$ ja $x \neq 2$

**19.** **a)** $\frac{s^2+2s-2}{s^2-s}$, kun $s \neq 0$ ja $s \neq 1$

**b)** $\frac{-2t}{t^2-1}$, kun $t \neq -1$ ja $t \neq 1$

**Vihje:** Löydät sopivan laventajan, kun jaat nimittäjät ensin tekijöihin.

**20.** $-\frac{3}{17}$

**Vihje:** Sievennä ensin funktion lauseke.

**21.** **a)** $\frac{1}{x}$, kun $x \neq -1$ ja $x \neq 0$

**b)** $\frac{2x}{x^4-1}$, kun $x \neq -1$ ja $x \neq 1$

**22.** **a)** Ovat sama funktio. Funktion $f$ lauseke supistuu funktion $g$ lausekkeeksi ja funktioilla on sama määrittelyjoukko.

**b)** Eivät ole sama funktio, koska funktioiden määrittelyjoukot eivät ole samat. Funktion $f$ määrittelyehto on $x \neq 0$. Funktio $g$ on määritelty kaikilla reaaliluvuilla.

**23.** $f(x)=\frac{x+1}{x+4}$, kun $a=-3$, $x\neq -4$ ja $x\neq 4$;

$f(x)=\frac{x-1}{x-4}$, kun $a=3$, $x\neq -4$ ja $x\neq 4$

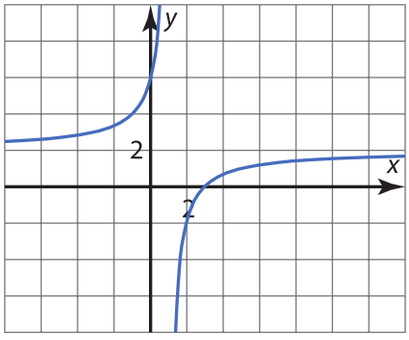
**Vihje:** Murtolauseke voidaan supistaa, jos osoittajalla ja nimittäjällä on sama nollakohta.

**24.** $f(x)=(x-3)(x+3)^2$, kun $b=-3$ ja $x\neq 3$;
$f(x)=(x-3)^2(x+3)$, kun $b=3$ ja $x\neq -3$

### 1.2 Rationaaliyhtälö

**25.** **a)** Osoittajan nollakohta $x=3$, nimittäjän nollakohta $x=1$.

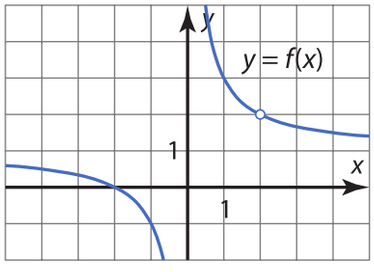
**b)**




Kohdassa $x=3$ funktion arvo on nolla. Kohdassa $x=1$ funktiota ei ole määritelty.

**26.** **a)** Osoittajan nollakohdat $x=-2$ ja $x=2$, nimittäjän nollakohdat $x=0$ ja $x=2$.

**b)**




Kohdassa $x=-2$ funktion arvo on nolla. Kohdissa $x=0$ ja $x=2$ funktiota ei ole määritelty.

**27.** **a)** $x=-3$ **b)** $x=1$

**28.** **a)** $x=-5$ **b)** $x=5$

**29.** **a)** ei millään **b)** $x=-1$

**30.** **a)** $x=-4$ **b)** $x=0$

**31.** **a)** $x=-\frac{5}{6}$ **b)** $x=-1$

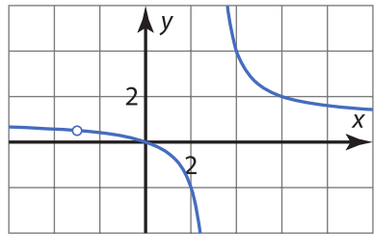
**32.** **a)** $x=2$ **b)** $x=-1$ tai $x=-\frac{2}{3}$

**33.** $x=\frac{4}{3}$

**Vihje:** Selvitä ensin nimittäjien tekijät. Kerro sitten yhtälön molemmat puolet nimittäjien tekijöiden tulolla.

**34.** $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ tai $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

**35.** **a)** Osoittajan nollakohdat $x=-3$ ja $x=0$, nimittäjän nollakohdat $x=-3$ ja $x=3$.




**b)** Kohdassa $x=0$ funktion arvo on nolla. Kohdissa $x=-3$ ja $x=3$ funktiota ei ole määritelty.

**36.** **a)** $x=1$ **b)** $x=-1$ tai $x=6$

**37.** **a)** $x=\frac{1}{3}$ **b)** ei nollakohtia

**38.** **a)** $a=-\frac{1}{2}$ **b)** $a=3$

**39.** **a)** $x=-\frac{4}{5}$ tai $x=1$ **b)** $x=-1$ tai $x=3$

**40.** **a)** $x=-5$ tai $x=1$ **b)** ei ratkaisuja

**41.** $x=\pi-1$ tai $x=-\pi-1$

**42.** **a)** $x=0$ **b)** $x=0$ tai $x=2$

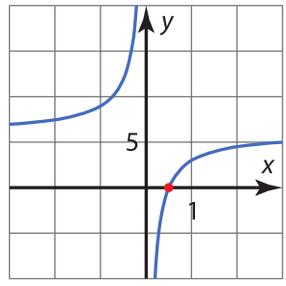
**Vihje:** Selvitä ensin nimittäjien tekijät. Kerro sitten yhtälön molemmat puolet nimittäjien tekijöiden tulolla.

**43.** 26 henkeä, 48 euroa

**44.** 1,7 m/s

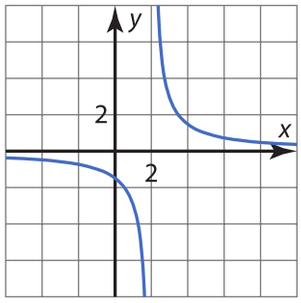
### 1.3 Rationaaliepäyhtälö

**45.**




**a)** $x=0$ **b)** $x=\frac{1}{2}$ **c)** $x<0$ tai $x>\frac{1}{2}$

**46.**




**a)** $x = 2$ **b)** ei nollakohtia **c)** $x < 2$

**47.** **a)** $x < -3$ tai $x > \frac{2}{5}$ **b)** $-3 < x < \frac{2}{5}$

**48.** **a)** $x > 1$ **b)** $x < -1$ tai $-1 < x < 1$

**49.** $x < \frac{5}{2}$ tai $x \geq 5$

**50.** **a)** $-2 \leq x < 0$ tai $x \geq 2$ **b)** $x < 0$

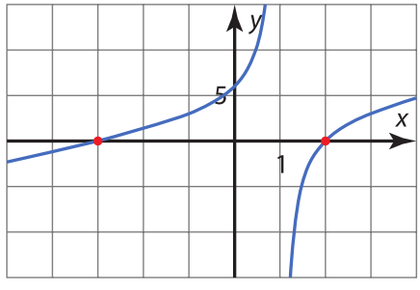
**51.** $x = 0$ tai $1 < x \leq 2$

**52.** $x < -3$ tai $x = 0$ tai $x \geq \frac{1}{2}$

**53.** $x < -1$ tai $1 < x < 3$

**54.** $x < 0$ tai $0 < x \leq \frac{1}{2}$ tai $x > 1$

**55.**




**a)** $x = 1$ **b)** $x = -3$ tai $x = 2$

**c)** $x < -3$ tai $1 < x < 2$

**56.** **a)** $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$ **b)** $x < -\frac{1}{2}$ tai $x > \frac{1}{3}$

**57.** $x \leq -8$ tai $x > 4$

**58.** $0 < x < 3$

**59.** **a)** $-2 < x < -1$ tai $x > -1$ **b)** $x > -1$

**60.** $x \leq -\frac{1}{4}$ tai $x = 0$ tai $x > 3$

**61.** $x < 0$ tai $0 < x \leq \frac{1}{4}$

**62.** $-1 < x < 1 - \sqrt{3}$ tai $1 < x < 1 + \sqrt{3}$

**63.** Positiivisten lukujen $a$ ja $b$ harmoninen keskiarvo sievenee muotoon $\frac{2ab}{a+b}$. Osoita, että epäyhtälö $\frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b}$ on aina tosi.

**64.** Positiivisten lukujen $a$ ja $b$ geometrinen keskiarvo on $\sqrt{ab}$. Osoita, että epäyhtälö $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ on aina tosi.

## 2.1 Funktion raja-arvo

**65.** **a)** oikein **b)** väärin **c)** väärin
**d)** oikein **e)** oikein **f)** oikein

**66.** **a)** oikein **b)** väärin **c)** väärin
**d)** väärin **e)** oikein **f)** väärin

**67.** $-4$

**68.** **a)** raja-arvoa ei ole **b)** 0

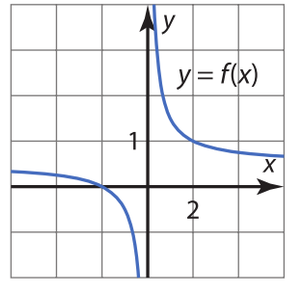
**69.** **a)** $f(-3) = 2$, $f(3) = 7$

**b)** $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ ei ole olemassa, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$

**70.** **a)** $f(-4) = 5$, $f(-1) = 3$, $f(2) = 2$

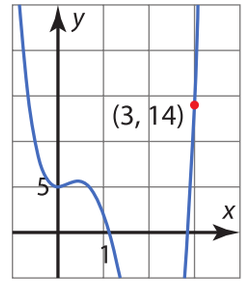
**b)** $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$ ei ole olemassa, $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ ei ole olemassa

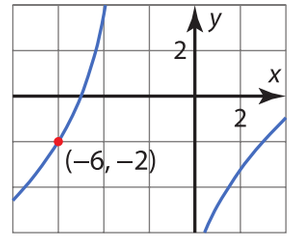
**71.**




**a)** ei ole olemassa **b)** 1

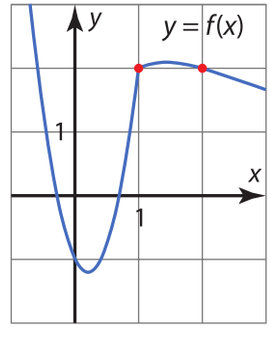
**72.** **a)** 14 **b)** $-2$




**73.** $\lim\limits_{x \to -3} g(x) = -5$

**74.** **a)** 2 **b)** 2



**75.** $a = 5$

**Vihje:** Päättele toispuolisten raja-arvojen suuruudet ja merkitse ne yhtä suuriksi.

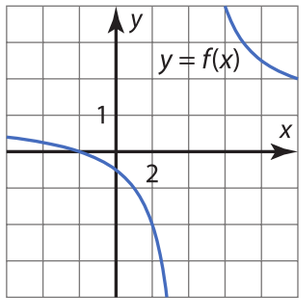
**76.** **a)** 0,625 **b)** ei ole olemassa

**77.** **a)** ei ole olemassa **b)** 8

**78.** **a)** $f(-5) = 2$, $f(-2)$ ei ole määritelty, $f(2) = 1$, $f(8) = 4$

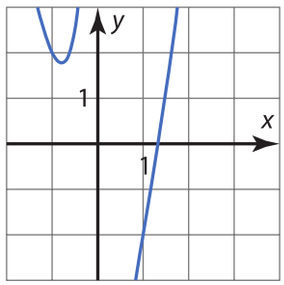
**b)** $\lim\limits_{x \to -5} f(x)$ ei ole olemassa, $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ ei ole olemassa, $\lim\limits_{x \to 8} f(x) = 3$

**79.**

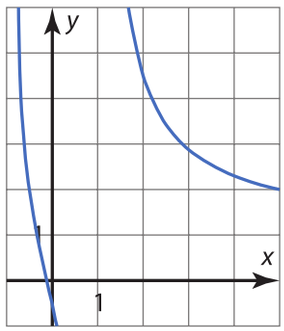



**a)** 0,25 **b)** ei ole olemassa

**80.** **a)** $-2$




**b)** 4,5




**81.** **a)** $-5$ **b)** ei ole

**82.** **a)** Kohdissa $x = -7$ ja $x = 2$.

**b)** kohdassa $-7$ ei raja-arvoa, kohdassa 2 raja-arvo on $-\frac{1}{9} \approx -0{,}11$

**83.** **a)** $f(a) = q$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = p$

**b)** $f(b) = r$, $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ ei ole olemassa

**84.** $a = -1$

**Vihje:** Päättele toispuolisten raja-arvojen suuruudet ja merkitse ne yhtä suuriksi.

**85.** **a)** 2,7183 (≈ e, Neperin luku, kurssi 8)

**b)** 0,693 (≈ ln 2, kurssi 8)

**86.** **a)** 0,02

**b)** 0,0002

**Vihje:**

**a)** Sievennä erotusta $|f(x) - 7|$ niin, että saat näkyviin lausekkeen $|x - 2|$, eli luvun $x$ etäisyyden kohdasta 2, ja päättele vastaus.

**b)** Sievennä erotusta $|f(x) - 0|$ niin, että saat näkyviin lausekkeen $|x - 0|$, eli luvun $x$ etäisyyden kohdasta 0, ja päättele vastaus.

**87.** $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

**88.** $\delta = 2\varepsilon$

**Vihje:** Määritä sellainen lauseke luvulle $\delta$, että ehdosta $0 < |x - 4| < \delta$ seuraa epäyhtälön $\left|(\frac{1}{2}x + 5) - 7\right| < \varepsilon$ voimassaolo, kun $\varepsilon > 0$.

## 2.2 Raja-arvon määrittäminen

**89.** **a)** $-3$ **b)** 0

**90.** **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** ei ole olemassa

**91.** **a)** 0 **b)** ei ole olemassa

**92.** **a)** $-\frac{1}{3}$ **b)** ei ole olemassa

**93.** **a)** $-6$ **b)** 8

**94.** **a)** 0 **b)** $-2$

**95.** $-3$

**96.** **a)** 1 **b)** ei ole olemassa

**97.** **a)** $\frac{3}{2}$ **b)** 1

**Vihje:** Sievennä lauseke ensin yhdeksi rationaalilausekkeeksi ja supista.

**98.** **a)** $-4$ **b)** $\frac{3}{2}$

**99.** **a)** 4 **b)** $\frac{7}{12}$

**100.** **a)** $\frac{5}{4}$ **b)** ei ole olemassa

**101.** **a)** 8 **b)** 0

**102.** $-1$

**103.** $-2$

**104.** **a)** $-\frac{5}{2}$ **b)** $-2$

**Vihje:** Sievennä lauseke ensin yhdeksi rationaalilausekkeeksi ja supista.

**105.** **a)** $-\frac{1}{4}$ **b)** 4

**Vihje:** Sievennä lauseke ensin yhdeksi rationaalilausekkeeksi ja supista.

**106.** **a)** $-10$ **b)** ei ole olemassa

**Vihje:** Laske toispuoliset raja-arvot.

**107.** $\frac{1}{5}$

**Vihje:** Laske toispuoliset raja-arvot. Huomaa, että vain toinen itseisarvolausekkeista vaihtaa merkkiä tarkastelukohdassa.

**108.** 32

**Vihje:** Sijoita ensin raja-arvon lausekkeeseen funktion lauseke ja sievennä.

**109.** $a = \frac{3}{2}$

**110.** **a)** $a = -6$, raja-arvo $-7$

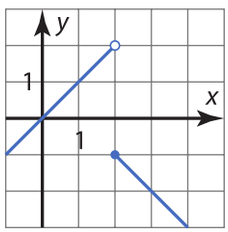
**b)** $a = 2$, raja-arvo 8

**Vihje:** Millä edellytyksellä rationaalilausekkeella voi olla raja-arvo nimittäjän nollakohdassa?

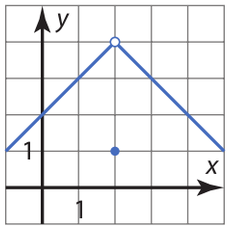
### 2.3 Funktion jatkuvuus

**111.** **a)** ei **b)** on **c)** ei

**112.** **a)** Esimerkiksi:




**b)** Esimerkiksi:




**113.** **a)** Väärin. Pitää lisäksi olla $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

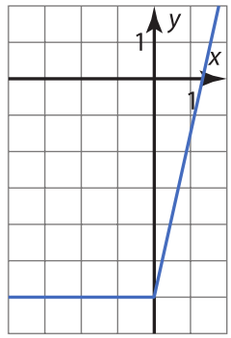
**b)** Oikein. Funktio voi olla jatkuva vain kohdassa, jossa se on määritelty.

**c)** Oikein. Funktio on jatkuva kohdassa 2, jos tässä kohdassa funktion arvo ja raja-arvo ovat yhtä suuret.

**d)** Väärin. Funktion pitää lisäksi olla määritelty ja pitää olla $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

**114.** **a)** ei **b)** on

**115.** **a)** Funktio on jatkuva molemmissa kohdissa.



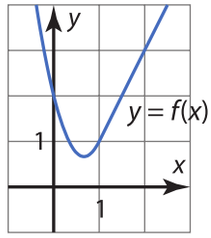

**b)** Totea laskemalla, että funktion arvo ja raja-arvo ovat yhtä suuret kohdassa $-3$ ja kohdassa 0.

**116.** on

**117.** $f(-6) = -2$ ja $f(3) = 4$

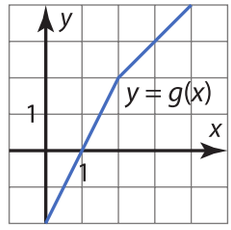
**118.** $f(-4) = -12$

**119.** $b = 2$




**120.** $b = 9$

**121.** $a = 2$

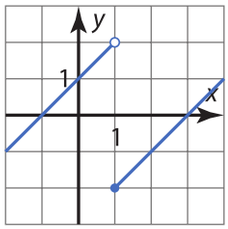



**122.** **a)** ei **b)** on **c)** ei

**123.** on

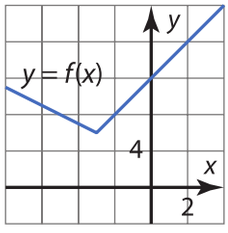
**124.** **a)** on **b)** ei

**125.** Esimerkiksi $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{kun } x<1 \\ x-3, & \text{kun } x\geq 1 \end{cases}$

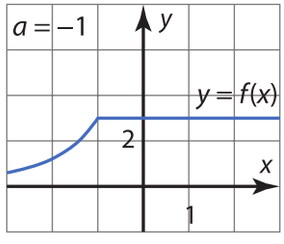


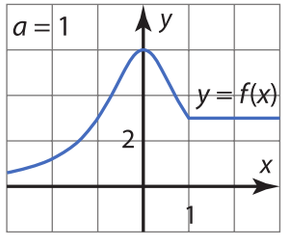

**126.** $f(5)=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}$

**127.** $b=12$




**128.** $a=-1$ tai $a=1$




**129.** **a)** $a=-4$ **b)** $f(2)=-8$

**Vihje:** Tutki miten $a$ pitää määritellä, että raja-arvo kohdassa $2$ on olemassa.

**130.** $a=-8,\ b=-4$

**131.** ei

**132.** **a)** ei (Funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa $0$.)

**b)** on ($\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ ja $f(0)=0$)

### 2.4 Jatkuvuus joukossa

**133.** **a)** on **b)** ei ole

**134.** **a)** on jatkuva ja kaikkialla jatkuva

**b)** on jatkuva, ei ole kaikkialla jatkuva (funktio $f$ ei ole määritelty, kun $x=1$)

**135.** **a)** ei **b)** on **c)** ei **d)** on **e)** on

**136.** **a)** on **b)** ei **c)** on **d)** ei

**137.** **a)** on, voi soveltaa Bolzanon lausetta

**b)** on, voi soveltaa Bolzanon lausetta

**138.** **a)** on, voi soveltaa Bolzanon lausetta

**b)** ei, ei voi soveltaa Bolzanon lausetta.

**139.** **a)** voidaan **b)** ei voida

**c)** ei voida (funktio ei ole määritelty koko välillä)

**140.** Tutki funktiota välillä $[-2, 1]$ ja sovella Bolzanon lausetta.

**141.** **a)** Tutki funktion $x^3+\frac{3}{2}x^2-1$ nollakohtien olemassaoloa. Nollakohta on välillä $]-2, -1[$.

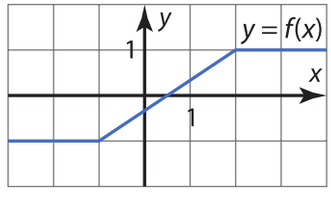
**b)** Tutki funktion $2x^4-x^3+x^2-1$ nollakohtien olemassaoloa. Nollakohta on esimerkiksi välillä $]0, 1[$.

**142.** Osoita, että yhtälöllä $x^4-5x^3+1=-1$ on ainakin yksi ratkaisu. Ratkaisu löytyy esimerkiksi väliltä $]0, 1[$.

**143.** Sovella Bolzanon lausetta erikseen väleihin $[-1, 0]$ ja $[1, 2]$.

**144.** **a)** on **b)** ei ole

**145.** Esimerkiksi $h(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$, kun $-1\leq x\leq 2$




**146.** **a)** on **b)** ei **c)** on

**147.** **a)** ei **b)** on

**148.** **a)** on **b)** ei

**149.** **a)** on **b)** ei

**150.** Osoita, että yhtälöllä $2x^3-3x^2-1=\pi$ on ainakin yksi ratkaisu esimerkiksi välillä $[0, 3]$.

**151.** Osoita, että yhtälöllä $x^3-1=x$ on ainakin yksi ratkaisu välillä $[1, 2]$.

**152.** Osoita, että yhtälöllä $\frac{1}{1+x^2}=x$ on ainakin yksi ratkaisu esimerkiksi välillä $[0, 1]$.

**153.** Osoita, että jatkuva funktio $x^n-x-1$ on saa erimerkkiset arvot välin $]1, 2[$ päätepisteissä, kun kokonaisluku $n\geq 2$.

**154.** Osoita, että funktio $f(x)-g(x)$ saa erimerkkiset arvot välin päätepisteissä.

**155.** Osoita, että jatkuvan funktion $f(x) - \frac{f(a)+f(b)}{2}$ arvot ovat välin $[a, b]$ päätepisteissä toistensa vastaluvut (eli arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset tai nolla).

### 3 Derivaatta

**156.** **1)** C **2)** A **3)** B **4)** A ja C

**157.** **a)** 2 **b)** $-1$

**158.** **a)** $-1$ **b)** noin 0,78

**159.** **a)** $4h + 24$, kun $h \neq 0$
**b)** $f'(3) = 24$

**160.** **a)** $3h + 14$, kun $h \neq 0$ **b)** $f'(2) = 14$

**161.** $f'(-1) = -3$ (Erotusosamäärä on $\frac{3}{h-1}$, kun $h \neq 0$.)
**Vihje:** Muodosta ja sievennä ensin funktion erotusosamäärä kohdassa $-1$.

**162.** **a)** $f'(x) = 8x$ **b)** $f'(-10) = -80$, $f'(1) = 8$

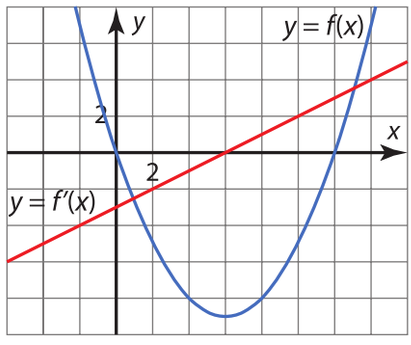
**163.** **a)** $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
**b)** $-\frac{1}{9}$
**Vihje:** Derivaatta on tangentin kulmakerroin.

**164.** **a)** $-2$ °C/h **b)** 0,5 °C/h
**Vihje:** Skaalaa $y$-akselin asteikko niin, että kuvaaja sopii näyttöön halutulta alueelta. Piirrä a-kohdassa sekantti ja b-kohdassa tangentti. Määritä näiden kulmakertoimet.

**165.** **a)** $x = \frac{5}{2}$ **b)** $x = 0$
**Vihje:** Määritä ensin derivaattafunktio ja muodosta sitten yhtälö.

**166.** **a)** $\frac{1}{2}x - 3$

**b)**




**c)** Kuvaaja on (hetkellisesti) vaakasuora.

**d)** Kuvaaja on laskeva.

**167.** **1)** B **2)** C **3)** D **4)** A ja B

**168.** **a)** 0 **b)** 3

**169.** **a)** $3h^2 - 18h + 36$, kun $h \neq 0$ **b)** $f'(-2) = 36$

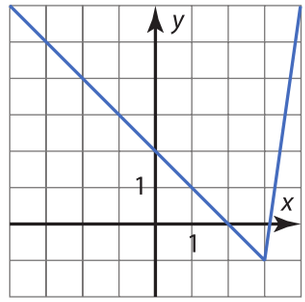
**170.** $\frac{-h-8}{7(h^2+8h+14)}$, kun $h \neq 0$ **b)** $g'(4) = -\frac{4}{49}$

**171.** **a)** $-23$ **b)** $-\frac{3}{25}$

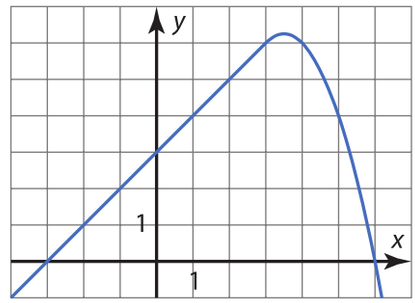
**172.** **a)** 12 miljoonaa ihmistä/vuosi
**b)** 16 miljoonaa ihmistä/vuosi
**Vihje:** Skaalaa $y$-akselin asteikko sopivasti, jotta kuvaaja sopii näyttöön halutulta alueelta. Piirrä a-kohdassa sekantti ja b-kohdassa tangentti. Määritä näiden kulmakertoimet.

**173.** Sijoita funktion lauseke derivaatan määritelmään, sievennä ja määritä raja-arvo.

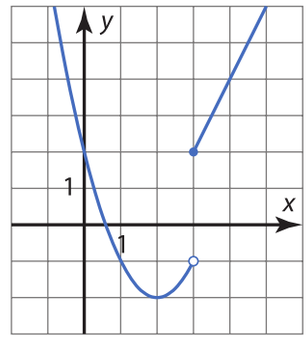
**174.** **a)** jatkuva, ei derivoituva




**b)** jatkuva ja derivoituva




**c)** ei jatkuva, ei derivoituva

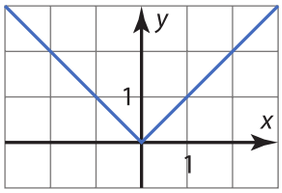



**175.** $-4$

**176.** **a)** $f'(-3) = -7$ **b)** $f'(x) = 4x + 5$

**Vihje:** **b)** Määritä ensin derivaatta yleisesti kohdassa $a$ eli $f'(a)$.

**177.** **a)**




Ei ole derivoituva kohdassa $x = 0$.

**b)** Erotusosamäärän toispuoliset raja-arvot kohdassa $0$ ovat erisuuret:

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-h}{h} = -1$$

ja

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{x\to 0-} \frac{h}{h} = 1$$

**178.** **a)** $f'(0) = g(0)$ **b)** $f'(0) = 1$

### 4.1 Potenssin ja tulon derivaatta

**179.** **a)** $8x^7$ **b)** $15x^2$ **c)** $-12x^5$
**d)** $4x^9$ **e)** $-17$ **f)** $0$

**180.** **a)** $f'(x) = 10x^4 - 36x^2 + 5$

**b)** $g'(x) = 12x^3 + \frac{3}{2}x$

**181.** **a)** $f'(x) = -6x^2 + 2x - 1$, $f'(2) = -21$

**b)** $f'(t) = 250t - 110$, $f'(2) = 390$

**182.** **a)** $f'(x) = 10x^4 - 32x^3 + 48x^2$

**b)** $g'(t) = 9t^2 + 48t + 48$

**183.** **a)** $f'(x) = 2x^2 + 5x - 3$

**b)** $f'(0) = -3$

**c)** $x = -3$ ja $x = \frac{1}{2}$

**184.** **a)** $x = \frac{3}{2}$ **b)** $x = 1$

**Vihje:** Funktion kuvaajalle kohtaan $x = a$ piirretyn tangentin kulmakerroin ilmaisee funktion arvojen hetkellisen muutosnopeuden kohdassa $a$.

**185.** **a)** 19,6 m/s **b)** 29,4 m/ s

**186.** $p = 2$

**187.** $x < 2$

**188.** **a)** $h'(x) = 3(x^2 + 2x) + 3x(2x + 2) = 9x^2 + 12x$

**b)** $s'(x) = 2(6x^3 + 4) + (2x - 5) \cdot 18x^2$
$= 48x^3 - 90x^2 + 8$

**189.** **a)** $6x^2$ **b)** $-36x^{11}$ **c)** $\frac{8x^3}{5}$
**d)** $2x^7$ **e)** $0$ **f)** $\sqrt{2}$

**190.** **a)** $f'(x) = 12x^3 - 10x + 36$

**b)** $g'(t) = 2t^2 - \frac{3}{4}t + 1$

**191.** **a)** $f'(-1) = 49$ **b)** $g'(-1) = 4$

**192.** $b = 3$ ja $c = -2$

**193.** **a)** 8 m/s ja $-2$ m/s **b)** 1,8 s **c)** 16 m

**Vihje:** **c)** Kiven nopeus sen korkeimmassa kohdassa on $0$.

**194.** **a)** $g$ **b)** $x = 0$, $x = 1$ tai $x = 4$

**Vihje:** Funktion kuvaajalle kohtaan $x = a$ piirretyn tangentin kulmakerroin ilmaiseen funktion kuvaajan jyrkkyyden kohdassa $a$.

**195.** $-1 < x < 4$

**196.** $f'(x) = (6x^2 - 5)(4x^4 - 2x^2 - 1) +$
$(2x^3 - 5x + 1)(16x^3 - 4x)$,
$f'(1) = -23$

**197.** $s'(2) = 36$

**Vihje:** Käytä tulon derivointisääntöä.

**198.** **a)** $f'(x) = 10x + 14$

**b)** $f''(x) = 10$

**c)** $f'''(x) = 0$

**Vihje:** Funktion $f$ toinen derivaatta on derivaattafunktion $f''$ derivaatta.

**199.** $f(x) = 3x^2 - 14x + 20$

**Vihje:**

**1)** $f''$ on funktion $f$ toinen derivaatta eli derivaattafunktion $f'$ derivaatta.

**2)** Toisen asteen polynomifunktion lauseke on muotoa $f(x) = ax^2 + bx + c$.

**200.** **a)** $3x^2 + 5t^3$ **b)** $15xt^2 - 4t$

**201.** Muodosta derivaatta erotusosamäärän raja-arvona ja käytä tietoa $\lim_{x\to a}(k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x\to a} f(x)$.

**202.** Käytä induktioväitteen todistamisessa tulon derivointisääntöä: $\mathrm{D}\, x^{n+1} = \mathrm{D}(x \cdot x^n) =$
$1 \cdot x^n + x \cdot \mathrm{D}\, x^n = x^n + x \cdot nx^{n-1} = (n + 1)x^n$.

## 4.2 Polynomifunktion kasvaminen ja väheneminen

**203.** **a)** kasvava välillä $-3 \le x \le -1$ ja välillä $1 \le x \le 7$,
vähenevä välillä $-1 \le x \le 1$ ja välillä $x \ge 7$
**b)** maksimikohdat $x = -1$ ja $x = 7$,
minimikohdat $x = -3$ ja $x = 1$
**c)** maksimiarvot $f(-1) = 2$ ja $f(7) = 4$,
minimiarvot $f(-3) = -2$ ja $f(1) = -1$.

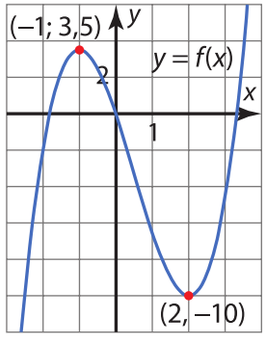
**204.** **a)** 3 **b)** 4 **c)** 2

**205.** **a)** aidosti kasvava välillä $x \le -2$ ja välillä $x \ge 0$, aidosti vähenevä välillä $-2 \le x \le 0$
**b)** $f(1{,}0000002)$

**206.** **a)**

| | $-1$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | | ↘ | | ↗ |

**b)** kasvava välillä $x \le -1$ ja välillä $x \ge 2$,
vähenevä välillä $-1 \le x \le 2$
**c)** maksimikohta $x = -1$, minimikohta $x = 2$
**d)**




**207.** $f(x)$ 4, $g(x)$ 1 ja $h(x)$ 3

**208.** maksimikohdat $x = -3$ ja $x = 2$, minimikohta $x = 0$

**209.** **a)** aidosti kasvava välillä $x \le -4$ ja välillä $x \ge 1$, aidosti vähenevä välillä $-4 \le x \le 1$
**b)** maksimikohta $x = -4$, minimikohta $x = 1$

**210.** **a)** minimikohta $x = -\frac{3}{2}$
**b)** minimiarvo $f(-\frac{3}{2}) = -\frac{27}{6}$
**c)** on, kohta $x = 0$

**211.** maksimiarvo $f(0) = 5$,
minimiarvot $f(-1) = -2$ ja $f(4) = -27$

**212.** Osoita, että funktiolla $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$ on ainakin yksi nollakohta ja korkeintaan yksi nollakohta.

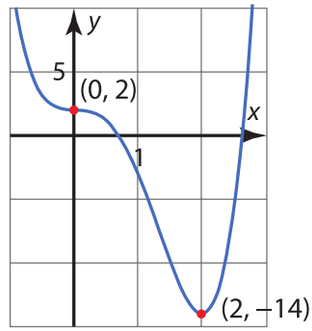
**213.** Osoita, että $x = 1$ on yhtälön ratkaisu ja, että yhtälöllä on korkeintaan yksi ratkaisu.

**214.** $-22 < a < 4$
**Vihje:** Laadi funktion $f(x) = x^5 - 5x + a$ kulkukaavio.

**215.** **a)** aidosti kasvava välillä $0 \le x \le 15$, aidosti vähenevä välillä $x \le 0$ ja välillä $x \ge 15$
**b)** $f(15{,}0000001)$

**216.** maksimikohta $x = 1$, minimikohdat $x = -2$ ja $x = 3$

**217.**




**218.** maksimikohta $x = -\frac{9}{5}$, minimikohta $x = \frac{9}{5}$, terassikohta $x = 0$

**219.** **a)** kasvava välillä $-1 \le x \le 0$ ja välillä $x \ge 7$,
vähenevä välillä $x \le -1$ ja välillä $0 \le x \le 7$
**b)** minimiarvot $f(-1) = -4$ ja $f(7) = -1028$,
maksimiarvo $f(0) = 1$

**220.** **a)** $a = -3$ **b)** minimiarvo $f(4) = -19$

**221.** **a)** $a = -4$, $b = -12$ ja $c = 1$
**b)** $f(-1) = -4$ ja $f(2) = -31$

**222.** Osoita, että yhtälöllä $x^5 + x = 5 - x^3$ on täsmälleen yksi ratkaisu.

**223.** Ratkaisut sijaitsevat väleillä $]-2, -1[$ ja $]0, 1[$.

**224.** yksi ratkaisu
**Vihje:** Osoita, että funktiolla $f(x) = (x + 1)^3 - 3x$ on ainakin yksi nollakohta. Laadi funktion $f$ kulkukaavio ja päättele, että funktiolla on korkeintaan yksi nollakohta.

**225.** $0 \le a \le 4$
**Vihje:** Laadi funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$ kulkukaavio.

**226.** Osoita, että derivaattafunktiolla ei ole nollakohtia, kun $a \neq 0$. Osoita edelleen, että $f'(x) > 0$, kun $a > 0$ ja $f'(x) < 0$, kun $a < 0$.

### 4.3 Polynomifunktion suurin ja pienin arvo

**227.** **a)** Kyllä, suurin arvo on kohdassa $x = 1$ tai $x = 2$.

**b)** ei voida sanoa

**228.** pienin arvo $-179$, ei suurinta arvoa

**229.** suurin arvo $0$, ei pienintä arvoa

**230.** suurin arvo $4$, kun $x = 1$,
pienin arvo $0$, kun $x = 0$ tai $x = 3$

**231.** **a)** suurin arvo $f(-2) = 48$,
pienin arvo $f(3) = -27$

**b)** suurin arvo $f(-2) = 48$,
pienin arvo $f(2) = -16$

**232.** korkein lämpötila $24\ °C$ kello 12.19
**Vihje:** Määritä funktion suuri arvo välillä $[0, 24]$.

**233.** **a)**

| $-2$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| | $+$ | | $-$ | |
| | ↗ | | ↘ | |

suurin arvo kohdassa $x = 1$,
pienin arvo kohdassa $x = -2$ tai $x = 2$

**b)**

| $-5$ | | $-4$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|
| | $-$ | | $+$ | |
| | ↘ | | ↗ | |

suurin arvo kohdassa $x = -5$ tai $x = 0$,
pienin arvo kohdassa $x = -4$

**c)**

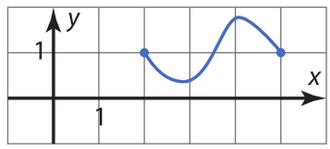
| $2$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|
| | $-$ | | $+$ |
| | ↘ | | ↗ |

ei suurinta arvoa,
pienin arvo kohdassa $x = 3$

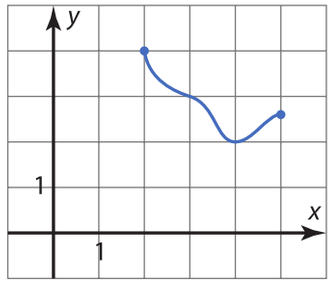
**234.** $k = -24$

**235.** Osoita, että funktion suurin arvo on negatiivinen.

**236.** **a)**




**b)**




**237.** **a)** $A(x) = 6x - x^2$, kun $0 \leq x \leq 6$

**b)** $9$

**238.**

| | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $+$ | | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | | ↗ | | ↘ | ↗ |

pienin arvo kohdassa $x = -2$ tai $x = 1$

**239.** **a)** pienin arvo $-15$ (kun $x = -2$ tai $x = 2$),
ei suurinta arvoa

**b)** ei pienintä arvoa, suurin arvo $1$ (kun $x = 0$)

**c)** ei suurinta arvoa,
pienin arvo $-15$ (kun $x = 2$)

**240.** suurin arvo $1125$ kohdassa $x = 5$,
pienin arvo $-1276$ kohdassa $x = -2$

**241.** $[-4, 44]$
**Vihje:** Katso lause s. 110.

**242.** Osoita, että funktio $f(x) = x^6 - 5x^3 + 7$ saa vain positiivisia arvoja.
**Vihje:** Määritä funktion $f$ pienin arvo.

**243.** Tutki epäyhtälöä $-2x^3 + 3x^2 + 12x - 20 \leq 0$ ja osoita, että funktio $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 20$ saa vain epäpositiivisia arvoja, kun $x > 1$.
**Vihje:** Määritä funktion $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 20$ suurin arvo, kun $x > 1$.

**244.** $\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$
**Vihje:** Muodosta pinta-alan funktio $A(x)$, kun paraabelilla sijaitseva kärki on $(x, y)$.

**245.** suurin arvo $f(6) = 5$ ja pienin arvo $f(5) = 0$
**Vihje:** Määritä ensin itseisarvomerkin sisällä olevan funktion suurin ja pienin arvo.

**246.** $a_{18} = 2466$

**Vihje:** Tutki funktiota $f(x) = -x^3 + 29x^2 - 61x$, kun $x > 0$.

**247.** **a)** $1 \le x \le 5$ **b)** $x = 3$

**Vihje:** Funktion arvojen muutosnopeuden kertoo derivaattafunktio $f'$. Funktion arvot pienenevät nopeimmin kun funktion muutosnopeus on negatiivinen ja pienin.

**248.** **a)** tammikuun 16. päivänä

**b)** tammikuun 31. päivänä

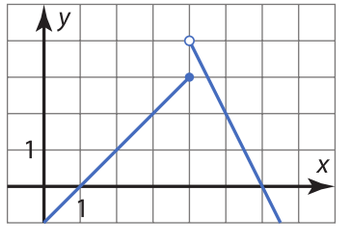
**Vihje:** Katso tehtävän edellisen tehtävän vihje.

**249.** **a)** 24 pisteessä $(-2, 0)$

**b)** $-\frac{27}{256}$ pisteissä $(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{55}}{4})$ ja $(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{55}}{4})$

**Vihje:** Sievennä lauseketta niin, että siinä on vain yksi muuttuja. Millä välillä muuttujan arvot ovat?

**250.** **a)**




**b)** pienin arvo $f(2) = 1$, ei suurinta arvo

**c)** Funktio ei ole jatkuva välillä $[2, 5]$, joten lauseen edellytykset eivät ole voimassa.

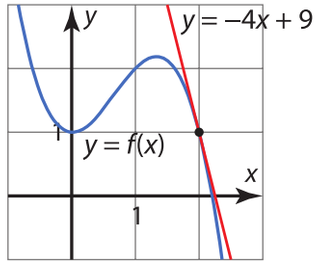
### 4.4 Tangentin yhtälö

**251.** **a)** $-16$ **b)** $\frac{1}{16}$

**252.** **a)** $y = 2x - 4 \quad (2x - y - 4 = 0)$

**b)** $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad (x + 2y + 3 = 0)$

**253.**




**254.** 4

**Vihje:** Ratkaise tangentin ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.

**255.** **a)** 25° **b)** 54°

**Vihje:** Selvitä b-kohdassa ensin ajanhetki, jolloin pallo osuu maahan.

**256.** 28°

**257.** Osoita, että käyrien välinen kulma on 90°.

**Vihje:** Osoita, että että leikkauspisteeseen piirrettyjen tangenttien kulmakertoiminen tulo on $-1$.

**258.** Osoita, että molemmat käyrät kulkevat pisteen $(1, -1)$ kautta ja käyrien tähän pisteeseen piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet ovat yhtä suuret eli tangentit yhtyvät.

**259.** $(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4})$

**260.** **a)** pisteisiin $(-1, 5)$ ja $(1, 3)$

**b)** $y = x + 6$ tai $y = x + 2$

**Vihje:** Muodosta yhtälö derivaattafunktion ja tangentin kulmakertoimen avulla.

**261.** **a)** $y = 7x + 5 \quad (7x - y + 5 = 0)$

**b)** $y = -\frac{1}{7}x - \frac{15}{7} \quad (x + 7y + 15 = 0)$

**262.** $(0; -1{,}2)$

**263.** $\frac{5}{4}$

**264.** 19°

**265.** 37° ja 56°

**Vihje:** Piirrä kuva.

**266.** Yhteinen piste $(\frac{1}{3}, \frac{11}{9})$. Osoita, että käyrille tähän pisteeseen piirretyillä tangenteilla on sama kulmakerroin.

**267.** $a = 0$ tai $a = 6$

**Vihje:** Sivuamispisteessä käyrien derivaatat ovat yhtä suuret, kun $x = \frac{a}{12}$. Sivuamispisteessä käyrillä on yhteinen piste. Muodosta yhtälöpari.

**268.** $a = -4$

**Vihje:** Leikkauspisteessä derivaattojen tulo on $-1$.

**269.** $y = 2x - 28$ tai $y = 2x + 28$

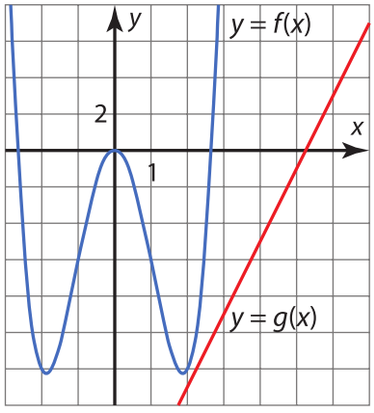
**Vihje:** Muodosta yhtälö derivaattafunktion ja tangentin kulmakertoimen avulla.

**270.** $y = -x$

**271.** 53,1°

**Vihje:** Paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax^2 + bx + c$. Sijoita lentorata koordinaatistoon, niin että kivi lähtee origosta ja määritä vakioiden $a$, $b$ ja $c$ arvot.

**272. a)** Kohdassa, jossa funktioiden kuvaajat ovat lähimpänä, on $x > 0$.




**b)** $(2, -12)$

**Vihje:** Siinä käyrän $y = f(x)$ pisteessä, joka on lähimpänä suoraa $y = g(x)$, on käyrän tangentin kulmakerroin sama kuin suoran kulmakerroin.

### 5.1 Osamäärän derivaatta

**273. a)** $h'(x) = \dfrac{5}{(x-5)^2}$, kun $x \neq 5$

**b)** $h'(x) = \dfrac{-x^2 - 2x - 3}{(x+1)^2}$, kun $x \neq -1$

**274. a)** $f'(x) = \dfrac{-4x^2 - 16}{(x^2 - 4)^2}$, kun $x \neq -2$ ja $x \neq 2$

**b)** $f'(0) = -1$

**275. a)** $t'(x) = -8x^{-9}$, kun $x \neq 0$

**b)** $s'(x) = \dfrac{-15}{x^4}$, kun $x \neq 0$

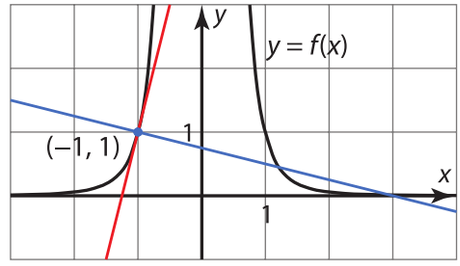
**c)** $r'(x) = \dfrac{1}{x^7}$, kun $x \neq 0$

**276.** $x = 3$

**277.** $x = \dfrac{8}{3}$

**278.** $2x + 2y + 5 = 0 \quad \left(y = -x - \dfrac{5}{2}\right)$

**279.** $x + 4y - 3 = 0 \quad \left(y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}\right)$




**280. a)** $f(1) = 2$, $f'(1) = -\dfrac{2}{3}$

**b)** $f(1) = -\dfrac{6}{5}$, $f'(1) = \dfrac{3}{5}$

**281.** Pisteessä $(-3, 0)$ 80,5°:n kulmassa ja pisteessä $(3, 0)$ 50,2°:n kulmassa.

**282.** $x < \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ja $x \neq -1$

**283.** $a = -2\sqrt{3}$ tai $a = 2\sqrt{3}$

**284. a)** $s'(x) = \dfrac{-x-4}{x^3}$, kun $x \neq 0$

**b)** $s'(x) = \dfrac{12 - 3x^2}{(x^2 - 5x + 4)^2}$, kun $x \neq 1$ ja $x \neq 4$

**285. a)** $u'(x) = 10x^{11}$

**b)** $v'(x) = -\dfrac{72}{5x^{13}}$, kun $x \neq 0$

**286. a)** $f'(x) = \dfrac{-9x^2 + 60x - 75}{x^4}$, kun $x \neq 0$

**b)** $f$ ei ole aidosti vähenevä, sillä derivaattafunktio saa positiivisia ja negatiivisia arvoja. Esimerkiksi $f(1) = -24$ ja $f(2) = \dfrac{9}{16}$.

**287.** $x = 2$ ja $x = 6$

**288.** $-2 < a < 2$

**289. a)** $13x + 10y + 16 = 0 \quad \left(y = -\dfrac{13}{10}x - \dfrac{8}{5}\right)$

**b)** $10x - 13y + 33 = 0 \quad \left(y = \dfrac{10}{13}x + \dfrac{33}{13}\right)$

**290.** $(-3, 2\frac{1}{3})$ ja $(3, 1\frac{2}{3})$

**291. a)** $A \approx 3{,}6$ **b)** $A = 3\dfrac{109}{189}$ $\left(= \dfrac{676}{189}\right)$

**292.** Osoita, että kuvaajien leikkauspisteessä tangenttien kulmakertoimien tulo on $-1$.

**293.** $f(-1) = -\dfrac{1}{2}$, $f'(-1) = -\dfrac{1}{8}$, $f''(-1) = -\dfrac{1}{16}$

**294.** $a < -1$ tai $a > 1$

**295. a)** $f'(x) = \dfrac{ax^2 + 2ax + 1}{(ax^2 - 1)^2}$

**b)** $0 \leq a \leq 1$

### 5.2 Rationaalifunktion kulku

**296.** **a)** $x \neq -2{,}0$ ja $x \neq 2{,}0$

**b)** minimikohdat $x \approx -3{,}0$ ja $x \approx 0{,}9$, maksimikohdat $x \approx -0{,}9$ ja $x \approx 3{,}0$

**c)** minimiarvot $4{,}2$ ja $-0{,}3$, maksimiarvot $0{,}3$ ja $-4{,}2$

**297.** **a)** kasvava välillä $x \leq -3$ ja välillä $x \geq -1$, vähenevä välillä $-3 \leq x < -2$ ja välillä $-2 < x \leq -1$

**b)** maksimikohta $x = -3$ ja minimikohta $x = -1$

**298.** **a)** kasvava välillä $x \leq 0$, vähenevä välillä $x \geq 0$

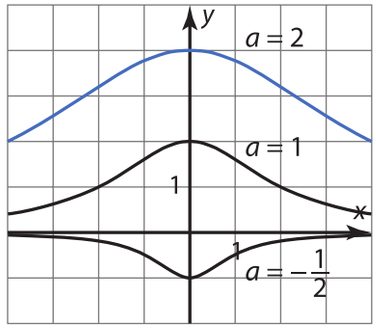
**b)** maksimikohta $x = 0$, maksimiarvo $3$

**299.** maksimikohta $x = 3$, maksimiarvo $-6\frac{3}{4}$

**300.** minimikohta $x = -2\sqrt{3}$, maksimikohta $x = 2\sqrt{3}$

**301.** Osoita derivaattafunktion merkkiä tutkimalla, että funktio on aidosti monotoninen.

**302.** **a)**




**b)** maksimiarvo $4$ kohdassa $x = 0$

**303.** pienin arvo $-\frac{4}{5}$, suurin arvo $1$

**304.** suurin arvo $12$, pienin arvo $0$

**305.** Määrä suurimmillaan $6200$ yksilöä $3{,}4$ vuoden päästä tutkimusjakson alusta lukien.

**306.** arvojoukko $[\frac{8}{11}, 4]$

**307.** Osoita, että funktion pienin arvo on positiivinen (pienin arvo on $h(0) = 1 > 0$).

**308.** **a)** $x \neq -1{,}4$ ja $x \neq 1{,}4$

**b)** minimikohdat $x \approx -0{,}8$ ja $x \approx 1{,}9$, maksimikohdat $x \approx -2{,}0$ ja $x \approx 0{,}9$

**c)** minimiarvot $4{,}5$ ja $-0{,}4$, maksimiarvot $1{,}0$ ja $-4{,}7$

**d)** ei ole

**309.** **a)** kasvava välillä $x \leq 2$ ja välillä $x \geq 6$, vähenevä välillä $2 \leq x < 4$ ja välillä $4 < x \leq 6$,

**b)** maksimikohta $x = 2$ ja maksimiarvo $4$, minimikohta $x = 6$ ja minimiarvo $12$

**310.** minimikohta $-\sqrt{3}$, maksimikohta $\sqrt{3}$

**311.** määrittelyjoukko on $\mathbf{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
minimikohta $x = -\sqrt{6}$, maksimikohta $x = \sqrt{6}$

**312.** minimikohta $x = -\sqrt{5}$ ja minimiarvo $\frac{25\sqrt{5}}{2}$, maksimikohta $x = \sqrt{5}$ ja maksimiarvo $-\frac{25\sqrt{5}}{2}$

**313.** $a = 3$, maksimiarvo on $4$, funktiolla on myös minimi $f(3) = 0$.

**Vihje:** Maksimikohdassa täytyy funktion derivaatan olla nolla.

**314.** Pienin arvo $0$, suurin arvo $8$

**315.** suurin arvo $\frac{1}{9}$, pienin arvo $-\frac{3}{5}$

**316.** arvojoukko $[\frac{2}{3}, \frac{8}{3}]$

**317.** suurin arvo $\frac{1}{4}$, pienintä arvoa ei ole

**318.** suurin arvo $3$, pienintä arvoa ei ole

**319.** Lantakuoriaisten määrä muuttui nopeimmin $2{,}2$ kk kuluttua tutkimusjakson alusta. Määrä väheni tällä hetkellä $1000$ yksilöä kuukaudessa.

**Vihje:** Lantakuoriaisten määrän muutosnopeuden ilmaisee derivaattafunktio. On siis etsittävä derivaattafunktion suurin arvo.

**320.** Funktiolla on minimikohdat $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{3}}$ ja $x = \sqrt[3]{1+\sqrt{3}}$. Kulkukaavion mukaan funktiolla on pienin arvo minimikohdassa, suurinta arvoa ei ole. Koska $g(\sqrt[3]{1+\sqrt{3}}) < g(\sqrt[3]{1-\sqrt{3}})$, niin funktio saa pienimmän arvonsa kohdassa $x = \sqrt[3]{1+\sqrt{3}}$.

**321.** $a < -2$

**Vihje:** Nimittäjä on aina positiivinen. Määritä vakio $a$ niin, että osoittaja saa vain negatiivisia arvoja.

**322.** Ei ole kumpaakaan. Funktiolla ei ole paikallisia ääriarvokohtia.

## 6 Derivaatan sovelluksia

**323.** Aitaus on neliö, jonka sivun pituus on 45 m.

**324.** Varjostin on kuutio, jonka särmän pituus on 25 cm.

**325.** Pois leikattavan neliön sivu on 5,0 cm.

**326.** järven suuntainen sivu on 72,0 m, järveä vastaan kohtisuorat sivut 24,0 m

**327.** joen suuntainen sivu 63,2 m, jokea vastaan kohtisuora sivu 31,6 m

**Vihje:** Merkitse sivujen pituuksia kirjaimilla $x$ ja $y$. Muodosta pinta-alan avulla yhtälö ja ratkaise lauseke $x$:lle tai $y$:lle. Määritä pienin arvo kulkukaavion avulla.

**328.** hinta $14{,}89\ € \approx 14{,}90\ €$, myyntimäärä noin 5360 lippua

**329.** $9{,}88\ € \approx 9{,}90\ €$

**330.** $12\sqrt{3}$

**Vihje:** Piirrä kuva ja selvitä lausekkeet suorakulmion leveydelle ja pituudelle.

**331.** pituus 23,0 m, leveys 11,5 m, väliseinät leveyssuunnassa

**332.** hinta $15{,}50\ €$, myyntimäärä noin 475 kpl

**333.** seinän suuntainen sivu 12 m, seinää vastaan kohtisuora sivu 9 m

**Vihje:** Huomaa, että seinän suuntainen sivu voi olla pituudeltaan korkeintaan 12 m pitkä.

**334.** pohjan säde 5,4 cm, korkeus 11 cm

**335.** neliön sivu 6,0 cm

**336.** hinta 32 € pari, voitto 1690 €
**Vihje:** voitto = myyntitulo − kulut

**337.** $y = 2x + 5$ ja $y = -6x + 13$

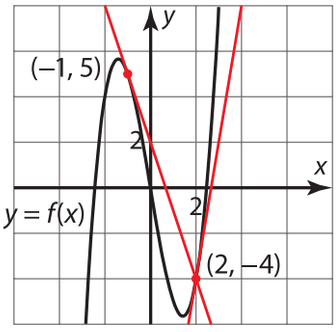
**338.** a) $y = 4x - 13$ ja $y = -2x + 5$

b) Mikään tangentti ei kulje annetun pisteen kautta. (Piirrä kuva.)

**339.** $(-\sqrt{3}, 6)$ tai $(\sqrt{3}, 6)$

**340.** $y = -3x + 2$ ja $y = 6x - 16$

**Vihje:** Annettu piste on funktion kuvaajalla, mutta löytyy myös toinen kuvaajan piste, johon piirretty tangentti leikkaa kuvaajan annetussa pisteessä.




**341.** a) 2,64 m pitkästä osasta ympyrä ja 3,36 m pitkästä osasta neliö

b) koko tangosta tehdään ympyrä

**Vihje:** Merkitse toisen osan pituutta kirjaimella $x$, jolloin toisen osan pituus on $6 - x$.

**342.** a) 4 b) $6\sqrt{3}\,\pi$

c) suurinta tilavuutta ei ole, mutta tilavuudella on yläraja $4\pi$

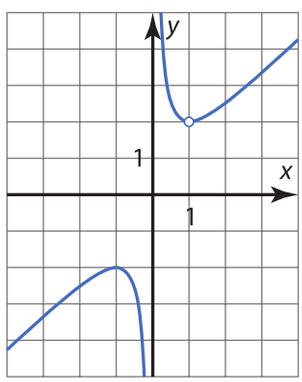
**Vihje:** Piirrä kuva ja päättele lausekkeet lieriön pohjan säteelle ja lieriön korkeudelle.

### Kertaus

**K1.** a) $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$

b) $f(-1) = -2$ ja $f(1)$ ei ole määritelty

c)




**K2.** a) $2x - 5$, kun $x \neq 0$ b) $\frac{5}{4}$, kun $x \neq \frac{1}{2}$

c) $-1$, kun $x \neq 7$ d) $x - 7$, kun $x \neq -7$

**K3.** **a)** $x \neq -1$ ja $x \neq 0$

**b)** $f(x)=\frac{1}{x+1}$, $f(-\frac{2}{3})=3$

**K4.** **a)** $x=-2$ **b)** $x=\frac{1}{3}$

**K5.** **a)** $x=-1$ tai $x=\frac{4}{5}$ **b)** $x=-\frac{3}{2}$ tai $x=2$

**K6.** **a)** $x \leq 0$ tai $x > 2$ **b)** $x < 2$ tai $x > 3$

**K7.** $x < -3$ tai $\frac{1}{2} < x < 2$

**K8.** $x < -1$ tai $x = 0$

**K9.** määrittelyjoukko $\mathbf{R} \setminus \{-3, \frac{1}{4}\}$, $f(x)=\frac{x^2+3x}{4x-1}$

**Vihje:** Jaa nimittäjä tekijöihin nollakohtien avulla. Jaa osoittaja tekijöihin erottamalla yhteinen tekijä ja käyttämällä binomin neliön kaavaa tai nollakohtien avulla.

**K10.** 18 henkeä, 39 euroa

**K11.** $c=-14$, $f(x)=\frac{2x+2}{5}$,
määrittelyjoukko $\mathbf{R} \setminus \{7\}$

**K12.** $a=3$ ja $b=-4$

**K13.** **a)** $f(-4)$ ei ole olemassa, $f(-2)=1$, $f(3)$ ei ole olemassa

**b)** $\lim\limits_{x\to-4} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ ei ole olemassa, $\lim\limits_{x\to3} f(x)$ ei ole olemassa

**K14.** **a)** 4,5 **b)** ei ole olemassa

**K15.** **a)** $-\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{3}{4}$

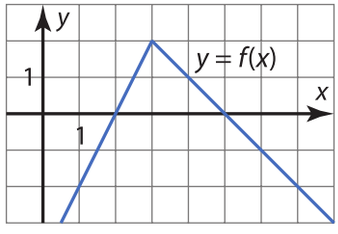
**K16.** **a)** 4 **b)** ei ole olemassa

**K17.** **a)** ei ole **b)** on

**K18.** $g(4)=8$.

**Vihje:** Tutki raja-arvoa kohdassa 4.

**K19.** $a=5$




**K20.** **a)** on

**b)** ei ole (ei ole oikealta jatkuva päätepisteessä 4)

**c)** on

**K21.** Perustele, että funktio $f$ on jatkuva ja se saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja. Esimerkiksi $f(0)=-20$ ja $f(2)=64$.

**K22.** Perustele, että funktio $f(x)=-x^4+x^2+3x+2$ on jatkuva ja se saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja. Esimerkiksi $f(0)=2$ ja $f(2)=-4$.

**K23.** Osoita, että funktiolla $f$ on ainakin yksi nollakohta esimerkiksi välillä $]-3,-1[$ ja välillä $]0, 3[$.

**Vihje:** Etsi välin $[-3, 3]$ sisältä erillisiä osavälejä, joilla voit soveltaa Bolzanon lausetta.

**K24.** **a)** 0 **b)** ei ole olemassa

**K25.** **a)** $\frac{3}{2}$ **b)** $-2$

**Vihje:** Sievennä lauseke murtolausekkeeksi ja supista.

**K26.** **a)** $f(1)=3$ ja $f(3)=1$

**b)** $f'(1)=0$ ja $f'(3)=-2$

**K27.** **a)** 12 **b)** $\frac{3}{4}$

**K28.** **a)** $6x-1$ **b)** $\frac{-7}{x^2}$

**K29.** **a)** 53 **b)** $-12$

**K30.** Osoita, että derivaattafunktio $f'$ saa arvon 1 kahdessa eri kohdassa. ($f'(-1)=1$ ja $f'(1)=1$).

**K31.** **a)** maksimikohdat $x=-1$ ja $x=2$, minimikohdat $x=-4$ ja $x=1$

**b)** $f(-2)$

**K32.** **a)** kasvava välillä $x \leq -5$ ja välillä $x \geq -1$, vähenevä välillä $-5 \leq x \leq -1$

**b)** maksimikohta $x=-5$, maksimiarvo $\frac{19}{3}$, minimikohta $x=-1$, minimiarvo $\frac{-13}{3}$

**K33.** suurin arvo $f(2)=-44$ ja pienin arvo $f(5)=-98$

**K34.** **a)** $y=7x-16$

**b)** $y=-\frac{1}{7}x-\frac{12}{7}$ $(x+7y+12=0)$

**K35.** 82°

**K36.** Osoita, että välillä $[-3, 3]$ funktion $f(x)=x^3-3x^2-24x$ suurin arvo on korkeintaan 28 ja pienin arvo vähintään $-75$.

**K37.** Osoita, että $f'(x) \geq 0$ kaikilla $x$ ja $f'(x)=0$ vain, kun $x=0$.

**K38.** Osoita, että funktiolla $f(x)=2x^5+4x^3-10$ on ainakin yksi nollakohta (Bolzanon lause) ja korkeintaan yksi nollakohta (monotonisuus).

**K39.** [4, 8]

**K40.** $a = 1$, minimiarvo 1

**Vihje:** Selvitä funktion minimikohta ja maksimikohta.

**K41.** $k = -\frac{1}{2}$ tai $k = \frac{1}{2}$

**K42.** pohjasärmä 16,7 cm ja korkeus 33,3 cm

**K43.** 0,90 €, 450 kuppia

**K44.** **a)** $f'(x) = \frac{-24}{(2x-6)^2}$, kun $x \neq 3$

**b)** $g'(x) = \frac{-20x^2 - 8x + 10}{(4x^2+2)^2}$

**K45.** $x = 2$ tai $x = 4$

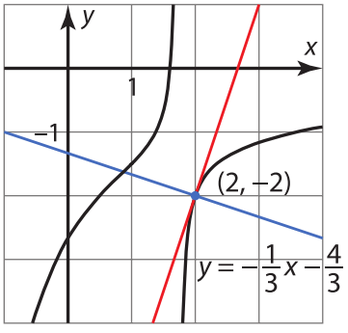
**K46.** maksimikohta $x = -6$ ja maksimiarvo $-9$, minimikohta $x = 6$ ja minimiarvo 9

**K47.** minimikohta $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $(= -\frac{\sqrt{2}}{2})$,
minimiarvo $-4\sqrt{2}$,
maksimikohta $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $(= \frac{\sqrt{2}}{2})$,
maksimiarvo $4\sqrt{2}$

**K48.** **a)** pienin arvo $-4$, suurin 0

**b)** arvojoukko $[-4, 0]$

**K49.** $y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$ $(x + 3y + 4 = 0)$




**K50.** $\frac{529}{36} (\approx 14{,}7)$

**Vihje:** Määritä tangentin yhtälö ja piirrä kuva.

**K51.** leveys 34 cm, pituus 103 cm, korkeus 51 cm

**Vihje:** Merkitse pohjan leveyttä kirjaimella $x$ ja akvaarion korkeutta kirjaimella $h$. Muodosta pinta-alalle lauseke muuttujan $x$ funktiona.

**K52.** korkeus 9,8 cm, pohjan säde 9,8 cm

**Vihje:** Merkitse pohjan sädettä kirjaimella $r$ ja lieriön korkeutta kirjaimella $h$. Muodosta pinta-alalle lauseke pohjan säteen $r$ funktiona.

**K53.** suurin arvo 5, ei pienintä arvoa

## Monivalintatehtävät

**M1.** c

**M2.** b

**M3.** c

**M4.** b

**M5.** b

**M6.** a

**M7.** a, b

**M8.** b

**M9.** b

**M10.** c

**M11.** b

**M12.** a, b

**M13.** c

**M14.** c

**M15.** a, c

**M16.** a, b, c

**M17.** b

**M18.** b

**M19.** a, c

**M20.** a, c

**M21.** b, c

**M22.** a, b

**M23.** a

**M24.** b, c

**M25.** a

**M26.** c

**M27.** a

**M28.** a

**M29.** a, c

**M30.** a, b

**M31.** c

**M32.** b

## Tehtäväsarja A

**A1.** **a)** $x = -3$ tai $x = 2$

**b)** $-3 \le x < 1$ tai $x \ge 0$

**A2.** **a)** 18 **b)** $\frac{20}{3}$

**A3.** **a)** 8 **b)** $-\frac{1}{3}$

**A4.** **a)** 23 **b)** $\frac{1}{3}$

**A5.** 1) $h'(x)$ 2) $g'(x)$ 3) $f'(x)$

**A6.** **a)** kasvava välillä $-5 \le x \le 0$ ja välillä $x \ge 2$, vähenevä välillä $x \le -5$ ja välillä $0 \le x \le 2$.

**b)** $f(-4{,}999998)$

**A7.** suurin $f(-1) = \frac{17}{3}$, pienin $f(2) = -\frac{10}{13}$

**A8.** **a)** on **b)** ei ole

**A9.** (3, 0)

**A10.** $a \ge 9$

## Tehtäväsarja B

**B1.** Tutki epäyhtälöä $-x^4 + 7x^3 - 5x^2 - 130 < 0$ ja osoita, että funktio $f(x) = -x^4 + 7x^3 - 5x^2 - 130$ saa vain negatiivisia arvoja.

**Vihje:** Määritä funktion $f(x) = -x^4 + 7x^3 - 5x^2 - 130$ suurin arvo.

**B2.** **a)** voidaan $(a = 2)$ **b)** ei voida

**B3.** maksimikohta $x = \frac{2}{3}$ ja maksimiarvo $-18$, minimikohta $x = 2$ ja miniminarvo $-2$

**B4.** Tutki funktiota $f(x) = x^4 - 4x - 1$. Osoita, että funktio on aidosti vähenevä, kun $x \le 1$ ja aidosti kasvava, kun $x \ge 1$. Osoita, että funktiolla on täsmälleen yksi nollakohta välillä $x \le 1$ ja täsmälleen yksi välillä $x \ge 1$.

**B5.** **a)** 14 vuorokauden **b)** 27 %

**c)** 7 vuorokauden

**Vihje:** Kasvunopeus on suurimmillaan, kun derivaattafunktion arvo on suurin.

**B6.** $a = 16$

**B7.** Määritä tangentin yhtälö ja osoita, että se kohtaa funktion $f$ kuvaajan toisessa pisteessä kohtisuorasti.

**B8.** **a)** $-1 < x < 0$ tai $0 < x < 1$ tai $x > 1$

**b)** Osoita, että toisessa leikkauspisteistä tangenttien kulmakertoimet ovat yhtä suuret. (Kuvaajat sivuavat toisiaan kohdassa $x = 1$.)

**B9.** 11 cm

**B10.** $(0, \frac{1}{4})$

# Hakemisto


aidosti kasvava funktio 94
aidosti monotoninen funktio 94
aidosti vähenevä funktio 94
arvojoukko 8

Bolzanon lause 63, 102

derivaatta 69
derivaattafunktio 74
derivoituva funktio 71

epäjatkuva funktio 51
erotusosamäärä 71

funktio 7
funktion derivoituvuus kohdassa 76

identtisen funktion derivaatta 86
itseisarvolausekkeet 46

jatkuva funktio 58
jatkuvan funktion arvojoukko 110
jatkuvuuden ominaisuuksia 58
jatkuvuus joukossa 58
jatkuvuus kohdassa 51
jatkuvuus välillä 60

kasvava funktio 94
käyrien välinen kulma 117

maksimiarvo 98
maksimikohta 98
minimiarvo 98
minimikohta 98
murtolauseke 7
murtolausekkeen supistaminen 10
murtolausekkeiden summa ja erotus 12
muutosnopeus 73
määrittelyehto 8
määrittelyjoukko 8

normaalin yhtälön määrittäminen 114

oikeanpuoleinen raja-arvo 32
osamäärän derivaatta 123
osamäärän raja-arvo 42

paloittain määritellyn funktion raja-arvo 44
paloittain määritelty funktio 34
pienin arvo 8, 106, 134
pienin arvo suljetulla välillä 109
polynomifunktio 7
polynomifunktion derivaatta 86
polynomifunktion ääriarvot 99
potenssifunktion derivaatta 84, 125

raja-arvo 30
raja-arvon laskusääntöjä 40
rationaaliepäyhtälö 25
rationaalifunktio 7
rationaalifunktion raja-arvo 40
rationaalifunktion ääriarvot 131
rationaaliyhtälö 16

sekantti 71
summan derivaatta 86
suurin arvo 8, 106, 134
suurin arvo suljetulla välillä 109

tangentin yhtälön määrittäminen 114
tangentti 69
toispuoliset raja-arvot 32
tulon derivaatta 89

vakiofunktion derivaatta 86
vasemmanpuoleinen raja-arvo 32
vähenevä funktio 94

ääriarvot 99, 131

# Valokuvien oikeudet

Kansikuva: Georgy Shafeev, Shutterstock
Kuvankäsittely: Vaidas Bagonas

s. 20 V. Belov, Shutterstock
s. 29 Dudarev Mikhail, Shutterstock
s. 36–37 luxsan, Shutterstock
s. 45 francis bonami, Fotolia
s. 62 Valentin Valkov, Shutterstock
s. 73 Marja Airio, Lehtikuva
s. 74 S. Borisov, Shutterstock
s. 79 Wolfgang Zwanzger, Shutterstock
s. 80 A.Krotov, Shutterstock
s. 81 NPeter, Shutterstock
s. 82 Alamy, MVPhotos
s. 88 SergeyIT, Shutterstock
s. 90–91 Emmi Korhonen, SanomaPro
s. 99 pk_roaming, Shutterstock
s. 107 George Sheldon, Shutterstock
s. 116 Beas777, Shutterstock
s. 117 Yuriy Kulik, Shutterstock
s. 120 dotshock, Shutterstock
s. 129 topshots, Fotolia
s. 138 Maksimilian, Shutterstock
s. 139 corlaffra, Shutterstock
s. 143 Dobermaraner, Shutterstock
s. 145 stocksnapper, Mostphotos
s. 148 Tim Graham, MVPhotos
s. 149 Panthermedia
s. 150 Cebas, Shutterstock
s. 154 Sea Wave, Shutterstock

**1**

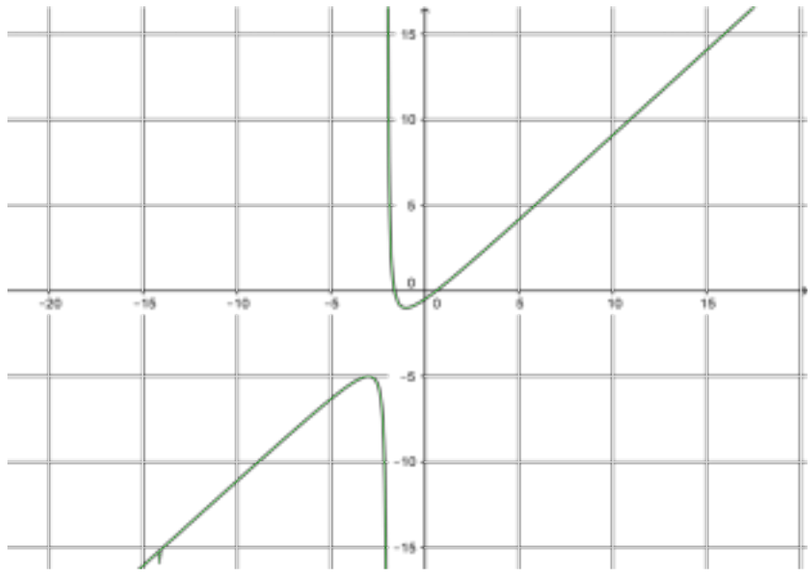
a) Funktion $f$ arvoa ei voida laskea niillä muuttujan $x$ arvoilla, joilla nimittäjän arvoksi tulee nolla. Funktio on määritelty kaikilla muilla muuttujan $x$ arvoilla.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$x + 2 = 0$$
$$x = -2$$

Funktion $f$ määrittelyehto on $x \neq -2$.
Funktion $f$ määrittelyjoukko on $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$.

b) Piirretään laskimella funktion $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x+2}$ kuvaaja.




Vastaus a) $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$

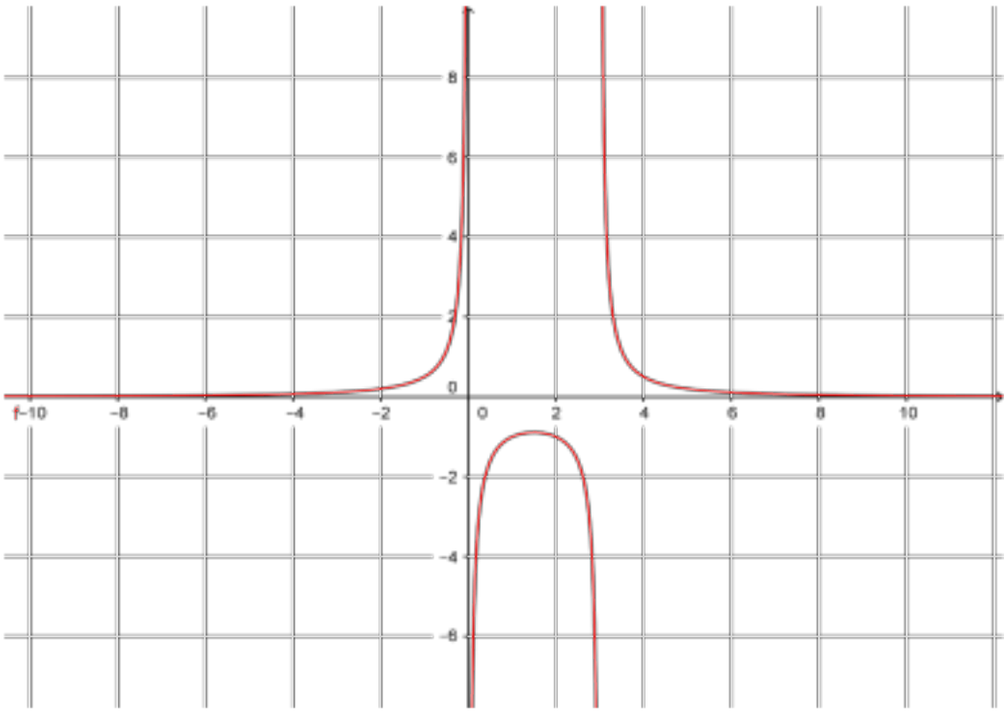
**2**

a) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 3x}$

Ratkaistaan nimittäjän nollakohdat.

$$x^2 - 3x = 0$$
$$x \cdot (x - 3) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x - 3 = 0$$
$$x = 3$$

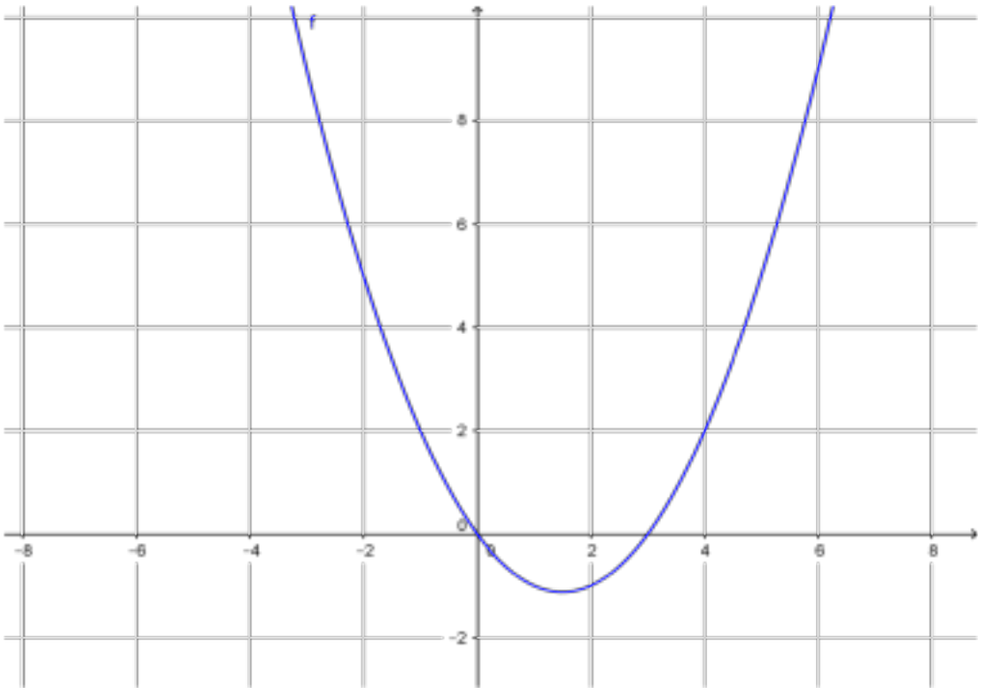
Funktion $f$ määrittelyehto on $x \neq 0$ ja $x \neq 3$.



b) $g(x) = \frac{x^2 - 3x}{2} = \frac{1}{2}(x^2 - 3x)$

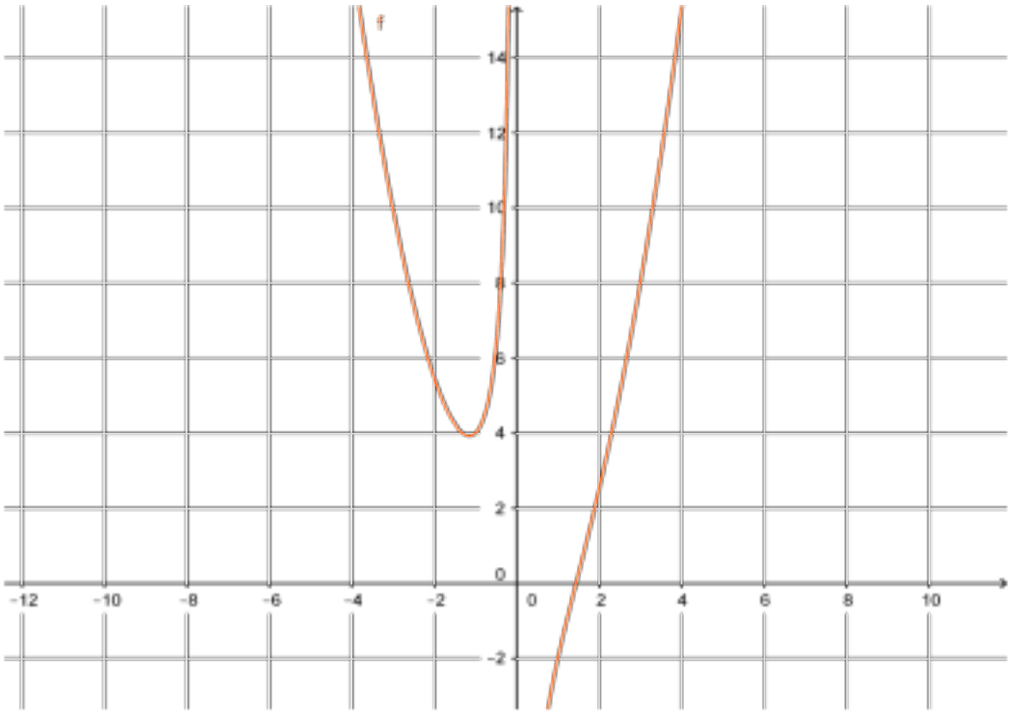
Funktio $g$ on polynomifunktio.

Funktio $g$ on määritelty kaikilla $x$.



c) $h(x) = x^2 - \frac{3}{x}$

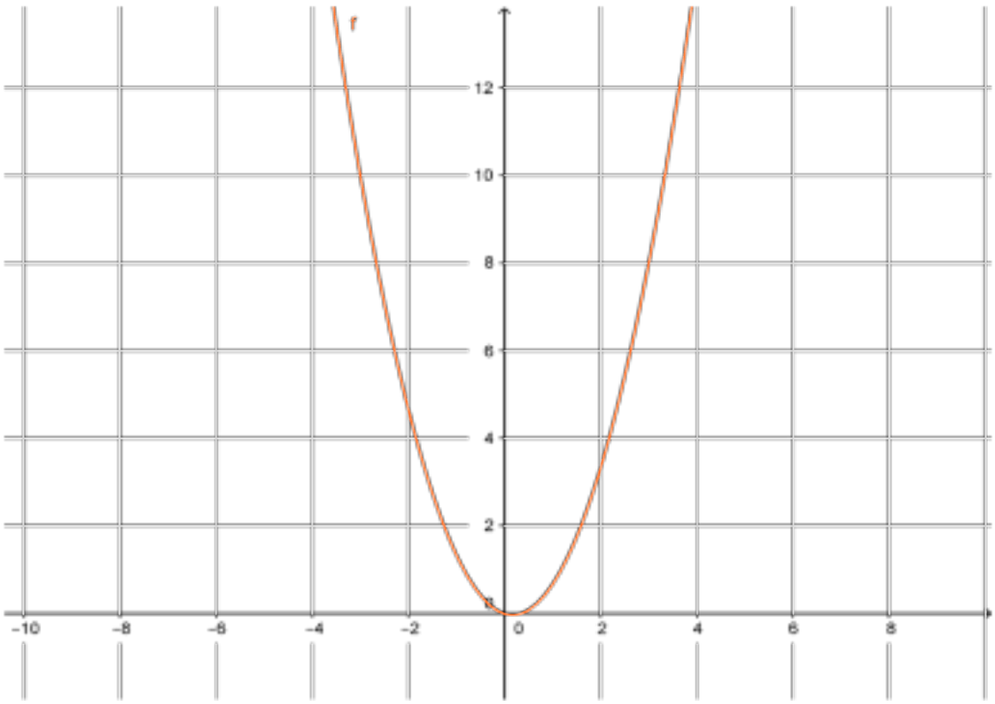
Funktion $h$ määrittelyehto on $x \neq 0$.



d) $k(x) = x^2 - \frac{x}{3} = x^2 - \frac{1}{3}x$

Funktio $k$ on polynomifunktio.

Funktio $k$ on määritelty kaikilla $x$.



**3**

a) Nimittäjän nollakohta on $x = 0$.

Murtolausekkeen määrittelyehto on $x \neq 0$.

$$\frac{3x^2 + x}{x} = \frac{x \cdot (3x + 1)}{x} = 3x + 1$$

b) Nimittäjän $4x$ nollakohta on $x = 0$.

Murtolausekkeen määrittelyehto on $x \neq 0$.

$$\frac{12x - 4x^2}{4x} = \frac{4x \cdot (3 - x)}{4x} = 3 - x$$

c) Ratkaistaan nimittäjän nollakohdat.

$$6x + 2x^2 = 0$$
$$2x \cdot (3 + x) = 0$$

$2x = 0$ tai $3 + x = 0$

$x = 0$ $x = -3$

Murtolausekkeen määrittelyehto on $x \neq 0$ ja $x \neq -3$.

$$\frac{4x}{6x + 2x^2} = \frac{2x \cdot 2}{2x \cdot (3 + x)} = \frac{2}{3 + x}$$

Vastaus a) $3x+1$, kun $x \neq 0$

b) $3-x$, kun $x \neq 0$

c) $\frac{2}{3+x}$, kun $x \neq -3$ ja $x \neq 0$

**4**

a) Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$3x - 1 = 0$$
$$x = \frac{1}{3}$$

Murtolausekkeen määrittelyehto on $x \neq \frac{1}{3}$.

$$\frac{6x - 2}{3x - 1} = \frac{2 \cdot (3x - 1)}{3x - 1} = 2$$

b) Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$4x + 12 = 0$$
$$x = -3$$

Murtolausekkeen määrittelyehto on $x \neq -3$.

$$\frac{5x + 15}{4x + 12} = \frac{5 \cdot (x + 3)}{4 \cdot (x + 3)} = \frac{5}{4}$$

c) Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$3x - 6 = 0$$
$$x = 2$$

Murtolausekkeen määrittelyehto on $x \neq 2$.

$$\frac{5x^2 - 10x}{3x - 6} = \frac{5x \cdot (x - 2)}{3 \cdot (x - 2)} = \frac{5x}{3}$$

Vastaus a) 2, kun $x \neq \frac{1}{3}$

b) $\frac{5}{4}$, kun $x \neq -3$

c) $\frac{5x}{3}$, kun $x \neq 2$

**5**

a) Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$1 + x = 0$$
$$x = -1$$

Murtolausekkeen määrittelyehto on $x \neq -1$.

$$\frac{x+1}{1+x} = \frac{x+1}{x+1} = 1$$

b) Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$1 - x = 0$$
$$x = 1$$

Murtolausekkeen määrittelyehto on $x \neq 1$.

$$\frac{x-1}{1-x} = \frac{x-1}{-x+1} = \frac{-1 \cdot (-x+1)}{-x+1} = -1$$

c) Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$1 - x = 0$$
$$x = 1$$

Murtolausekkeen määrittelyehto on $x \neq 1$.

$$\frac{x+1}{1-x} = \frac{x+1}{-x+1}$$

Ei voida supistaa.

d) Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$1 - 3x = 0$$
$$x = \frac{1}{3}$$

Murtolausekkeen määrittelyehto on $x \neq \frac{1}{3}$.

$$\frac{3x-1}{1-3x} = \frac{3x-1}{-3+1} = \frac{-1 \cdot (-3x+1)}{-3x+1} = -1$$

Vastaus a) 1, kun $x \neq -1$
b) $-1$, kun $x \neq 1$
c) Ei voi supistaa. $x \neq 1$
d) $-1$, kun $x \neq \frac{1}{3}$

**6**

a) Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$2x + 8 = 0$$
$$x = -4$$

Funktion $f$ määrittelyehto on $x \neq -4$.

b) Supistetaan lauseke.

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{2x + 8}$$
$$= \frac{x^2 - 4^2}{2x + 8}$$
$$= \frac{(x - 4) \cdot (x + 4)}{2 \cdot (x + 4)}$$
$$= \frac{x - 4}{2}$$

Vastaus a) $x \neq -4$

b) $\frac{x - 4}{2}$

**7**

a) Nimittäjän nollakohta on $x = 0$.

Murtolausekkeen määrittelyehto on $x \neq 0$.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x}$$
$$= \frac{x \cdot (x + 2)}{x}$$
$$= x + 2$$

Kuvaaja 2, funktion $f$ kuvaajassa on aukko kohdassa $x = 0$.

b) Ratkaistaan nimittäjän nollakohdat.

$$x^2 - 2x = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 2$$

Murtolausekkeen määrittelyehto on $x \neq 0$ ja $x \neq 2$.

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 2x}$$
$$= \frac{x \cdot (x^2 - 2x)}{x^2 - 2x}$$
$$= x$$

Kuvaaja 3, funktion $f$ kuvaajassa on aukot kohdissa $x = 0$ ja $x = 2$.

c) Nimittäjän $x-2$ nollakohta on $x=2$.

Murtolausekkeen määrittelyehto on $x \neq 2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2-2x}{x-2} \\ &= \frac{x\cdot(x-2)}{x-2} \\ &= x \end{aligned}$$

Kuvaaja 4, funktion $f$ kuvaajassa on aukko kohdassa $x=2$ ja kuvaaja kulkee origon kautta.

d) Nimittäjän $x-2$ nollakohta on $x=2$.

Murtolausekkeen määrittelyehto on $x \neq 2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2-4}{x-2} \\ &= \frac{x^2-2^2}{x-2} \\ &= \frac{(x+2)\cdot(x-2)}{x-2} \\ &= x+2 \end{aligned}$$

Kuvaaja 1, funktion $f$ kuvaajassa on aukko kohdassa $x=2$ ja kuvaaja leikkaa $y$-akselin kohdassa $y=2$.

Vastaus

a) $f(x) = x + 2$ , kun $x \neq 0$, kuvaaja 2

b) $f(x) = x$ , kun $x \neq 0$ ja $x \neq 2$, kuvaaja 3

c) $f(x) = x$ , kun $x \neq 2$, kuvaaja 4

d) $f(x) = x + 2$, kun $x \neq 2$, kuvaaja 1

# 8

a) Nimittäjän $4x$ nollakohta on $x = 0$
ja nimittäjän $3x$ nollakohta on $x = 0$.
Määrittelyehto on $x \neq 0$.

$$\overset{3)}{\frac{1}{4x}} + \overset{4)}{\frac{2}{3x}}$$
$$= \frac{3}{12x} + \frac{8}{12x}$$
$$= \frac{11}{12x}$$

b) Nimittäjän $2x$ nollakohta on $x = 0$.
Määrittelyehto on $x \neq 0$.

$$\overset{2x)}{\frac{1}{3}} - \overset{3)}{\frac{5}{2x}}$$
$$= \frac{2x}{6x} - \frac{15}{6x}$$
$$= \frac{2x - 15}{6x}$$

c) Nimittäjän nollakohta on $x = 0$.
Määrittelyehto on $x \neq 0$.

$$\frac{1}{x} + 3$$
$$= \frac{1}{x} + \frac{3x}{x}$$
$$= \frac{1+3x}{x}$$

Vastaus: a) $\frac{11}{12x}$, kun $x \neq 0$

b) $\frac{2x-15}{6x}$, kun $x \neq 0$

c) $\frac{1+3x}{x}$, kun $x \neq 0$

# 9

a) Nimittäjän $3x$ nollakohta on $x = 0$
ja nimittäjän $2x$ nollakohta on $x = 0$.
Määrittelyehto on $x \neq 0$.

$$\overset{2)}{\frac{1}{3x}} + \overset{3)}{\frac{x-1}{2x}}$$
$$= \frac{2}{6x} + \frac{3 \cdot (x-1)}{6x}$$
$$= \frac{2}{6x} + \frac{3x-3}{6x}$$
$$= \frac{2+3x-3}{6x}$$
$$= \frac{3x-1}{6x}$$

b) Nimittäjän $3x$ nollakohta on $x = 0$
ja nimittäjän $2x$ nollakohta on $x = 0$.
Määrittelyehto on $x \neq 0$.

$$\overset{2)}{\frac{x+1}{3x}} - \overset{3)}{\frac{x-1}{2x}}$$

$$= \frac{2 \cdot (x+1)}{6x} - \frac{3 \cdot (x-1)}{6x}$$

$$= \frac{2x+2}{6x} - \frac{3x-3}{6x}$$

$$= \frac{2x+2-(3x-3)}{6x}$$

$$= \frac{2x+2-3x+3}{6x}$$

$$= \frac{-x+5}{6x}$$

c) Nimittäjän $x$ nollakohta on $x = 0$
ja nimittäjän $x - 1$ nollakohta on $x = 1$.
Määrittelyehto on $x \neq 0$ ja $x \neq 1$.

$$\overset{x-1)}{\frac{x+3}{x}} + \overset{x)}{\frac{2x}{x-1}}$$

$$= \frac{(x-1)\cdot(x+3)}{(x-1)\cdot x} + \frac{x\cdot 2x}{x\cdot(x-1)}$$

$$= \frac{x^2+3x-x-3}{x^2-x} + \frac{2x^2}{x^2-x}$$

$$= \frac{x^2+2x-3+2x^2}{x^2-x}$$

$$= \frac{3x^2+2x-3}{x^2-x}$$

Vastaus a) $\frac{3x-1}{6x}$, kun $x \neq 0$

b) $\frac{-x+5}{6x}$, kun $x \neq 0$

c) $\frac{3x^2+2x-3}{x^2-x}$, kun $x \neq 0$ ja $x \neq 1$

# 10

a) Nimittäjän $3x$ nollakohta on $x = 0$.
Määrittelyehto on $x \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
& x - \frac{x+1}{3x} \\
&= \frac{3x \cdot x}{3x} - \frac{x+1}{3x} \\
&= \frac{3x^2 - (x+1)}{3x} \\
&= \frac{3x^2 - x - 1}{3x}
\end{aligned}
$$

b) Nimittäjän $x$ nollakohta on $x = 0$
ja nimittäjän $5x$ nollakohta on $x = 0$.
Määrittelyehto on $x \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
& \text{5)} \ \frac{1}{x} + \frac{x-1}{5x} \\
&= \frac{5}{5x} + \frac{x-1}{5x} \\
&= \frac{5 + x - 1}{5x} \\
&= \frac{x+4}{5x}
\end{aligned}
$$

c) Nimittäjän $x$ nollakohta on $x = 0$
ja nimittäjän $x+1$ nollakohta on $x = -1$.
Määrittelyehto on $x \neq -1$ ja $x \neq 0$.

$$\overset{x+1)}{\frac{x+3}{x}} - \overset{x)}{\frac{x-2}{x+1}}$$

$$= \frac{(x+1)\cdot(x+3)}{(x+1)\cdot x} - \frac{x\cdot(x-2)}{x\cdot(x+1)}$$

$$= \frac{x^2+3x+x+3}{x^2+x} - \frac{x^2-2x}{x^2+x}$$

$$= \frac{x^2+4x+3-(x^2-2x)}{x^2+x}$$

$$= \frac{x^2+4x+3-x^2+2x}{x^2+x}$$

$$= \frac{6x+3}{x^2+x}$$

Vastaus a) $\frac{3x^2-x-1}{3x}$, kun $x \neq 0$

b) $\frac{x+4}{5x}$, kun $x \neq 0$

c) $\frac{6x+3}{x^2+x}$, kun $x \neq -1$ ja $x \neq 0$

# 11

a) Nimittäjän $x^2 + x$ nollakohdat ovat $x = -1$ ja $x = 0$ sekä nimittäjän $x + 1$ nollakohta on $x = -1$.
Määrittelyehto on $x \neq -1$ ja $x \neq 0$.

$$\frac{2}{x^2 + x} + \overset{x)}{} \frac{3 - x}{x + 1}$$

$$= \frac{2}{x^2 + x} + \frac{x \cdot (3 - x)}{x \cdot (x + 1)}$$

$$= \frac{2}{x^2 + x} + \frac{3x - x^2}{x^2 + x}$$

$$= \frac{-x^2 + 3x + 2}{x^2 + x}$$

b) Nimittäjän $x^2-9$ nollakohdat ovat $x=-3$ ja $x=3$
sekä nimittäjän $x+3$ nollakohta on $x=-3$.
Määrittelyehto on $x\neq -3$ ja $x\neq 3$.

$$\frac{x-1}{x^2-9}-\overset{x-3)}{\phantom{x}}\frac{x}{x+3}$$
$$=\frac{x-1}{x^2-9}-\frac{(x-3)\cdot x}{(x-3)\cdot(x+3)}$$
$$=\frac{x-1}{x^2-9}-\frac{x^2-3x}{x^2-9}$$
$$=\frac{x-1-(x^2-3x)}{x^2-9}$$
$$=\frac{x-1-x^2+3x}{x^2-9}$$
$$=\frac{-x^2+4x-1}{x^2-9}$$

Vastaus a) $\frac{-x^2+3x+2}{x^2+x}$, kun $x\neq -1$ ja $x\neq 0$

b) $\frac{-x^2+4x-1}{x^2-9}$, kun $x\neq -3$ ja $x\neq 3$

# 12

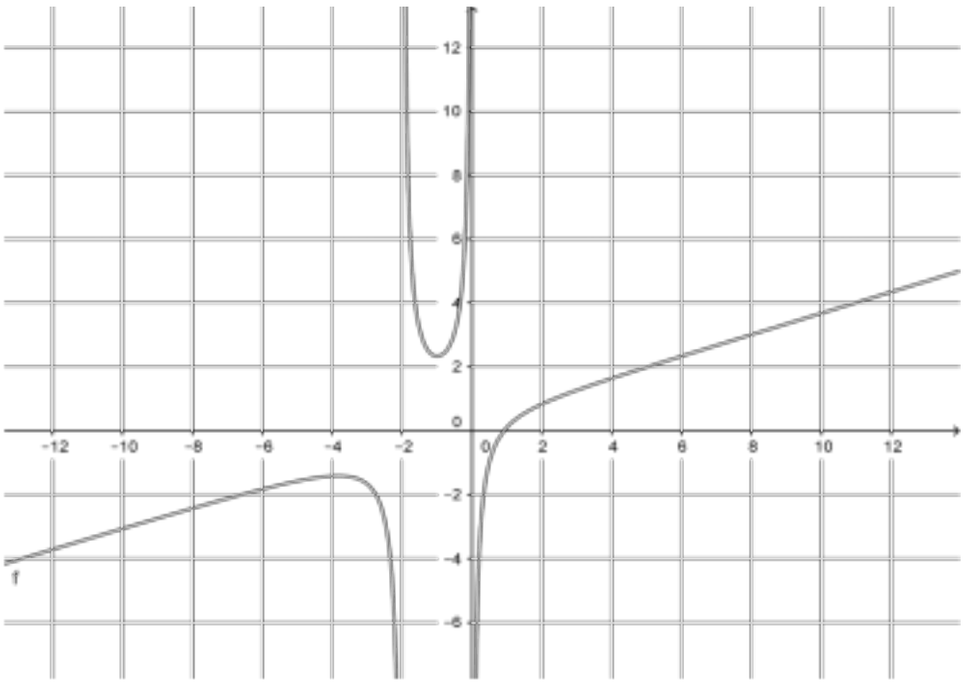
a) Ratkaistaan nimittäjien nollakohdat.

$$3x + 6 = 0$$
$$3x = -6 \quad \text{ja} \quad x = 0$$
$$x = -2$$

Funktion $f$ määrittelyehto on $x \neq -2$ ja $x \neq 0$.

Funktion $f$ määrittelyjoukko on $\mathbf{R} \setminus \{-2, 0\}$.

b) Piirretään laskimella funktion $f(x) = \dfrac{x^2}{3x+6} + \dfrac{x-1}{x}$ kuvaaja.




Vastaus a) $\mathbf{R} \setminus \{-2, 0\}$

**13**

a) Nimittäjän $9x$ nollakohta on $x = 0$.
Murtolausekkeen määrittelyehto on $x \neq 0$.

$$\frac{18x^2 - 3x}{9x} = \frac{3x \cdot (6x - 1)}{3x \cdot 3} = \frac{6x - 1}{3}$$

b) Nimittäjän $4x - 12$ nollakohta on $x = 3$.
Murtolausekkeen määrittelyehto on $x \neq 3$.

$$\frac{12x - 8}{4x - 12} = \frac{4 \cdot (3x - 2)}{4 \cdot (x - 3)} = \frac{3x - 2}{x - 3}$$

c) Nimittäjän $x^2 + 7x$ nollakohdat ovat $x = -7$ ja $x = 0$.
Murtolausekkeen määrittelyehto $x \neq -7$ ja $x \neq 0$.

$$\frac{x^3}{x^2 + 7x} = \frac{x \cdot x^2}{x \cdot (x + 7)} = \frac{x^2}{x + 7}$$

Vastaus a) $\frac{6x - 1}{3}$, kun $x \neq 0$

b) $\frac{3x - 2}{x - 3}$, kun $x \neq 3$

c) $\frac{x^2}{x + 7}$, kun $x \neq -7$ ja $x \neq 0$

**14**

a) Nimittäjän $1-5x$ nollakohta on $x=\frac{1}{5}$.

Murtolausekkeen määrittelyehto on $x \neq \frac{1}{5}$.

$$\frac{5x-1}{1-5x} = \frac{5x-1}{-5x+1} = \frac{-1\cdot(-5x+1)}{-5x+1} = -1$$

b) Nimittäjän $x-9$ nollakohta on $x=9$.
Murtolausekkeen määrittelyehto on $x \neq 9$.

$$\frac{9+x}{x-9} = \frac{x+9}{x-9}$$

Ei voida supistaa.

c) Nimittäjän $x-2$ nollakohta on $x=2$.
Murtolausekkeen määrittelyehto on $x \neq 2$.

$$\frac{2-x}{x-2} = \frac{-x+2}{x-2} = \frac{-1\cdot(x-2)}{x-2} = \frac{-1}{1} = -1$$

d) Nimittäjä $1+x^2 \neq 0$ kaikilla $x$.

$$\frac{x^2+1}{1+x^2} = \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1$$

Vastaus a) $-1$, kun $x \neq \frac{1}{5}$

b) Ei voi supistaa. $x \neq 9$

c) $-1$, kun $x \neq 2$

d) 1, kun $x \in \mathbf{R}$

**15**

a) Nimittäjän $t+1$ nollakohta on $t=-1$.

Murtolausekkeen määrittelyehto on $t \neq -1$.

$$\frac{t^2-1}{t+1} = \frac{(t+1)\cdot(t-1)}{t+1} = t-1$$

b) Nimittäjän $(t-1)^2$ nollakohta on $t=1$.

Murtolausekkeen määrittelyehto on $t \neq 1$.

$$\frac{t^2-1}{(t-1)^2} = \frac{(t-1)\cdot(t+1)}{(t-1)\cdot(t-1)} = \frac{t+1}{t-1}$$

c) Nimittäjän $t^2-1$ nollakohdat ovat $t=1$ ja $t=-1$.

Murtolausekkeen määrittelyehto on $t \neq 1$ ja $t \neq -1$.

$$\frac{(t-1)^2}{t^2-1} = \frac{(t-1)\cdot(t-1)}{(t-1)\cdot(t+1)} = \frac{t-1}{t+1}$$

Vastaus a) $t-1$ , kun $t \neq -1$

b) $\frac{t+1}{t-1}$ , kun $t \neq 1$

c) $\frac{t-1}{t+1}$ , kun $t \neq 1$ ja $t \neq -1$

**16**

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm 4}{2}$$

$x = -1$ tai $x = 3$

b) Jos toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ juuret ovat $x_1$ ja $x_2$, niin $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Nyt $a = 1$, $x_1 = -1$ ja $x_2 = 3$, joten

$$x^2 - 2x - 3 = 1 \cdot (x - (-1))(x - 3) = (x + 1)(x - 3)$$

c) Nimittäjän $2x - 6$ nollakohta on $x = 3$.

Murtolausekkeen määrittelyehto $x \neq 3$.

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{2x - 6} = \frac{(x + 1)(x - 3)}{2 \cdot (x - 3)} = \frac{x + 1}{2}$$

Vastaus

a) $x = -1$ tai $x = 3$

b) $(x+1)(x-3)$

c) $\frac{x+1}{2}$, kun $x \neq 3$

**17**

a) Nimittäjän $x+5$ nollakohta on $x=-5$.

Funktio $f$ on määritelty, kun $x \neq 5$.

b) Ratkaistaan osoittajan nollakohdat

$2x^2+8x-10=0$
$x=-5 \quad \text{tai} \quad x=1$

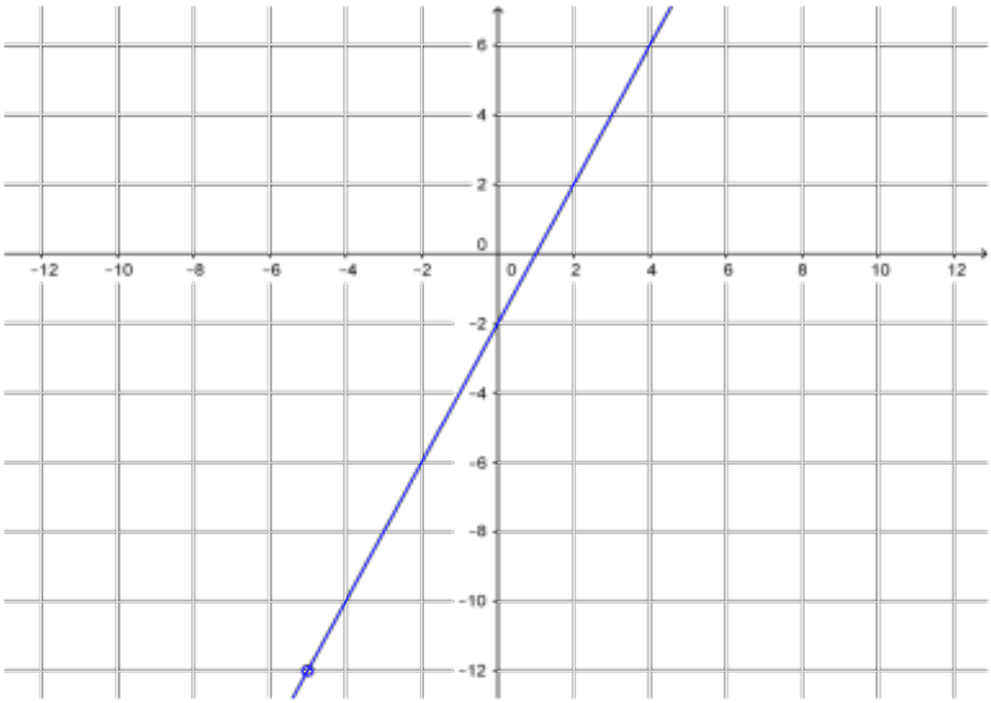
Jaetaan osoittaja tekijöihin nollakohtien avulla.

$$2x^2+8x-10=2\cdot(x-(-5))(x-1)=2\cdot(x+5)(x-1)$$

Supistetaan funktion lauseke.

$$\frac{2\cdot(x+5)(x-1)}{x+5}=2\cdot(x-1)=2x-2$$

c) Piirretään suora $y = 2x - 2$, josta puuttuu piste $(-5, -12)$.



**18**

a) Nimittäjän $x^2$ nollakohta on $x = 0$
ja nimittäjän $x$ nollakohta on $x = 0$.
Määrittelyehto on $x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
&x)\ \frac{1}{x} - \frac{x-1}{x^2} \\
&= \frac{x}{x^2} - \frac{x-1}{x^2} \\
&= \frac{x-(x-1)}{x^2} \\
&= \frac{x-x+1}{x^2} \\
&= \frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

b) Nimittäjän $x-2$ nollakohta on $x=2$
ja nimittäjän $x+3$ nollakohta on $x=-3$.
Määrittelyehto on $x \neq -3$ ja $x \neq 2$.

$$\overset{x+3)}{\frac{1}{x-2}} - \overset{x-2)}{\frac{1}{x+3}}$$

$$= \frac{x+3}{(x+3)(x-2)} - \frac{x-2}{(x-2)(x+3)}$$

$$= \frac{x+3}{x^2-2x+3x-6} - \frac{x-2}{x^2+3x-2x-6}$$

$$= \frac{x+3}{x^2+x-6} - \frac{x-2}{x^2+x-6}$$

$$= \frac{x+3-(x-2)}{x^2+x-6}$$

$$= \frac{x+3-x+2}{x^2+x-6}$$

$$= \frac{5}{x^2+x-6}$$

Vastaus a) $\frac{1}{x^2}$, kun $x \neq 0$

b) $\frac{5}{x^2+x-6}$, kun $x \neq -3$ ja $x \neq 2$

**19**

a) Nimittäjän $s-1$ nollakohta on $s=1$
ja nimittäjän $s^2-s$ nollakohdat ovat $s=0$ ja $s=1$.
Määrittelyehto on $s \neq 0$ ja $s \neq 1$.

$$
\begin{aligned}
&s)\ \frac{s+1}{s-1}+\frac{s-2}{s^2-s} \\
&=\frac{s\cdot(s+1)}{s\cdot(s-1)}+\frac{s-2}{s^2-s} \\
&=\frac{s^2+s}{s^2-s}+\frac{s-2}{s^2-s} \\
&=\frac{s^2+s+s-2}{s^2-s} \\
&=\frac{s^2+2s-2}{s^2-s}
\end{aligned}
$$

b) Nimittäjän $t+1$ nollakohta on $t=-1$
ja nimittäjän $t^2-1$ nollakohdat ovat $t=1$ ja $t=-1$.
Määrittelyehto on $t \neq 1$ ja $t \neq -1$.

$$
\begin{aligned}
&^{t-1)}\ \frac{t-1}{t+1} - \frac{t^2+1}{t^2-1} \\
&= \frac{(t-1)(t-1)}{(t-1)(t+1)} - \frac{t^2+1}{t^2-1} \\
&= \frac{t^2-t-t+1}{t^2+t-t-1} - \frac{t^2+1}{t^2-1} \\
&= \frac{t^2-2t+1}{t^2-1} - \frac{t^2+1}{t^2-1} \\
&= \frac{t^2-2t+1-(t^2+1)}{t^2-1} \\
&= \frac{t^2-2t+1-t^2-1}{t^2-1} \\
&= \frac{-2t}{t^2-1}
\end{aligned}
$$

Vastaus a) $\frac{s^2+2s-2}{s^2-s}$, kun $s \neq 0$ ja $s \neq 1$

b) $\frac{-2t}{t^2-1}$, kun $t \neq 1$ ja $t \neq -1$

## 20

Sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 + \frac{3}{x-1} - \frac{3x^2}{x-1} \\ &= \frac{3 \cdot (x-1)}{x-1} + \frac{3-3x^2}{x-1} \\ &= \frac{3x-3}{x-1} + \frac{3-3x^2}{x-1} \\ &= \frac{3x-3+3-3x^2}{x-1} \\ &= \frac{-3x^2+3x}{x-1} \\ &= \frac{-3x \cdot (x-1)}{x-1} \\ &= -3x \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{1}{17}\right) = -3 \cdot \frac{1}{17} = -\frac{3}{17}$$

Vastaus $-\frac{3}{17}$

# 21

a) Nimittäjän $x+1$ nollakohta on $x=-1$
ja nimittäjän $x^2+x$ nollakohdat ovat $x=-1$ ja $x=0$.
Määrittelyehto on $x \neq -1$ ja $x \neq 0$.

$$1 - {}^{x)}\ \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x^2+x}$$

$$= \frac{x^2+x}{x^2+x} - \frac{x \cdot x}{x \cdot (x+1)} + \frac{1}{x^2+x}$$

$$= \frac{x^2+x}{x^2+x} - \frac{x^2}{x^2+x} + \frac{1}{x^2+x}$$

$$= \frac{x^2+x-x^2+1}{x^2+x}$$

$$= \frac{x+1}{x^2+x}$$

$$= \frac{x+1}{x \cdot (x+1)}$$

$$= \frac{1}{x}$$

b) Nimittäjän $x^2-1$ nollakohdat ovat $x=1$ ja $x=-1$ ja nimittäjä $x^2+1\neq 0$ kaikilla $x$.

Määrittelyehto on $x\neq 1$ ja $x\neq -1$.

$$\begin{aligned}
&\overset{x^2+1)}{\frac{x}{x^2-1}} - \overset{x^2-1)}{\frac{x}{x^2+1}} \\
&= \frac{(x^2+1)\cdot x}{(x^2+1)(x^2-1)} - \frac{(x^2-1)\cdot x}{(x^2-1)(x^2+1)} \\
&= \frac{x^3+x}{x^4-x^2+x^2-1} - \frac{x^3-x}{x^4+x^2-x^2-1} \\
&= \frac{x^3+x-(x^3-x)}{x^4-1} \\
&= \frac{x^3+x-x^3+x}{x^4-1} \\
&= \frac{2x}{x^4-1}
\end{aligned}$$

Vastaus a) $\frac{1}{x}$, kun $x\neq -1$ ja $x\neq 0$

b) $\frac{2x}{x^4-1}$, kun $x\neq 1$ ja $x\neq -1$

**22**

a) Sievennetään funktion $f$ lauseke.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^2 - 4x}{2} \\ &= \frac{2 \cdot (x^2 - 2x)}{2} \\ &= x^2 - 2x \end{aligned}$$

Funktiot $f$ ja $g$ ovat sama funktio, koska funktion $f$ lauseke supistuu funktion $g$ lausekkeeksi ja molemmat on määritelty kaikilla $x$.

b) Funktio $f$ on määritelty, kun nimittäjä $x \neq 0$.
Funktio $g$ on määritelty kaikilla $x$.

Koska funktioilla on eri määrittelyjoukko, ne eivät ole sama funktio.

Vastaus a) kyllä
b) ei

## 23

Nimittäjän $x^2 - 16$ nollakohdat ovat $x = 4$ ja $x = -4$.

Funktio $f$ on määritelty, kun $x \neq 4$ ja $x \neq -4$.

Funktion lauseke voidaan supistaa vain, jos osoittajalla ja nimittäjällä on yhteinen tekijä.

Jaetaan nimittäjä tekijöihinsä.

$$x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$$

1) Osoittajalla on tekijä $(x + 4)$, jos $-4$ on osoittajan nollakohta.
Ratkaistaan vakio a.

$$(-4)^2 + a \cdot (-4) - 4 = 0$$
$$a = 3$$

Ratkaistaan osoittajan nollakohdat.

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$
$$x = -4 \quad \text{tai} \quad x = 1$$

Jaetaan osoittaja tekijöihin.

$$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$$

Supistetaan funktion lauseke.

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 16} = \frac{(x + 4)(x - 1)}{(x + 4)(x - 4)} = \frac{x - 1}{x - 4}$$

2) Osoittajalla on tekijä $(x-4)$, jos $4$ on osoittajan nollakohta.

Ratkaistaan vakio a.

$$4^2 + a \cdot 4 - 4 = 0$$
$$a = -3$$

Ratkaistaan osoittajan nollakohdat.

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$x = -1 \quad \text{tai} \quad x = 4$$

Jaetaan osoittaja tekijöihin.

$$x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$$

Supistetaan funktion lauseke.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16} = \frac{(x+1)(x-4)}{(x+4)(x-4)} = \frac{x+1}{x+4}$$

Vastaus $f(x) = \frac{x-1}{x-4}$, kun $a = 3$, $x \neq 4$ ja $x \neq -4$

$f(x) = \frac{x+1}{x+4}$, kun $a = -3$, $x \neq 4$ ja $x \neq -4$

## 24

Jaetaan osoittaja tekijöihin muistikaavojen avulla.

$$
\begin{aligned}
& x^4 - 18x^2 + 81 \\
&= (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 9 + 9^2 \\
&= (x^2 - 9)^2 \\
&= (x^2 - 3^2)^2 \\
&= \big((x-3)(x+3)\big)^2 \\
&= (x-3)^2 (x+3)^2
\end{aligned}
$$

Voidaan jakaa tekijöihin myös laskimen factor-komennolla.

Jotta lauseke voidaan supistaa, nimittäjän tulee olla $x-3$ tai $x+3$.

Kun $b = 3$,

$$f(x) = \frac{x^4 - 18x + 81}{x+3} = \frac{(x-3)^2 (x+3)^2}{x+3} = (x-3)^2 (x+3).$$

Nimittäjän $x+3$ nollakohta on $x = -3$.
Funktio $f$ on määritelty, kun $x \neq -3$.

Kun $b = -3$,

$$f(x) = \frac{x^4 - 18x + 81}{x-3} = \frac{(x-3)^2 (x+3)^2}{x-3} = (x-3)(x+3)^2.$$

Nimittäjän $x-3$ nollakohta on $x = 3$.
Funktio $f$ on määritelty, kun $x \neq 3$.

Vastaus $f(x) = (x-3)^2(x+3)$, kun $b = 3$ ja $x \neq -3$

$f(x) = (x-3)(x+3)^2$, kun $b = -3$ ja $x \neq 3$

**25**

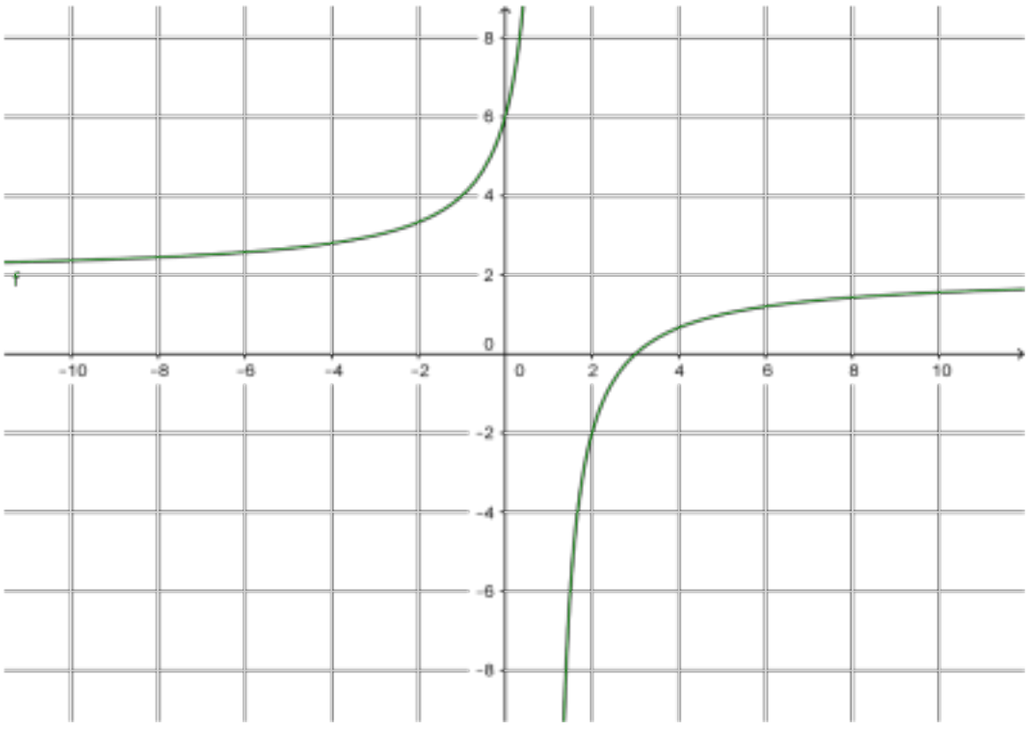
a) Määritetään osoittajan nollakohta.

$$2x - 6 = 0$$
$$2x = 6$$
$$x = 3$$

Määritetään nimittäjän nollakohta.

$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$

b) Piirretään funktion $f(x) = \dfrac{2x-6}{x-1}$ kuvaaja laskimella.




Osoittajan nollakohdassa $x = 3$ funktion arvo on nolla.
Nimittäjän nollakohdassa $x = 1$ funktiota ei ole määritelty.

Vastaus a) osoittajan nollakohta $x = 3$,
nimittäjän nollakohta $x = 1$

## 26

a) Määritetään osoittajan nollakohdat.

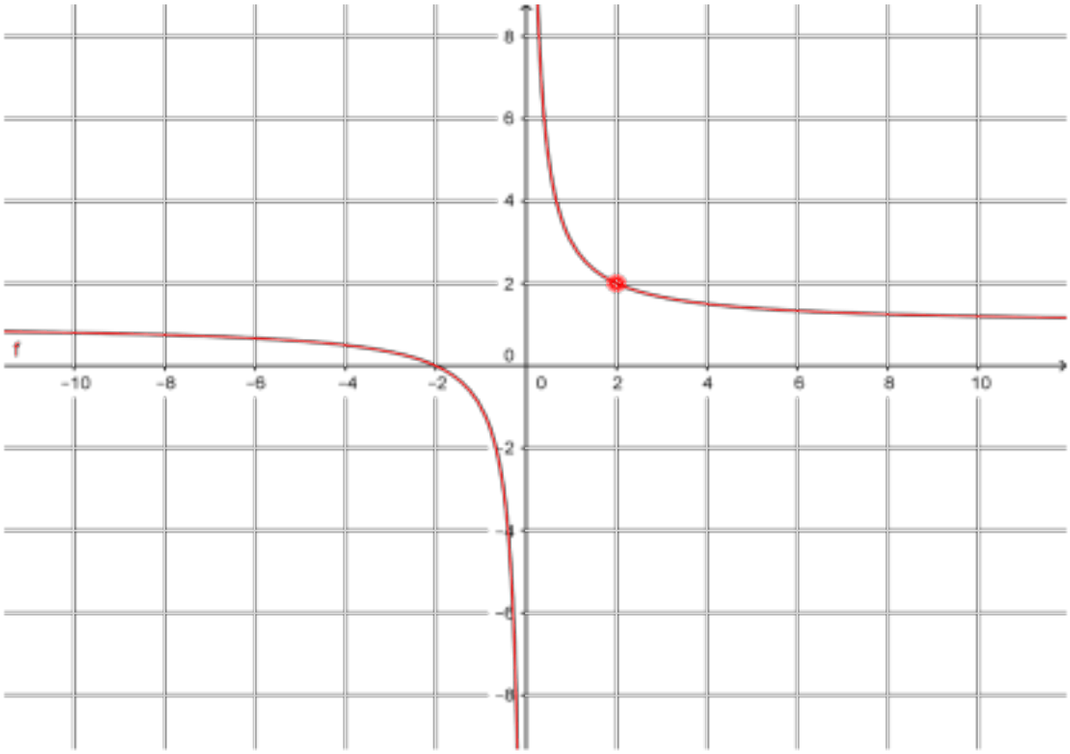
$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \sqrt{4} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{4}$$
$$x = 2 \quad \text{tai} \quad x = -2$$

Määritetään nimittäjän nollakohdat.

$$x^2 - 2x = 0$$
$$x \cdot (x - 2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x - 2 = 0$$
$$x = 2$$

b) Piirretään funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$ kuvaaja laskimella.




Osoittajan nollakohdassa $x = -2$ funktion arvo on nolla.

Funktio $f$ ei ole määritelty, kun $x = 0$ ja $x = 2$.

Vastaus a) osoittajan nollakohdat $x = -2$ ja $x = 2$,

nimittäjän nollakohdat $x = 0$ ja $x = 2$

**27**

a) Selvitetään ensin funktion $f$ määrittelyehto.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$x-1=0$$
$$x=1$$

Funktion $f$ määrittelyehto on $x \neq 1$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohdat.

$$\frac{x^2+2x-3}{x-1}=0 \quad \big| \cdot (x-1) \neq 0$$
$$x^2+2x-3=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}$$

$$x=\frac{-2+4}{2}=1 \quad \text{tai} \quad x=\frac{-2-4}{2}=-3$$

Ratkaisu $x=1$ ei toteuta määrittelyehtoa $x \neq 1$.

Funktion nollakohta on $x=-3$.

b) Selvitetään ensin funktion $f$ määrittelyehto.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$x^2 - 9 = 0$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \sqrt{9} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{9}$$
$$x = 3 \quad \text{tai} \quad x = -3$$

Funktion $f$ määrittelyehto on $x \neq -3$ ja $x \neq 3$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohdat.

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 9} = 0 \quad \Big| \cdot (x^2 - 9) \neq 0$$
$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x = \frac{-2 + 4}{2} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-2 - 4}{2} = -3$$

Ratkaisu $x = -3$ ei toteuta määrittelyehtoa $x \neq -3$ ja $x \neq 3$.

Funktion nollakohta on $x = 1$.

Vastaus a) $x = -3$

b) $x = 1$

**28**

a) Selvitetään ensin funktion $f$ määrittelyehto.

Nimittäjän $x$ nollakohta on $x = 0$.

Funktion $f$ määrittelyehto on $x \neq 0$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohdat.

$$\frac{x^2 + 5x}{x} = 0 \quad \left| \cdot x \right. \quad \neq 0$$

$$x^2 + 5x = 0$$

$$x \cdot (x + 5) = 0$$

$x = 0$ tai $x + 5 = 0$

$x = -5$

Ratkaisu $x = 0$ ei toteuta määrittelyehtoa $x \neq 0$.

Funktion nollakohta on $x = -5$.

b) Selvitetään ensin funktion $f$ määrittelyehto.

Nimittäjän $x+5$ nollakohta on $x=-5$.

Funktion $f$ määrittelyehto on $x \neq -5$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohdat.

$$\frac{2x^2-50}{x+5}=0 \quad \big| \cdot (x+5) \quad \neq 0$$

$$2x^2-50=0$$

$$2x^2=50$$

$$x^2=25$$

$$x=5 \text{ tai } x=-5$$

Ratkaisu $x=-5$ ei toteuta määrittelyehtoa $x \neq -5$.

Funktion nollakohta on $x=5$.

Vastaus a) $x=-5$

b) $x=5$

**29**

a) Selvitetään ensin funktion $f$ määrittelyehto.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohdat.

$$x \cdot (x-4) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x - 4 = 0$$
$$x = 4$$

Funktion $f$ määrittelyehto on $x \neq 0$ ja $x \neq 4$.

Ratkaistaan yhtälö $f(x) = 0$.

$$\frac{12-3x}{x \cdot (x-4)} = 0 \quad \big| \cdot x(x-4) \quad \neq 0$$
$$12 - 3x = 0$$
$$-3x = -12$$
$$x = 4$$

Ratkaisu $x = 4$ ei toteuta määrittelyehtoa $x \neq 0$ ja $x \neq 4$.

Funktio $f$ ei saa arvoa $0$ millään muuttujan $x$ arvolla.

b) Ratkaistaan yhtälö $f(x) = 3$

$$\frac{12 - 3x}{x \cdot (x - 4)} = 3$$

$$12 - 3x = 3 \cdot x \cdot (x - 4)$$

$$12 - 3x = 3x^2 - 12x$$

$$-3x^2 + 9x + 12 = 0$$

$$-x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{-2} = \frac{-3 \pm 5}{-2}$$

$$x = \frac{-3 + 5}{-2} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-3 - 5}{-2} = 4$$

Ratkaisu $x = 4$ ei toteuta määrittelyehtoa $x \neq 0$ ja $x \neq 4$.

Funktio $f$ saa arvon 3, kun $x = -1$.

Vastaus a) ei millään muuttujan $x$ arvolla

b) $x = -1$

**30**

a) Nimittäjän $x$ nollakohta on $x = 0$.

Yhtälön määrittelyehto on $x \neq 0$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{3x-1}{x} - \frac{x-5}{x} = 1 \qquad | \cdot x \quad \neq 0$$

$$\frac{x \cdot (3x-1)}{x} - \frac{x \cdot (x-5)}{x} = 1 \cdot x$$

$$3x - 1 - (x - 5) = x$$

$$3x - 1 - x + 5 = x$$

$$3x - x - x = 1 - 5$$

$$x = -4$$

Ratkaisu $x = -4$ toteuttaa määrittelyehdon $x \neq 0$.

b) Nimittäjän $x-1$ nollakohta on $x=1$.

Yhtälön määrittelyehto on $x \neq 1$.

Ratkaistaan yhtälö

$$\frac{x^2}{x-1} - \frac{x}{x-1} = 0 \qquad |\cdot(x-1) \quad \neq 0$$

$$\frac{(x-1)\cdot x^2}{x-1} - \frac{(x-1)\cdot x}{x-1} = 0\cdot(x-1)$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x\cdot(x-1) = 0$$

$x = 0$ tai $x-1=0$

$x = 1$

Ratkaisu $x=1$ ei toteuta määrittelyehtoa $x \neq 1$.

Ratkaisu $x=0$ toteuttaa määrittelyehdon.

Vastaus a) $x=-4$

b) $x=0$

**31**

a) Ratkaistaan nimittäjien nollakohdat.

$x+5=0$ ja $x=0$

$x=-5$

Yhtälön määrittelyehto on $x \neq -5$ ja $x \neq 0$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{x}{x+5}-\frac{1}{x}=1 \qquad |\cdot x(x+5) \quad \neq 0$$

$$\frac{x(x+5)\cdot x}{x+5}-\frac{x(x+5)\cdot 1}{x}=1\cdot x(x+5)$$

$$x^2-(x+5)=x^2+5x$$

$$-x-5=+5x$$

$$-6x=5$$

$$x=-\frac{5}{6}$$

Ratkaisu $x=-\frac{5}{6}$ toteuttaa määrittelyehdon $x \neq -5$ ja $x \neq 0$.

b) Ratkaistaan nimittäjien nollakohdat.

$x-2=0$ ja $x=0$

$x=2$

Yhtälön määrittelyehto on $x \neq 2$ ja $x \neq 0$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{3x}{x-2}-\frac{2}{x}=3 \qquad |\cdot x(x-2) \quad \neq 0$$

$$\frac{x(x-2)\cdot 3x}{x-2}-\frac{x(x-2)\cdot 2}{x}=3x(x-2)$$

$$3x^2-(2x-4)=3x^2-6x$$

$$3x^2-2x+4=3x^2-6x$$

$$-2x+6x=-4$$

$$4x=-4$$

$$x=-1$$

Ratkaisu $x=-1$ toteuttaa määrittelyehdon $x \neq 2$ ja $x \neq 0$.

Vastaus a) $x=-\frac{5}{6}$

b) $x=-1$

**32**

a) Selvitetään ensin funktion $f$ määrittelyehto.

Ratkaistaan nimittäjien nollakohdat.

$x+2=0$ ja $x=0$

$x=-2$

Funktion $f$ määrittelyehto on $x \neq -2$ ja $x \neq 0$.

Ratkaistaan yhtälö $f(x)=0$.

$$\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x}=0 \qquad |\cdot x(x+2) \quad \neq 0$$

$$\frac{x(x+2)\cdot 2}{x+2}-\frac{x(x+2)\cdot 1}{x}=x(x+2)\cdot 0$$

$$2x-(x+2)=0$$

$$2x-x-2=0$$

$$x=2$$

Ratkaisu $x=2$ toteuttaa määrittelyehdon.

Funktio $f$ saa arvon 0, kun $x=2$.

b) Ratkaistaan yhtälö $f(x) = 3$.

$$\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x} = 3 \qquad |\cdot x(x+2) \quad \neq 0$$

$$\frac{x(x+2)\cdot 2}{x+2} - \frac{x(x+2)\cdot 1}{x} = x(x+2)\cdot 3$$

$$2x - (x+2) = 3x^2 + 6x$$

$$2x - x - 2 - 3x^2 - 6x = 0$$

$$-3x^2 - 5x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot(-3)\cdot(-2)}}{2\cdot(-3)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{-6} = \frac{5 \pm 1}{-6}$$

$$x = \frac{5+1}{-6} = -1 \qquad \text{tai} \quad x = \frac{5-1}{-6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

Ratkaisut $x = -1$ ja $x = -\frac{2}{3}$ toteuttavat määrittelyehdon.

Funktio $f$ saa arvon 3, kun $x = -1$ tai $x = -\frac{2}{3}$.

Vastaus a) $x = 2$

b) $x = -1$ tai $x = -\frac{2}{3}$

## 33

Ratkaistaan ensin nimittäjien nollakohdat.

$x+1=0$ ja $x^2-1=0$

$x=-1$ $x=1$ tai $x=-1$

Yhtälön määrittelyehto on $x \neq -1$ ja $x \neq 1$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2-1}=3 \qquad |\cdot(x-1)(x+1) \quad \neq 0$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}+\frac{(x-1)(x+1)\cdot 2}{(x-1)(x+1)}=3\cdot(x-1)(x+1)$$

$$x-1+2=3x^2-3$$

$$-3x^2+x+4=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-3)\cdot 4}}{2\cdot(-3)}$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{-6}=\frac{-1\pm 7}{-6}$$

$$x=\frac{-1+7}{-6}=-1 \quad \text{tai} \quad x=\frac{-1-7}{-6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

Ratkaisuista $x=\frac{4}{3}$ toteuttaa määrittelyehdon $x \neq -1$ ja $x \neq 1$.

Vastaus $x = \frac{4}{3}$

## 34

Ratkaistaan ensin nimittäjien nollakohdat.

$2x = 0$ ja $4x^2 = 0$

$x = 0$ $x = 0$

Yhtälön määrittelyehto on $x \neq 0$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{1}{2x} + x^2 = \frac{1+2x}{4x^2} \qquad |\cdot 4x^2 \quad \neq 0$$

$$\frac{4x^2 \cdot 1}{2x} + 4x^2 \cdot x^2 = \frac{4x^2 \cdot (1+2x)}{4x^2}$$

$$2x + 4x^4 = 1 + 2x$$

$$4x^4 = 1$$

$$x^4 = \frac{1}{4}$$

$$x = \sqrt[4]{\frac{1}{4}} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt[4]{4}} \quad \text{tai} \quad x = -\frac{1}{\sqrt[4]{4}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{tai} \quad x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ratkaisut $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ja $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ toteuttavat määrittelyehdon $x \neq 0$.

Vastaus $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ja $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

**35**

a) Määritetään osoittajan nollakohdat.

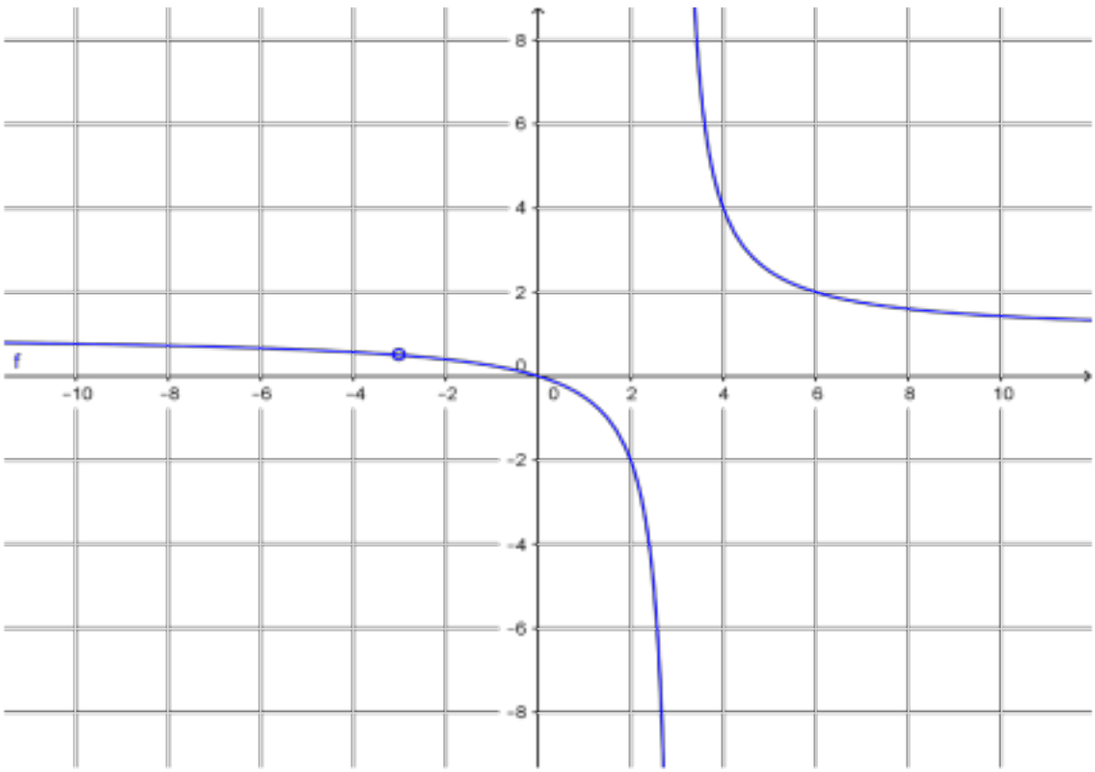
$$x^2 + 3x = 0$$
$$x(x+3) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x + 3 = 0$$
$$x = -3$$

Määritetään nimittäjän nollakohdat.

$$x^2 - 9 = 0$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \sqrt{9} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{9}$$
$$x = 3 \quad \text{tai} \quad x = -3$$

b) Piirretään funktion $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 9}$ kuvaaja laskimella.




Osoittajan nollakohdassa $x = 0$ funktion arvo on nolla.

Nimittäjän nollakohdissa $x = -3$ ja $x = 3$ funktiota ei ole määritelty.

Vastaus a) osoittajan nollakohdat ovat $x = -3$ ja $x = 0$,

nimittäjän nollakohdat ovat $x = -3$ ja $x = 3$

**36**

a) Selvitetään ensin funktion $f$ määrittelyehto.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$x+1=0$$
$$x=-1$$

Funktion $f$ määrittelyehto on $x \neq -1$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohdat.

$$\frac{x^2-1}{x+1}=0 \quad \left| \cdot (x+1) \right. \quad \neq 0$$
$$x^2-1=0$$
$$x^2=1$$
$$x=1 \text{ tai } x=-1$$

Ratkaisu $x=-1$ ei toteuta määrittelyehtoa $x \neq -1$.

Funktion nollakohta on $x=1$

b) Selvitetään ensin funktion $f$ määrittelyehto.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

Ei ratkaisua.

Funktion $f$ on määritelty kaikilla $x$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohdat.

$$\frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 + 1} = 0 \quad \Big| \cdot (x^2 + 1) \quad \neq 0$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x = \frac{5+7}{2} = 6 \quad \text{tai} \quad x = \frac{5-7}{2} = -1$$

Funktion nollakohdat ovat $x = -1$ ja $x = 6$.

Vastaus a) $x = 1$

b) $x = -1$ tai $x = 6$

**37**

a) Selvitetään ensin funktion $f$ määrittelyehto.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$x^2 = 0$$
$$x = 0$$

Funktion $f$ määrittelyehto on $x \neq 0$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohdat.

$$\frac{3x^2 - x}{x^2} = 0 \quad \Big| \cdot x^2 \quad \neq 0$$
$$3x^2 - x = 0$$
$$x(3x - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 3x - 1 = 0$$
$$x = \frac{1}{3}$$

Ratkaisu $x = 0$ ei toteuta määrittelyehtoa $x \neq 0$.

Funktion nollakohta on $x = \frac{1}{3}$.

b) Selvitetään ensin funktion $f$ määrittelyehto.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohdat.

$$x^2 - 10x = 0$$
$$x(x-10) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x - 10 = 0$$
$$x = 10$$

Funktion $f$ määrittelyehto on $x \neq 0$ ja $x \neq 10$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohdat.

$$\frac{3x-30}{x^2-10x} = 0 \quad \Big| \cdot (x^2 - 10x) \quad \neq 0$$
$$3x - 30 = 0$$
$$3x = 30$$
$$x = 10$$

Ratkaisu $x = 10$ ei toteuta määrittelyehtoa $x \neq 0$ ja $x \neq 10$.

Funktiolla $f$ ei ole nollakohtia.

Vastaus a) $x = \frac{1}{3}$

b) ei nollakohtia

**38**

a) Funktion on määritelty, kun $x \neq -a$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{2x^2 + 5x - 3}{x + a} = 0 \quad |\cdot(x + a) \quad \neq 0$$

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$x = -3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1}{2}$$

Funktion ainoa nollakohta on $x = -3$ vain,

jos funktion määrittelyehto on $x \neq \frac{1}{2}$.

Ratkaistaan $a$.

$$-a = \frac{1}{2}$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

b) Funktion ainoa nollakohta on $x = \frac{1}{2}$ vain,

jos funktion määrittelyehto on $x \neq -3$.

Ratkaistaan $a$.

$-a = -3$

$a = a$

Vastaus a) $a = -\frac{1}{2}$

b) $a = 3$

**39**

a) Ratkaistaan nimittäjien nollakohdat.

$x^2 = 0$ ja $x = 0$

$x = 0$

Yhtälön määrittelyehto on $x \neq 0$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x} = 5 \qquad |\cdot x^2 \quad \neq 0$$

$$\frac{4x^2}{x^2} + \frac{x^2}{x} = 5x^2$$

$$-5x^2 + x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 4}}{2 \cdot (-5)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{-10} = \frac{-1 \pm 9}{-10}$$

$$x = \frac{-1+9}{-10} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1-9}{-10} = 1$$

Ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon.

b) Ratkaistaan nimittäjien nollakohdat.

$x+3=0$ ja $x=0$

$x=-3$

Yhtälön määrittelyehto on $x \neq -3$ ja $x \neq 0$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x+3} \qquad |\cdot x(x+3) \quad \neq 0$$

$$\frac{x(x+3)}{x}=\frac{x(x+3)(x-1)}{x+3}$$

$$x+3=x^2-x$$

$$-x^2+2x+3=0$$

$x=-1$ tai $x=3$

Ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon.

Vastaus a) $x=-\frac{4}{5}$ tai $x=1$

b) $x=-1$ tai $x=3$

# 40

a) Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$x+1=0$$
$$x=-1$$

Yhtälön määrittelyehto on $x \neq -1$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$x-\frac{8}{x+1}=-3 \qquad |\cdot(x+1) \quad \neq 0$$

$$(x+1)x-\frac{8(x+1)}{x+1}=-3(x+1)$$
$$x^2+x-8=-3x-3$$
$$x^2+4x-5=0$$

$x=-5$ tai $x=1$

Ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon.

b) Ratkaistaan nimittäjien nollakohdat.

$x-1=0$ ja $x=0$

$x=1$

Yhtälön määrittelyehto on $x \neq 0$ ja $x=1$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x-1}=0 \qquad |\cdot x(x-1) \quad \neq 0$$

$$\frac{x(x-1)}{x}-\frac{x(x-1)(x+1)}{x-1}=0\cdot x(x-1)$$

$$x-1-(x^2+x)=0$$

$$x-1-x^2-x=0$$

$$-x^2-1=0$$

$$x^2=-1$$

ei ratkaisua

Vastaus a) $x=-5$ tai $x=1$

b) ei ratkaisuja

**41**

Ratkaistaan ensin nimittäjän nollakohdat.

$$x^2 + \pi^2 = 0$$
$$x^2 = -\pi^2$$
ei ratkaisua

Yhtälö on määritelty kaikilla $x$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{(x+1)^2 - \pi^2}{x^2 + \pi^2} = 0 \qquad |\cdot(x^2 + \pi^2) \quad \neq 0$$
$$(x+1)^2 - \pi^2 = 0$$
$$x^2 + 2x + 1 - \pi^2 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1 - \pi^2)}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 + 4\pi^2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4\pi^2}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\pi}{2} = \frac{2 \cdot (-1 \pm \pi)}{2} = -1 \pm \pi$$

$x = \pi - 1$ tai $x = -\pi - 1$

Vastaus $x = \pi - 1$ tai $x = -\pi - 1$

## 42

a) Ratkaistaan nimittäjien nollakohdat.

$x-1=0$ $\quad$ $x+1=0$ $\quad$ $x^2-1=0$

$x=1$ $\quad$ $x=-1$ $\quad$ $x=1$ tai $x=-1$

Yhtälön määrittelyehto on $x \neq -1$ ja $x \neq 1$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{x+3}{x^2-1} \quad \Big| \cdot (x+1)(x-1) \quad \neq 0$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}-\frac{(x+1)(x-1)\cdot 2}{x+1}=\frac{(x+1)(x-1)(x+3)}{(x+1)(x-1)}$$

$$x+1-(2x-2)=x+3$$

$$x+1-2x+2=x+3$$

$$-2x=0$$

$$x=0$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon.

b) Ratkaistaan nimittäjien nollakohdat.

$x-1=0$ $\qquad$ $(x-1)^2=0$

$x=1$ $\qquad$ $x=1$

Yhtälön määrittelyehto on $x \neq 1$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{x}{x-1}-\frac{x+1}{(x-1)^2}=-1 \quad \Big| \cdot (x+1)(x-1) \quad \neq 0$$

$$\frac{x(x-1)(x-1)}{x-1}-\frac{(x+1)(x-1)(x-1)}{(x-1)^2}=-1\cdot(x-1)(x-1)$$

$$x^2-x-(x+1)=-x^2+2x-1$$

$$x^2-x-x-1+x^2-2x+1=0$$

$$2x^2-4x=0$$

$$2x(x-2)=0$$

$2x=0$ tai $x-2=0$

$x=0$ $\qquad$ $x=2$

Ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon.

Vastaus a) $x=0$

b) $x=0$ tai $x=2$

**43**

Retkelle ilmoittautui $x$ henkilöä.

Retkelle saapui $x-6$ henkilöä.

Muuttuja $x > 6$.

Retken ennakoitu hinta per matkustaja oli $\frac{1248}{x}$.

Todellinen hinta oli $\frac{1248}{x-6}$.

Todellinen hinta oli $9$ euroa enemmän kuin ennakoitu hinta.

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{1248}{x} + 9 = \frac{1248}{x-6}$$

Voidaan ratkaista laskimella.

$x = -26$ tai $x = 32$

Ratkaisu $x = 32$ toteuttaa määrittelyehdon $x > 6$.

Retkelle ilmoittautui aluksi $32$ henkilöä,
joista saapui paikalle $32 - 6 = 26$.

Retken hinnaksi tuli $\frac{1248€}{26} = 48€$.

Vastaus 26 henkilöä, 48 euroa

# 44

Merkitään virtauksen nopeutta $x$.

Veneen nopeus on seisovassa vedessä 18 km/h = 5 m/s,
vastavirtaan $5 - x$ m/s
ja myötävirtaan $5 + x$ m/s.

Muuttujan määrittelyväli on $0 < x < 5$.

Matkan pituus yhteen suuntaan on 2000 m.
Edestakaiseen matkaan kuluu aikaa 900 s.

Nopeuden yhtälöstä $v = \frac{s}{t}$ saadaan $t = \frac{s}{v}$.

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{2000}{5-x} + \frac{2000}{5+x} = 900$$

$$x = \frac{5}{3} \text{ tai } x = -\frac{5}{3}$$

Voidaan ratkaista laskimella.

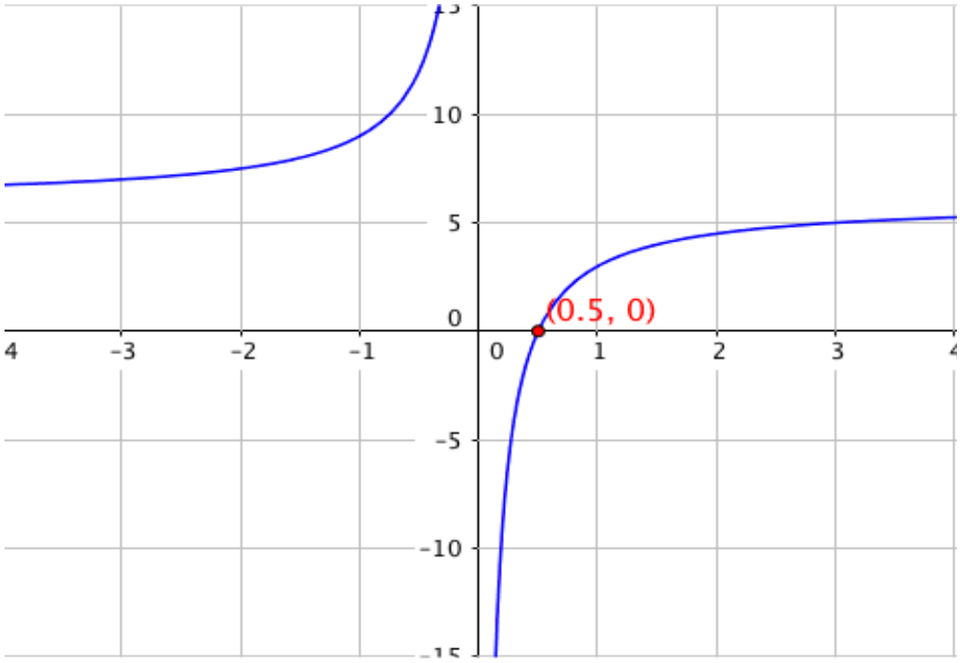
Ratkaisu $x = \frac{5}{3} = 1,666... \approx 1,7$ toteuttaa määrittelyehdon.

Virtauksen nopeus on noin 1,7 m/s.

Vastaus 1,7 m/s

**45**

Piirretään funktion $f(x)=\dfrac{6x-3}{x}$ kuvaaja laskimella.




a) Funktio ei ole määritelty nimittäjän nollakohdassa $x=0$.

b) Kuvaajan perusteella funktion nollakohta on $x=\dfrac{1}{2}$.

c) Kuvaajan perusteella funktion arvot ovat positiivisia, kun $x<0$ tai $x>\dfrac{1}{2}$.

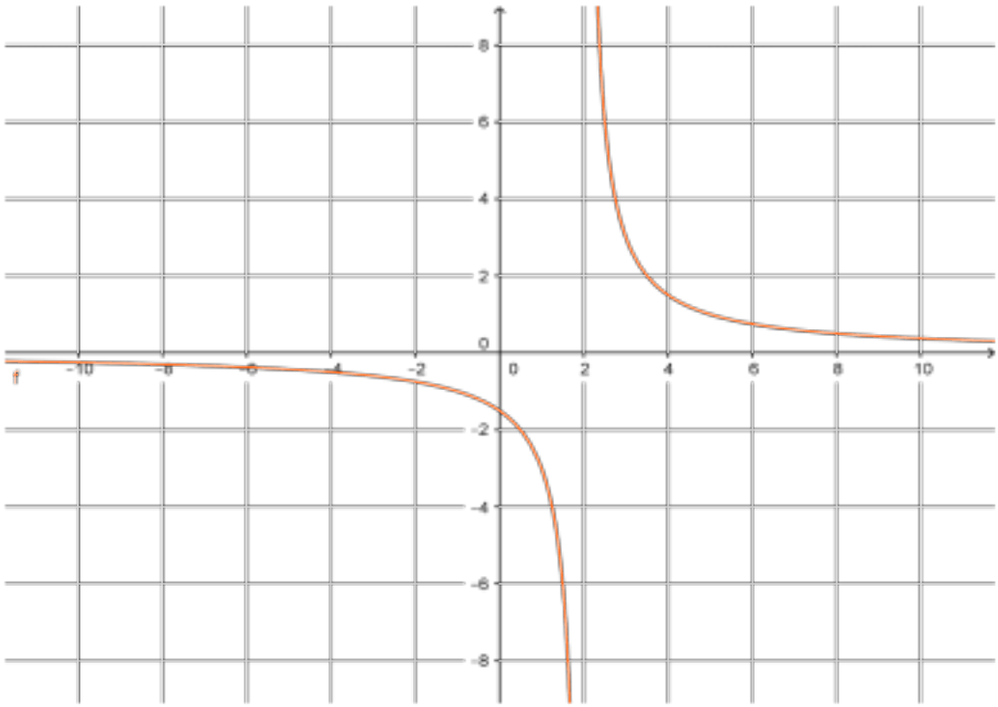
Vastaus a) $x=0$

b) $x=\dfrac{1}{2}$

c) $x<0$ tai $x>\dfrac{1}{2}$

**46**

Piirretään funktion $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ kuvaaja laskimella.




a) Funktio ei ole määritelty nimittäjän nollakohdassa $x = 2$.

b) Kuvaajan perusteella funktiolla ei ole nollakohtia.

c) Kuvaajan perusteella funktion arvot ovat negatiivisia, kun $x < 2$.

Vastaus a) $x = 2$

b) ei nollakohtia

c) $x < 2$

**47**

Rationaalifunktion arvot voivat vaihtaa merkkiään ainoastaan funktion nollakohdissa ja kohdissa, joissa funktio ei ole määritelty.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$

Funktion $f$ määrittelyehto on $x \neq -3$.

Ratkaistaan funktion nollakohta.

$$\frac{5x - 2}{x + 3} = 0 \qquad | \cdot (x + 3) \neq 0$$
$$5x - 2 = 0$$
$$5x = 2$$
$$x = \frac{2}{5}$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon.
Funktion $f$ nollakohta on $x = \frac{2}{5}$.

Funktion arvot voivat vaihtaa merkkiään vain kohdissa
$x = -3$ ja $x = \frac{2}{5}$.

Luvut $-3$ ja $\frac{2}{5}$ jakavat lukusuoran kolmeen osaväliin.
Lasketaan jokaiselta osaväliltä yksi funktion arvo.

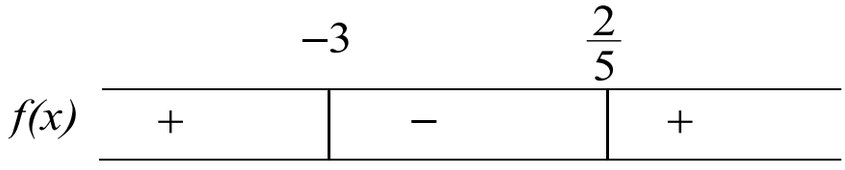
$$f(x) = \frac{5x-2}{x+3}$$

$$f(-4) = \frac{5\cdot(-4)-2}{-4+3} = 22 > 0$$

$$f(0) = \frac{5\cdot 0-2}{0+3} = -\frac{2}{3} < 0$$

$$f(1) = \frac{5\cdot 1-2}{1+3} = \frac{3}{4} > 0$$

Kirjataan merkit merkkikaavioon.




a) Funktion arvot ovat positiivisia, kun $x < -3$ tai $x > \frac{2}{5}$.

b) Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $-3 < x < \frac{2}{5}$.

Vastaus a) $x < -3$ tai $x > \frac{2}{5}$

b) $-3 < x < \frac{2}{5}$

# 48

Rationaalifunktion arvot voivat vaihtaa merkkiään ainoastaan funktion nollakohdissa ja kohdissa, joissa funktio ei ole määritelty.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$(x+1)^2 = 0$$
$$x = -1$$

Funktion $f$ määrittelyehto on $x \neq -1$.

Ratkaistaan funktion nollakohta.

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = 0 \qquad |\cdot(x+1)^2 \neq 0$$
$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon.
Funktion $f$ nollakohta on $x = 1$.

Funktion arvot voivat vaihtaa merkkiään vain kohdissa $x = -1$ ja $x = 1$.

Luvut $-1$ ja $1$ jakavat lukusuoran kolmeen osaväliin.
Lasketaan jokaiselta osaväliltä yksi funktion arvo.

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

$$f(-2) = \frac{-2-1}{(-2+1)^2} = -3 < 0$$

$$f(0) = \frac{0-1}{(0+1)^2} = -1 < 0$$

$$f(2) = \frac{2-1}{(2+1)^2} = \frac{1}{9} > 0$$

Kirjataan merkit merkkikaavioon.

| | -1 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | − | | − | + |

a) Funktion arvot ovat positiivisia, kun $x > 1$.
b)
c) Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $x < -1$ tai $-1 < x < 1$.

Vastaus a) $x > 1$

b) $x < -1$ tai $-1 < x < 1$

**49**

$$\frac{x}{2x-5} \le 1$$

$$\frac{x}{2x-5} - 1 \le 0$$

Merkitään $f(x) = \frac{x}{2x-5} - 1$ ja selvitetään, millä muuttujan $x$ arvoilla $f(x) \le 0$.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$2x - 5 = 0$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Funktion määrittelyehto on $x \neq \frac{5}{2}$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohta.

$$\frac{x}{2x-5} - 1 = 0 \qquad | \cdot (2x-5) \neq 0$$

$$\frac{x(2x-5)}{2x-5} - 1 \cdot (2x-5) = 0$$

$$x - 2x + 5 = 0$$

$$x = 5$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon.
Funktion $f$ nollakohta on $x = 5$.

Funktion $f$ arvot voivat vaihtaa merkkiään vain kohdissa $\frac{5}{2}$ ja $5$.
Lasketaan jokaiselta osaväliltä yksi funktion arvo.

$$f(x) = \frac{x}{2x-5} - 1$$
$$f(0) = \frac{0}{2 \cdot 0 - 5} - 1 = -1 < 0$$
$$f(3) = \frac{3}{2 \cdot 3 - 5} - 1 = 2 > 0$$
$$f(6) = \frac{6}{2 \cdot 6 - 5} - 1 = -\frac{1}{7} < 0$$

Laaditaan merkkikaavio.

| | | $\frac{5}{2}$ | | $5$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | | $+$ | | $-$ |

Epäyhtälö $\frac{x}{2x-5} - 1 \le 0$ toteutuu, kun $x < \frac{5}{2}$ tai $x \ge 5$.

Vastaus $x < \frac{5}{2}$ tai $x \ge 5$

**50**

a)

$$\frac{x}{4} \geq \frac{1}{x}$$

$$\frac{x}{4} - \frac{1}{x} \geq 0$$

Merkitään $f(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{x}$ ja selvitetään, millä muuttujan x arvoilla $f(x) \geq 0$.

Nimittäjän $x$ nollakohta on $x = 0$.
Funktion määrittelyehto on $x \neq 0$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohta.

$$\frac{x}{4} - \frac{1}{x} = 0 \qquad | \cdot 4x \neq 0$$

$$\frac{4x \cdot x}{4} - \frac{4x}{x} = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = 2 \text{ tai } x = -2$$

Ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon.
Funktion $f$ nollakohdat ovat $x = -2$ ja $x = 2$.

Funktion $f$ arvot voivat vaihtaa merkkiään vain kohdissa $-2$, $0$ ja $2$. Lasketaan jokaiselta osaväliltä yksi funktion arvo.

$$f(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{x}$$

$$f(-3) = \frac{-3}{4} - \frac{1}{-3} = -\frac{5}{12} < 0$$

$$f(-1) = \frac{-1}{4} - \frac{1}{-1} = \frac{3}{4} > 0$$

$$f(1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{1} = -\frac{3}{4} < 0$$

$$f(3) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12} > 0$$

Laaditaan merkkikaavio.

| | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ |

Epäyhtälö $\frac{x}{4} - \frac{1}{x} \geq 0$ toteutuu, kun $-2 \leq x < 0$ tai $x \geq 2$.

b)

$$\frac{1}{3x} > \frac{5}{x}$$

$$\frac{1}{3x} - \frac{5}{x} > 0$$

Merkitään $f(x) = \frac{1}{3x} - \frac{5}{x}$ ja selvitetään, millä muuttujan $x$ arvoilla $f(x) > 0$.

Nimittäjien $3x$ ja $x$ nollakohta on $x = 0$.
Funktion määrittelyehto on $x \neq 0$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohta.

$$\frac{1}{3x} - \frac{5}{x} = 0 \qquad | \cdot 3x \neq 0$$

$$\frac{3x}{3x} - \frac{3x \cdot 5}{x} = 0$$

$$1 - 15 = 0$$

epätosi

Funktiolla $f$ ei ole nollakohtia.

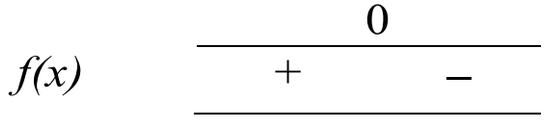
Funktion $f$ arvot voivat vaihtaa merkkiään vain kohdassa 0.
Lasketaan jokaiselta osaväliltä yksi funktion arvo.

$$f(x) = \frac{1}{3x} - \frac{5}{x}$$

$$f(-1) = \frac{1}{3 \cdot (-1)} - \frac{5}{-1} = \frac{14}{3} > 0$$

$$f(1) = \frac{1}{3 \cdot 1} - \frac{5}{1} = -\frac{14}{3} < 0$$

Laaditaan merkkikaavio.




Epäyhtälö $\frac{1}{3x} - \frac{5}{x} > 0$ toteutuu, kun $x < 0$.

Vastaus a) $-2 \le x < 0$ tai $x \ge 2$

b) $x < 0$

**51**

Merkitään $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 1}$.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$

Funktion määrittelyehto on $x \neq 1$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohdat.

$$\frac{x^3 - 2x^2}{x - 1} = 0 \qquad | \cdot (x - 1) \neq 0$$
$$x^3 - 2x^2 = 0$$

$x = 0$ tai $x = 2$

Ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon.
Funktion $f$ nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = 2$.

Funktion $f$ arvot voivat vaihtaa merkkiään vain kohdissa $0$, $1$ ja $2$. Lasketaan jokaiselta osaväliltä yksi funktion arvo.

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 1}$$

$$f(-1) = \frac{3}{2} > 0$$

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} > 0$$

$$f(\frac{3}{2}) = -\frac{9}{4} < 0$$

$$f(3) = \frac{9}{2} > 0$$

Laaditaan merkkikaavio.

| | 0 | | 1 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | + | + | | − | | + |

Epäyhtälö $\frac{x^3 - 2x^2}{x - 1} \leq 0$ toteutuu, kun $x = 0$ tai $1 < x \leq 2$.

Vastaus $x = 0$ tai $1 < x \leq 2$

**52**

Merkitään $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2}{x+3}$.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$

Funktion määrittelyehto on $x \neq -3$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohdat.

$$\frac{2x^3 - x^2}{x+3} = 0 \qquad |\cdot(x+3) \neq 0$$
$$2x^3 - x^2 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1}{2}$$

Ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon.
Funktion $f$ nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = \dfrac{1}{2}$.

Funktion $f$ arvot voivat vaihtaa merkkiään vain kohdissa $-3$, $0$ ja $\frac{1}{2}$. Lasketaan jokaiselta osaväliltä yksi funktion arvo.

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2}{x+3}$$
$$f(-4) = 144 > 0$$
$$f(-1) = -\frac{3}{2} < 0$$
$$f(\tfrac{1}{4}) = -\frac{1}{104} < 0$$
$$f(1) = \frac{1}{4} > 0$$

Laaditaan merkkikaavio.

| | -3 | | 0 | | $\frac{1}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | + | − | | − | | + |

Epäyhtälö $\frac{2x^3 - x^2}{x+3} \geq 0$ toteutuu, kun $x < -3$ tai $x = 0$ tai $x \geq \frac{1}{2}$.

Vastaus $x < -3$ tai $x = 0$ tai $x \geq \frac{1}{2}$

**53**

$$\frac{1}{x+1} < \frac{2}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} < 0$$

Merkitään $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohdat.

$x+1=0$ $\qquad$ $x^2-1=0$

$x=-1$ $\qquad$ $x=1$ tai $x=-1$

Funktion määrittelyehto on $x \neq -1$ ja $x \neq 1$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohdat.

$$\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} = 0 \qquad |\cdot(x+1)(x-1) \neq 0$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x+1} - \frac{2(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = 0$$

$$x-1-2=0$$

$$x=3$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon.
Funktion $f$ nollakohta on $x=3$.

Funktion $f$ arvot voivat vaihtaa merkkiään vain kohdissa $-1$, $1$ ja $3$. Lasketaan jokaiselta osaväliltä yksi funktion arvo.

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$$

$$f(-2) = -\frac{5}{3} < 0$$

$$f(0) = 3 > 0$$

$$f(2) = -\frac{1}{3} < 0$$

$$f(4) = \frac{1}{15} > 0$$

Laaditaan merkkikaavio.

| | -1 | | 1 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | − | + | | − | | + |

Epäyhtälö $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} < 0$ toteutuu, kun $x < -1$ tai $1 < x < 3$.

Vastaus $x < -1$ tai $1 < x < 3$

**54**

$$\frac{1}{x-x^2}-2\le\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x-x^2}-\frac{1}{x}-2\le 0$$

Merkitään $f(x)=\frac{1}{x-x^2}-\frac{1}{x}-2$.

Ratkaistaan nimittäjien nollakohdat.

$x=0$

$$x-x^2=0$$
$$x(1-x)x=0$$
$$x=0 \text{ tai } 1-x=0$$
$$x=0 \text{ tai } x=1$$

Funktion määrittelyehto on $x\neq 0$ ja $x\neq 1$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohdat.

$$\frac{1}{x-x^2}-\frac{1}{x}-2=0 \qquad |\cdot x(1-x)\neq 0$$
$$\frac{x(1-x)}{x(1-x)}-\frac{x(1-x)}{x}-2\cdot x(1-x)=0$$
$$1-(1-x)-2x+2x^2=0$$
$$2x^2-x=0$$
$$x(2x-1)=0$$
$$x=0 \text{ tai } x=\frac{1}{2}$$

Ratkaisu $x=\frac{1}{2}$ toteuttaa määrittelyehdon.

Funktion $f$ nollakohta on $x = \frac{1}{2}$ .

Funktion $f$ arvot voivat vaihtaa merkkiään vain kohdissa $0$, $\frac{1}{2}$ ja $1$. Lasketaan jokaiselta osaväliltä yksi funktion arvo.

$$f(x) = \frac{1}{x - x^2} - \frac{1}{x} - 2$$

$$f(-1) = -\frac{2}{3} < 0$$

$$f(\frac{1}{4}) = -\frac{2}{3} < 0$$

$$f(\frac{3}{4}) = 2 > 0$$

$$f(2) = -3 < 0$$

Laaditaan merkkikaavio.

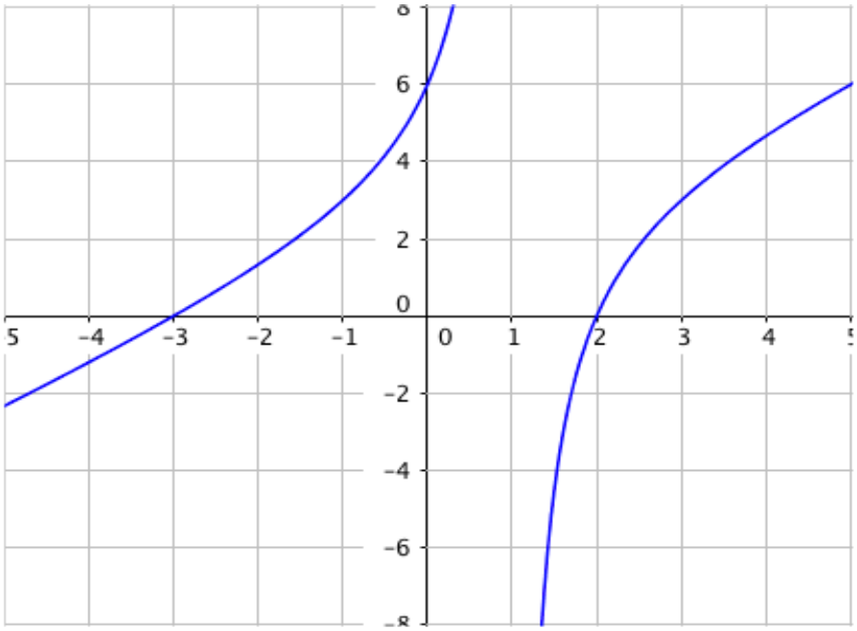
| | | 0 | | $\frac{1}{2}$ | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | − | | − | | + | | − |

Epäyhtälö $\frac{1}{x - x^2} - \frac{1}{x} - 2 \le 0$ toteutuu, kun $x < 0$ tai $0 < x \le \frac{1}{2}$ tai $x > 1$.

Vastaus $x < 0$ tai $0 < x \le \frac{1}{2}$ tai $x > 1$

**55**

Piirretään funktion $f(x) = x + 2 - \dfrac{4}{x-1}$ kuvaaja laskimella.




a) Funktio ei ole määritelty nimittäjän $x-1$ nollakohdassa $x = 1$.

b) Kuvaajan perusteella funktion nollakohdat ovat

$x = -3$ ja $x = 2$.

c) Kuvaajan perusteella funktion arvot ovat negatiivisia, kun

$x < -3$ tai $1 < x < 2$.

Vastaus a) $x = 1$

b) $x = -3$ tai $x = 2$

c) $x < -3$ tai $1 < x < 2$

## 56

Rationaalifunktion arvot voivat vaihtaa merkkiään ainoastaan funktion nollakohdissa ja kohdissa, joissa funktio ei ole määritelty.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$2x+1=0$$
$$x=-\frac{1}{2}$$

Funktion $f$ määrittelyehto $x \neq -\frac{1}{2}$ .

Ratkaistaan funktion nollakohta.

$$\frac{1-3x}{2x+1}=0 \qquad |\cdot(2x+1) \neq 0$$
$$1-3x=0$$
$$-3x=-1$$
$$x=\frac{1}{3}$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon.

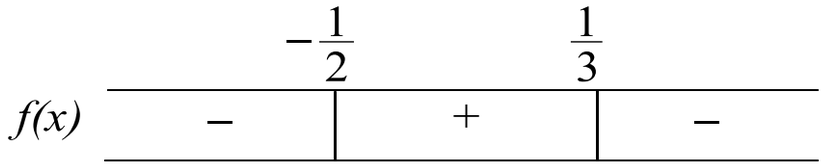
Funktion $f$ nollakohta on $x=\frac{1}{3}$ .

Funktion arvot voivat vaihtaa merkkiään vain kohdissa $x = -\frac{1}{2}$ ja $x = \frac{1}{3}$.

Luvut $-\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{3}$ jakavat lukusuoran kolmeen osaväliin. Lasketaan jokaiselta osaväliltä yksi funktion arvo.

$$f(x) = \frac{1-3x}{2x+1}$$
$$f(-1) = -4 < 0$$
$$f(0) = 1 > 0$$
$$f(1) = -\frac{2}{3} < 0$$

Kirjataan merkit merkkikaavioon.




a) Funktion arvot ovat positiivisia, kun $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$.

b) Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $x < -\frac{1}{2}$ tai $x > \frac{1}{3}$.

**57**

$$\frac{3x}{2x-8} \geq 1$$

$$\frac{3x}{2x-8} - 1 \geq 0$$

Merkitään $f(x) = \frac{3x}{2x-8} - 1$ ja selvitetään, millä muuttujan $x$ arvoilla $f(x) \geq 0$.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{8}{2} = 4$$

Funktion määrittelyehto on $x \neq 4$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohta.

$$\frac{3x}{2x-8} - 1 = 0 \qquad | \cdot (2x-8) \neq 0$$

$$\frac{3x(2x-8)}{2x-8} - 1 \cdot (2x-8) = 0$$

$$3x - 2x + 8 = 0$$

$$x = -8$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon.
Funktion $f$ nollakohta on $x = -8$.

Funktion $f$ arvot voivat vaihtaa merkkiään vain kohdissa $-8$ ja $4$. Lasketaan jokaiselta osaväliltä yksi funktion arvo.

$$f(x) = \frac{3x}{2x-8} - 1$$

$$f(-9) = \frac{1}{26} > 0$$

$$f(0) = -1 < 0$$

$$f(5) = \frac{13}{2} > 0$$

Laaditaan merkkikaavio.

| | | -8 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | + | | − | | + |

Epäyhtälö $\frac{3x}{2x-8} - 1 \geq 0$ toteutuu, kun $x \leq -8$ tai $x > 4$.

Vastaus $x \leq -8$ tai $x > 4$

**58**

$$f(x) < g(x)$$
$$\frac{2x}{x-3} < \frac{1}{x}$$
$$\frac{2x}{x-3} - \frac{1}{x} < 0$$

Merkitään $h(x) = \frac{2x}{x-3} - \frac{1}{x}$.

Nimittäjän $x$ nollakohta on $x = 0$,
ja nimittäjän $x-3$ nollakohta on $x = 3$.

Funktion määrittelyehto on $x \neq 0$ ja $x \neq 3$.

Ratkaistaan funktion $h$ nollakohdat.

$$\frac{2x}{x-3} - \frac{1}{x} = 0 \qquad |\cdot x(x-3) \neq 0$$
$$\frac{2x \cdot x(x-3)}{x-3} - \frac{x(x-3)}{x} = 0$$
$$2x^2 - x + 3 = 0$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-23}}{4}$$

Ei ratkaisua.

Funktiolla ei ole nollakohtia.

Funktion $h$ arvot voivat vaihtaa merkkiään vain kohdissa $0$ ja $3$. Lasketaan jokaiselta osaväliltä yksi funktion arvo.

$$h(x) = \frac{2x}{x-3} - \frac{1}{x}$$

$$h(-1) = \frac{1}{2} > 0$$

$$h(1) = -2 < 0$$

$$f(4) = \frac{7}{4} > 0$$

Laaditaan merkkikaavio.

| | | 0 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | | $-$ | | $+$ |

Epäyhtälö $\frac{2x}{x-3} - \frac{1}{x} < 0$ toteutuu, kun $0 < x < 3$.

Vastaus $0 < x < 3$

**59**

a) Merkitään $f(x) = \dfrac{x+2}{(x+1)^2}$ ja selvitetään, millä muuttujan $x$ arvoilla $f(x) > 0$.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$(x+1)^2 = 0$$
$$x = -1$$

Funktion määrittelyehto on $x \neq -1$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohta.

$$\frac{x+2}{(x+1)^2} = 0 \qquad |\cdot(x+1)^2 \neq 0$$
$$x+2 = 0$$
$$x = -2$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon.
Funktion $f$ nollakohta on $x = -2$.

Funktion $f$ arvot voivat vaihtaa merkkiään vain kohdissa $-2$ ja $-1$. Lasketaan jokaiselta osaväliltä yksi funktion arvo.

$$f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$$

$$f(-3) = -\frac{1}{4} < 0$$

$$f(-\frac{3}{2}) = 2 > 0$$

$$f(0) = 2 > 0$$

Laaditaan merkkikaavio.

| | | $-2$ | | $-1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | $-$ | | $+$ | | $+$ |

Epäyhtälö $\frac{x+2}{(x+1)^2} > 0$ toteutuu, kun $-2 < x < -1$ tai $x > -1$.

b) Merkitään $f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$ ja selvitetään, millä muuttujan $x$ arvoilla $f(x)>0$.

Nimittäjän $x+1$ nollakohta on $x=-1$.
Funktion määrittelyehto on $x\neq -1$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohta.

$$\frac{x^2+3}{x+1}=0 \qquad |\cdot(x+1)\neq 0$$

$$x^2+3=0$$

$$x^2=-3$$

Funktiolla $f$ ei ole nollakohtia.

Funktion $f$ arvot voivat vaihtaa merkkiään vain kohdassa $-1$.
Lasketaan jokaiselta osaväliltä yksi funktion arvo.

$$f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$$
$$f(-2)=-7<0$$
$$f(0)=3>0$$

Laaditaan merkkikaavio

| | | $-1$ | |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $+$ |

Epäyhtälö $\frac{x^2+3}{x+1}>0$ toteutuu, kun $x>-1$.

Vastaus a) $-2 < x < -1$ tai $x > -1$

b) $x > -1$

**60**

Merkitään $f(x) = \dfrac{4x^3 + x^2}{2x - 6}$.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$2x - 6 = 0$$
$$x = 3$$

Funktion määrittelyehto on $x \neq 3$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohdat.

$$\frac{4x^3 + x^2}{2x - 6} = 0 \qquad |\cdot(x+3) \neq 0$$
$$4x^3 + x^2 = 0$$
$$x^2(4x + 1) = 0$$
$$x^2 = 0 \text{ tai } 4x + 1 = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x = -\frac{1}{4}$$

Ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon.
Funktion $f$ nollakohdat ovat $x = -\dfrac{1}{4}$ ja $x = 0$.

Funktion $f$ arvot voivat vaihtaa merkkiään vain kohdissa $-\frac{1}{4}$, $0$ ja $3$. Lasketaan jokaiselta osaväliltä yksi funktion arvo.

$$f(x) = \frac{4x^3 + x^2}{2x - 6}$$

$$f(-1) = \frac{3}{8} > 0$$

$$f(-\frac{1}{8}) = -\frac{1}{800} < 0$$

$$f(2) = -18 < 0$$

$$f(4) = 136 > 0$$

Laaditaan merkkikaavio.

| | | $-\frac{1}{4}$ | $0$ | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ | |

Epäyhtälö $\frac{4x^3 + x^2}{2x - 6} \geq 0$ toteutuu, kun $x \leq -\frac{1}{4}$ tai $x = 0$ tai $x > 3$.

Vastaus $x \leq -\frac{1}{4}$ tai $x = 0$ tai $x > 3$

**61**

Merkitään $f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1-2x}{4x^2}$.

Nimittäjien $2x$ ja $4x^2$ nollakohta on $x = 0$.

Funktion määrittelyehto on $x \neq 0$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohdat.

$$\frac{1}{2x} - \frac{1-2x}{4x^2} = 0 \qquad | \cdot 4x^2 \neq 0$$

$$\frac{4x^2}{2x} - \frac{(1-2x)\cdot 4x^2}{4x^2} = 0$$

$$2x - 1 + 2x = 0$$

$$4x = 1$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon.

Funktion $f$ nollakohta on $x = \frac{1}{4}$.

Funktion $f$ arvot voivat vaihtaa merkkiään vain kohdissa $0$ ja $\frac{1}{4}$.
Lasketaan jokaiselta osaväliltä yksi funktion arvo.

$$f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1-2x}{4x^2}$$

$$f(-1) = -\frac{5}{4} < 0$$

$$f(\frac{1}{8}) = -8 < 0$$

$$f(1) = \frac{3}{4} > 0$$

Laaditaan merkkikaavio.

| | | $0$ | | $\frac{1}{4}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | | $-$ | | $+$ |

Epäyhtälö $\frac{1}{2x} - \frac{1-2x}{4x^2} \le 0$ toteutuu, kun $x < 0$ tai $0 < x \le \frac{1}{4}$.

Vastaus $x < 0$ tai $0 < x \le \frac{1}{4}$

**62**

$$\frac{3}{x^2-1} > \frac{x-1}{1+x}$$

$$\frac{3}{x^2-1} - \frac{x-1}{1+x} > 0$$

Merkitään $f(x) = \frac{3}{x^2-1} - \frac{x-1}{1+x}$.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohdat.

$1+x=0$ $\qquad$ $x^2-1=0$

$x=-1$ $\qquad$ $x=-1$ tai $x=1$

Funktion määrittelyehto on $x \neq -1$ ja $x \neq 1$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohdat.

$$\frac{3}{x^2-1} - \frac{x-1}{1+x} = 0 \qquad |\cdot(x+1)(x-1) \neq 0$$

$$\frac{3(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{(x-1)(x+1)(x-1)}{x+1} = 0$$

$$3-(x-1)^2 = 0$$

$$x^2-2x-2=0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{2\pm\sqrt{12}}{2} = \frac{2\pm 2\sqrt{3}}{2} = 1\pm\sqrt{3}$$

$x = 1-\sqrt{3}$ tai $x = 1+\sqrt{3}$

Ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon.
Funktion $f$ nollakohdat ovat $x = 1 - \sqrt{3}$ ja $x = 1 + \sqrt{3}$ .

Funktion $f$ arvot voivat vaihtaa merkkiään vain kohdissa $-1$, $1 - \sqrt{3}$, $1$ ja $1 + \sqrt{3}$ . Lasketaan jokaiselta osaväliltä yksi funktion arvo.

$$f(x) = \frac{3}{x^2 - 1} - \frac{x - 1}{1 + x}$$
$$f(-2) = -2 < 0$$
$$f(-0,8) = 0.66... > 0$$
$$f(0) = -2 < 0$$
$$f(2) = \frac{2}{3} > 0$$
$$f(3) = -\frac{1}{8} < 0$$

Laaditaan merkkikaavio

| | $-1$ | | $1-\sqrt{3}$ | | $1$ | | $1+\sqrt{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | $-$ |

Epäyhtälö $\frac{3}{x^2 - 1} - \frac{x - 1}{1 + x} > 0$ toteutuu,

kun $-1 < x < 1 - \sqrt{3}$ tai $1 < x < 1 + \sqrt{3}$ .

Vastaus $-1 < x < 1 - \sqrt{3}$ tai $1 < x < 1 + \sqrt{3}$

**63**

Olkoon $a$ ja $b$ positiivisia lukuja.

Lukujen $a$ ja $b$ keskiarvo on $\frac{a+b}{2}$.

Muodostetaan lukujen $a$ ja $b$ harmoninen keskiarvo.

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}=\frac{\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}}{2}=\frac{\frac{a+b}{ab}}{2}=\frac{a+b}{2ab}$$

Tutkitaan keskiarvon ja harmonisen keskiarvon erotusta.

$$\begin{aligned}&\frac{a+b)}{\frac{a+b}{2}}-\frac{2)}{\frac{2ab}{a+b}}\\&=\frac{a^2+2ab+b^2}{2(a+b)}-\frac{4ab}{2(a+b)}\\&=\frac{a^2-2ab+b^2}{2(a+b)}\\&=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}\end{aligned}$$

Koska $a$ ja $b$ ovat positiivisia lukuja, niin nimittäjä $2(a+b)>0$.

Osoittaja $(a-b)^2\geq 0$ kaikilla $a$ ja $b$.

Siten $\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}\geq 0$ kaikilla $a$ ja $b$.

Koska keskiarvon ja harmonisen keskiarvon erotus on aina $\geq 0$, väite on todistettu.

**64**

Olkoon $a$ ja $b$ positiivisia lukuja.

Lukujen $a$ ja $b$ geometrinen keskiarvo on $\sqrt{ab}$
ja harmoninen keskiarvo $\frac{2ab}{a+b}$.

On osoitettava todeksi väite $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$.

Seuraavat epäyhtälöt ovat keskenään yhtäpitäviä, kun $a$ ja $b$ ovat positiivisia lukuja.

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \qquad \left| \cdot (a+b) > 0 \right.$$

$$\sqrt{ab} \cdot (a+b) \geq 2ab \qquad \left| \ (\ )^2 \right. \quad \text{molemmat puolet} > 0$$

$$ab \cdot (a+b)^2 \geq 4(ab)^2 \qquad \left| : ab > 0 \right.$$

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

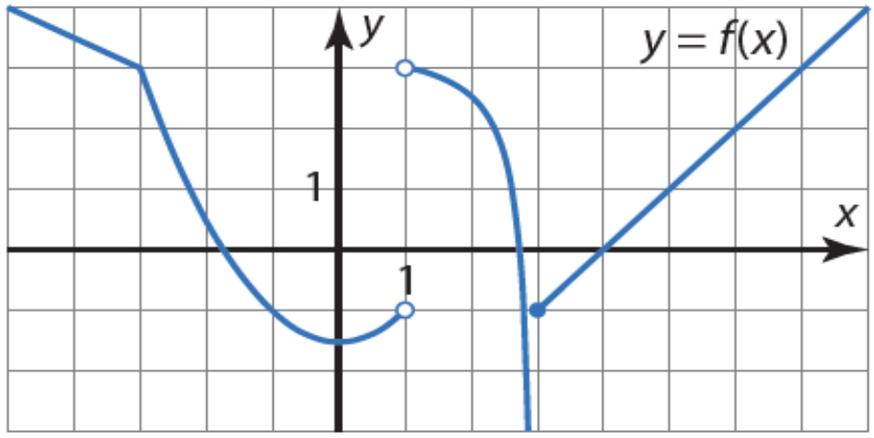
$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

Koska $(a-b)^2 \geq 0$ kaikilla $a$ ja $b$, niin väite on todistettu.

**65**




a) Oikein. Funktion arvot lähestyvät lukua $3$, kun muuttujan arvot lähestyvät lukua $-3$ kummalta puolelta hyvänsä.

b) Väärin. Kuvaajalla ei ole pistettä kohdassa $x = 1$, joten arvoa $f(1)$ ei ole olemassa.

c) Väärin. Kohdassa $x = 3$ funktion kuvaajan pisteen $y$-koordinaatti on $-1$, joten $f(3) = -1$.

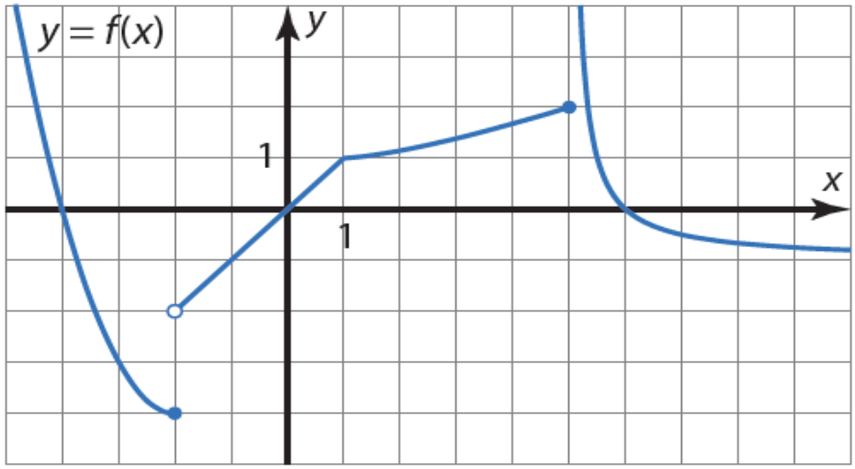
d) Oikein.

e) Oikein. Funktio on määritelty muualla, paitsi kohdassa $x = 1$.

f) Oikein. Funktion arvot lähestyvät lukua $1$, kun muuttujan arvot lähestyvät lukua $5$ kummalta puolelta hyvänsä.

Vastaus
a) oikein
b) väärin
c) väärin
d) oikein
e) oikein
f) oikein

**66**




a) Oikein.

b) Väärin. Kohdassa $x = -2$ kuvaajan pisteen $y$-koordinaatti on $-4$, eli $f(-2) = -4$.

c) Väärin. $\lim\limits_{x \to -2+} f(x) = -2$.

d) Väärin. Koska toispuoliset raja-arvot ovat eri suuret, ei funktiolla ole raja-arvoa kohdassa $-2$.

e) Oikein. Funktion arvot lähestyvät lukua 1, kun muuttujan arvot lähestyvät lukua 1 kummalta puolelta hyvänsä.

f) Väärin. Kohdassa $x = 5$ funktion kuvaajan pisteen $y$-koordinaatti on 2, joten $f(5) = 2$.

Vastaus
a) oikein
b) väärin
c) väärin
d) väärin
e) oikein
f) väärin

## 67

Funktio $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x - 7}{2x + 2}$ ei ole määritelty kohdassa $-1$.

Lasketaan funktion arvoja kohdan $-1$ molemmilta puolilta ja taulukoidaan arvot.

| *x* | *f(x)* | *x* | *f(x)* |
|---|---|---|---|
| −1,1 | −4,05 | −0,9 | −3,95 |
| −1,01 | −4,005 | −0,99 | −3,995 |
| −1,001 | −4,0005 | −0,999 | −3,9995 |
| −1,0001 | −4,00005 | −0,9999 | −3,9995 |

Näyttää siltä, että kun muuttujan arvot lähestyvät lukua $-1$ kummalta puolelta tahansa, niin funktion $f$ arvot lähestyvät lukua $-4$.

Taulukoitujen tietojen perusteella $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -4$.

Vastaus $-4$

## 68

a) Funktio $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$ ei ole määritelty kohdassa $-2$.

Lasketaan funktion arvoja kohdan $-2$ molemmilta puolilta ja taulukoidaan arvot.

| $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| −2,1 | 41 | −1.9 | −39 |
| −2,01 | 401 | −1,99 | −399 |
| −2,001 | 4001 | −1,999 | −3999 |
| −2,0001 | 40001 | −1,9999 | −39999 |

Näyttää siltä, että kun muuttujan arvot lähestyvät kohtaa $-2$ vasemmalta, funktion arvot kasvavat rajatta. Kun muuttujan arvot lähestyvät kohtaa $-2$ oikealta, funktion arvot pienenevät rajatta. Funktiolla $f$ ei ole raja-arvoa kohdassa $-2$.

b) Funktio $f$ ei ole määritelty kohdassa 2. Lasketaan funktion arvoja kohdan 2 molemmilta puolilta ja taulukoidaan arvot.

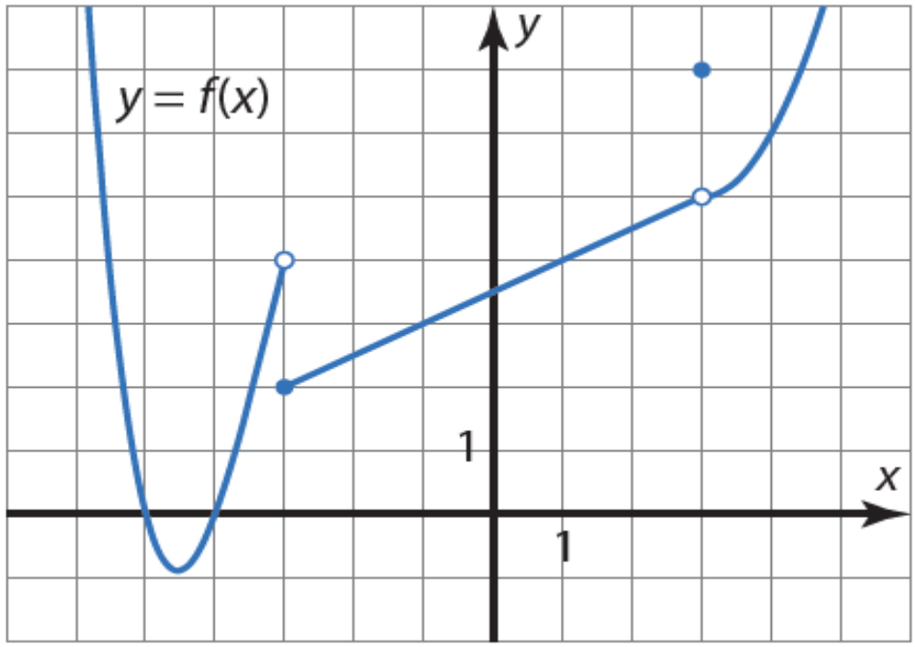
| $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 2,1 | 0,02439… | 1,9 | −0,02564… |
| 2,01 | 0,00249… | 1,99 | −0,00250… |
| 2,001 | 0,00024… | 1,999 | −0,00025… |
| 2,0001 | 0,00002… | 1,9999 | −0,00002… |

Näyttää siltä, että kun muuttujan arvot lähestyvät lukua 2 kummalta puolelta tahansa, niin funktion $f$ arvot lähestyvät lukua 0.

Taulukoitujen tietojen perusteella $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$.

Vastaus a) raja-arvoa ei ole
b) 0

**69**




a) Kohdassa $x = -3$ kuvaajan pisteen $y$-koordinaatti on 2, joten $f(-3) = 2$.
Kohdassa $x = 3$ kuvaajan pisteen $y$-koordinaatti on 7, joten $f(3) = 7$.

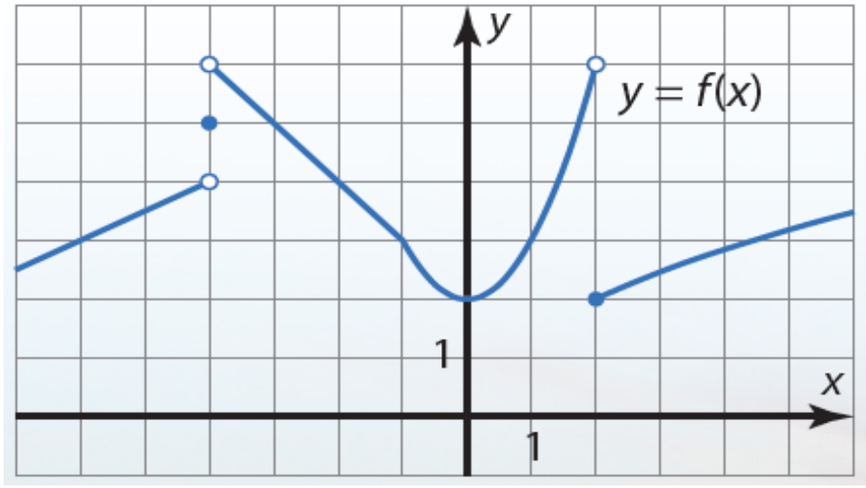
b) Kun $x$ lähestyy kohtaa $-3$ oikealta puolelta, funktion arvot lähestyvät lukua 2. Kun $x$ lähestyy kohtaa $-3$ vasemmalta, funktion arvot lähestyvät lukua 4. Koska toispuoliset raja-arvot ovat eri suuret, funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa $-3$.

Kun $x$ lähestyy kohtaa 3 kummalta puolelta tahansa, funktion arvot lähestyvät lukua 5. Siis $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$.

Vastaus a) $f(-3) = 2$, $f(3) = 7$

b) $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ ei ole olemassa, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$

**70**




a) Kohdassa $x = -4$ kuvaajan pisteen $y$-koordinaatti on 5, joten $f(-4) = 5$.
Kohdassa $x = -1$ kuvaajan pisteen $y$-koordinaatti on 3, joten $f(-1) = 3$.
Kohdassa $x = 2$ kuvaajan pisteen $y$-koordinaatti on 2, joten $f(2) = 2$.

b) Kun $x$ lähestyy kohtaa $-4$ oikealta puolelta, funktion arvot lähestyvät lukua 6. Kun $x$ lähestyy kohtaa $-4$ vasemmalta, funktion arvot eivät lähesty lukua 6. Funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa $-4$.
Kun $x$ lähestyy kohtaa $-1$ kummalta puolelta tahansa, funktion arvot lähestyvät lukua 3. Siis $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 3$.
Kun $x$ lähestyy kohtaa 2 oikealta puolelta, funktion arvot lähestyvät lukua 2. Kun $x$ lähestyy kohtaa 2 vasemmalta, funktion arvot eivät lähesty lukua 2. Funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa 2.

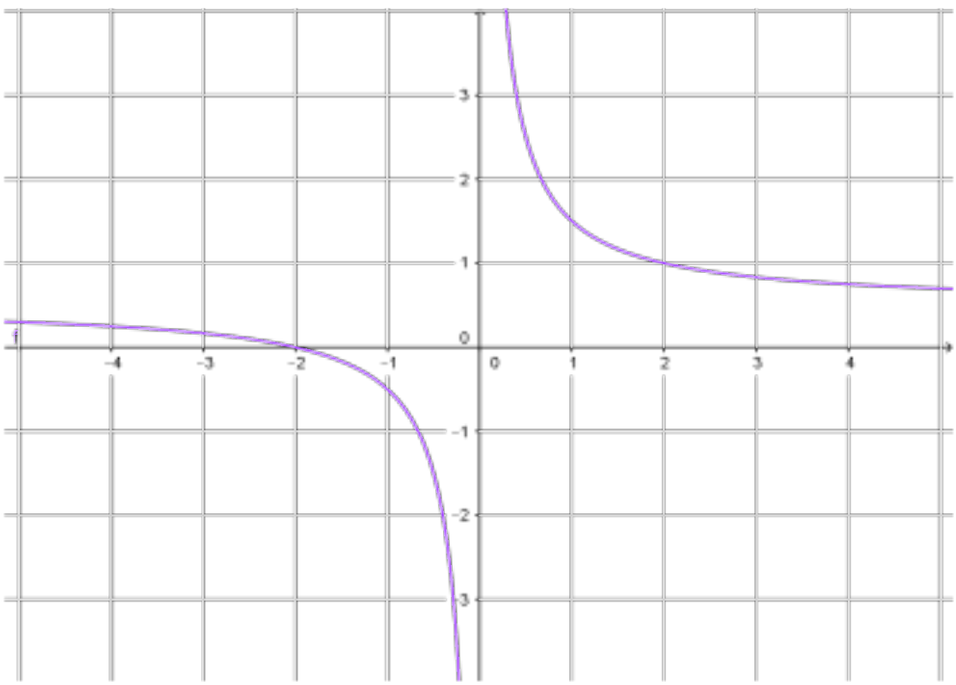
Vastaus

a) $f(-4)=5$, $f(-1)=3$, $f(2)=2$

b) $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$ ei ole olemassa, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=3$,
$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ei ole olemassa

**71**

Piirretään funktion $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 10}{4x^2 - 10x}$ kuvaaja laskimella.



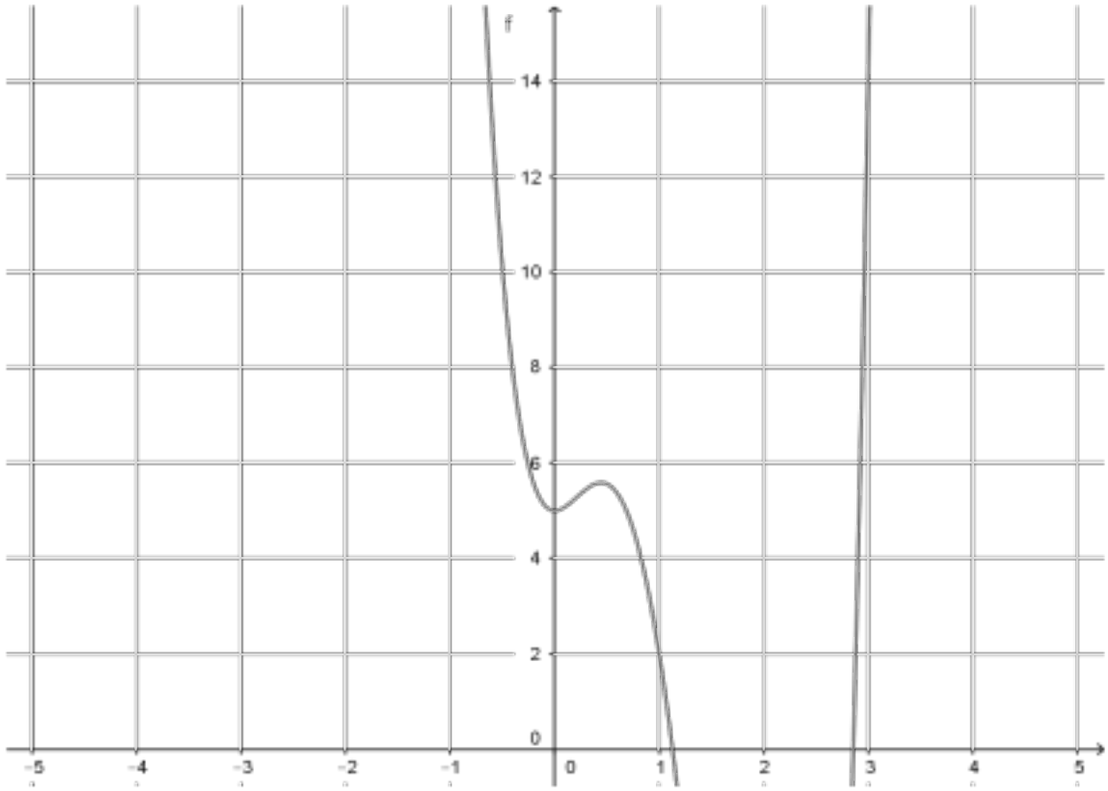

a) Kun $x$ lähestyy kohtaa 0, funktion arvot eivät lähesty molemmilta puolilta mitään tiettyä, samaa reaalilukua. Funktiolla $f$ ei ole raja-arvoa kohdassa 0.

b) Kun $x$ lähestyy kohtaa 2 kummalta puolelta tahansa, funktion arvot lähestyvät lukua 1. Siis $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$.

Vastaus a) ei ole olemassa
b) 1

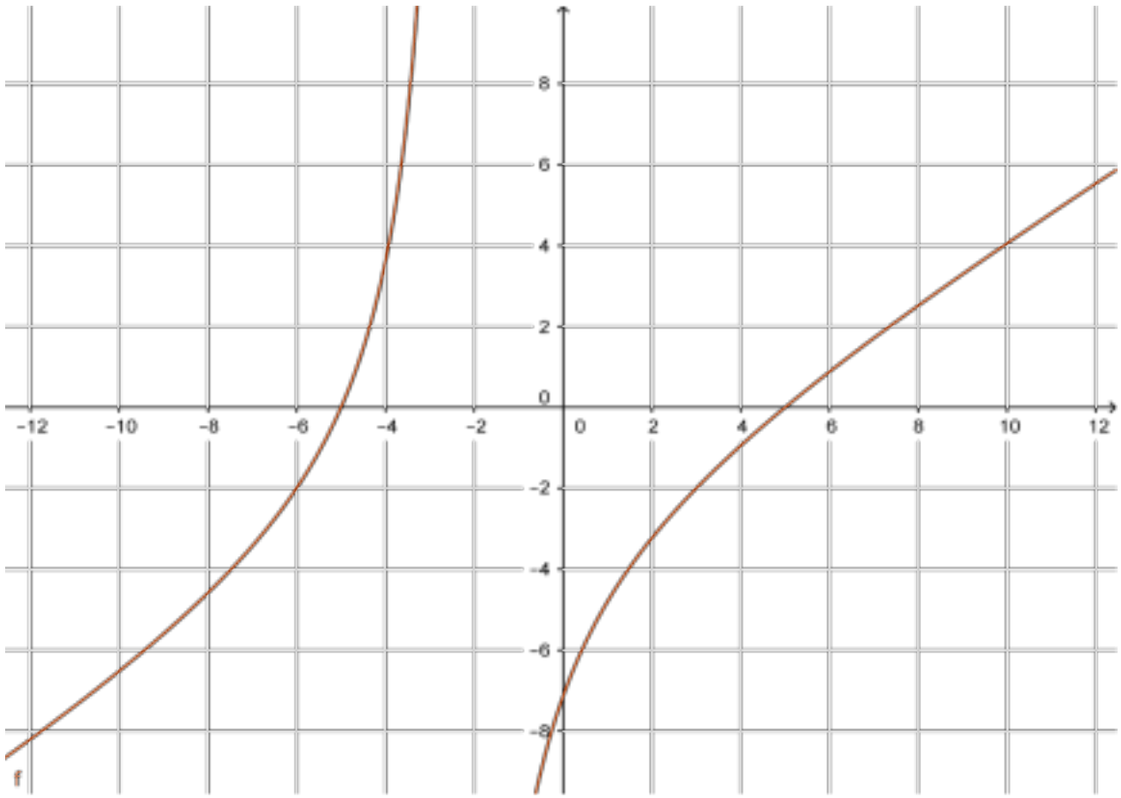
**72**

a) Piirretään funktion $f(x) = 5x^4 - 18x + 10x + 5$ kuvaaja laskimella.




Kun $x$ lähestyy kohtaa 3 kummalta puolelta tahansa, funktion arvot lähestyvät lukua 14. Siis $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 14$.

b) Piirretään funktion $f(x) = \dfrac{2x^2 - 50}{3x + 7}$ kuvaaja laskimella.




Kun x lähestyy kohtaa $-6$ kummalta puolelta tahansa, funktion arvot lähestyvät lukua $-2$. Siis $\lim\limits_{x \to -6} f(x) = -2$.

Vastaus a) 14
b) $-2$

**73**

Funktion $f(x)=\begin{cases}4-x^2, \text{ kun } x<-3\\ 2x+1, \text{ kun } x>-3\end{cases}$ lauseke vaihtuu kohdassa $-3$.

Taulukoidaan funktion arvoja kohdan $-3$ eri puolilla.

| $x$ | $g(x)=4-x^2$ | $x$ | $g(x)=2x+1$ |
|---|---|---|---|
| $-3{,}1$ | $-5{,}61$ | $-2{,}9$ | $-4{,}8$ |
| $-3{,}01$ | $-5{,}601$ | $-2{,}99$ | $-4{,}98$ |
| $-3{,}001$ | $-5{,}006001$ | $-2{,}999$ | $-4{,}998$ |
| $-3{,}0001$ | $-5{,}00060001$ | $-2{,}9999$ | $-4{,}9998$ |

Taulukoitujen arvojen perusteella toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret ja funktiolla $g$ on raja-arvo kohdassa $-3$: $\lim\limits_{x\to-3} f(x)=-5$.

Vastaus $\lim\limits_{x\to-3} f(x)=-5$

**74**

Piirretään funktion $f(x)=\begin{cases}5x^2-2x-1, x\le 1\\ \dfrac{6x+2}{x^2+3}, x>1\end{cases}$ kuvaaja laskimella.

a) Kun $x$ lähestyy kohtaa 1 kummalta puolelta tahansa, funktion arvot lähestyvät lukua 2. Siis $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

b) Kun $x$ lähestyy kohtaa 2 kummalta puolelta tahansa, funktion arvot lähestyvät lukua 2. Siis $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

Vastaus a) 2
b) 2

**75**

Taulukoidaan funktion $f(x)=\begin{cases}2x^2-5, \text{ kun } x\le 2\\ ax-7, \text{ kun } x>2\end{cases}$ arvoja, kun $x$ lähestyy kohtaa 2 vasemmalta puolelta.

| $x$ | $f(x)=2x^2-5$ |
|---|---|
| 1,9 | 2,22 |
| 1,99 | 2,9202 |
| 1,999 | 2,992002 |
| 1,9999 | 2,99920002 |

Kun $x$ lähestyy kohtaa 2 vasemmalta, funktion arvot lähestyvät lukua 3. Jotta funktiolla on kohdassa raja-arvo, on funktion lähestyttävä lukua 3 myös oikealta, kun $x$ lähestyy kohtaa 2.

Taulukoidaan funktion arvoja, kun $x$ lähestyy kohtaa 2 oikealta puolelta.

| $x$ | $f(x)=ax-7$ |
|---|---|
| 2,1 | $2{,}1a-7$ |
| 2,01 | $2{,}01a-7$ |
| 2,001 | $2{,}001a-7$ |
| 2,0001 | $2{,}0001a-7$ |

Funktion arvot näyttävät lähestyvät lukua $2a-7$, jonka on siis oltava yhtä suuri kuin 3.

$$2a-7=3$$
$$a=5$$

Raja-arvo on olemassa ja suuruudeltaan 3, kun $a=5$.

Vastaus $a = 5$

**76**

a) Funktio $f(x) = \dfrac{5x + x^2}{x^2 + 2x - 15}$ ei ole määritelty kohdassa $-5$.

Lasketaan funktion arvoja kohdan $-5$ molemmilta puolilta ja taulukoidaan arvot.

| $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| −5,1 | 0,62962… | −4,9 | 0,62025… |
| −5,01 | 0,62546… | −4,99 | 0,62453… |
| −5,001 | 0,62504… | −4,999 | 0,62495… |
| −5,0001 | 0,62500… | −4,9999 | 0,62499… |

Näyttää siltä, että kun muuttujan arvot lähestyvät lukua $-5$ kummalta puolelta tahansa, niin funktion $f$ arvot lähestyvät lukua 0,625.

b) Funktio $f$ ei ole määritelty kohdassa 3. Lasketaan funktion arvoja kohdan 3 molemmilta puolilta ja taulukoidaan arvot.

| $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 2,9 | −29 | 3,1 | 31 |
| 2,99 | −299 | 3,01 | 301 |
| 2,999 | −2999 | 3,001 | 3001 |
| 2,9999 | −29999 | 3,0001 | 30001 |

Funktion arvot eivät näytä lähestyvän mitään tiettyä, samaa reaalilukua, kun $x$ lähestyy kohtaa 3 eri puolilta. Funktiolla $f$ ei ole raja-arvoa kohdassa 3.

Vastaus a) 0,625
b) ei ole olemassa

## 77

a) Funktio $g(x) = \dfrac{16^x - 16}{x4^x - 4x}$ ei ole määritelty kohdassa 0.

Lasketaan funktion arvoja kohdan 0 molemmilta puolilta ja taulukoidaan arvot.

| $x$ | $g(x)$ | $x$ | $g(x)$ |
|---|---|---|---|
| −0,1 | −48,705… | 0,1 | 51,486… |
| −0,01 | −498,62… | 0,01 | 501,39… |
| −0,001 | −4998,6… | 0,001 | 5001,3… |
| −0,0001 | −49998,6… | 0,0001 | 50001,3… |

Funktion arvot eivät näytä lähestyvän mitään tiettyä, samaa reaalilukua, kun $x$ lähestyy kohtaa 0 eri puolilta. Funktiolla $g$ ei ole raja-arvoa kohdassa 0.

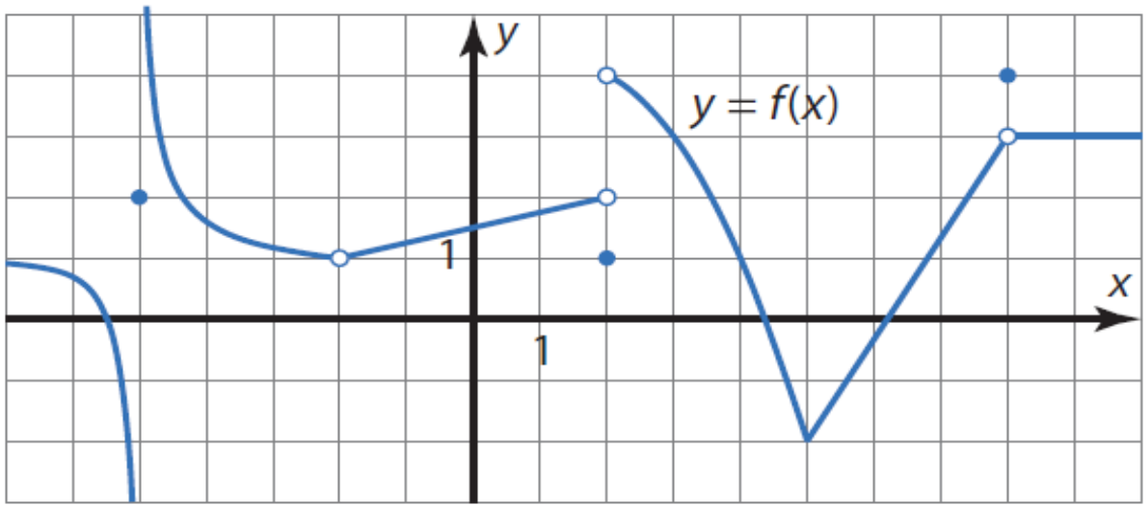
b) Funktio $g$ ei ole määritelty kohdassa 1. Lasketaan funktion arvoja kohdan 1 molemmilta puolilta ja taulukoidaan arvot.

| $x$ | $g(x)$ | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0,9 | 8,31355… | 1,1 | 7,81344… |
| 0,99 | 8,02518… | 1,01 | 7,97607… |
| 0,999 | 8,00246… | 1,001 | 7,99755… |
| 0,9999 | 8,00024… | 1,0001 | 7,99975… |

Näyttää siltä, että kun muuttujan arvot lähestyvät lukua 1 kummalta puolelta tahansa, niin funktion $g$ arvot lähestyvät lukua 8.

Vastaus a) ei ole olemassa
b) 8

**78**




a) Kohdassa $x = -5$ kuvaajan pisteen $y$-koordinaatti on 2, joten $f(-5) = 2$.
Kohdassa $x = -2$ ei ole kuvaajaan kuuluvaa pistettä. Funktiota $f$ ei siis ole määritelty kohdassa $-2$ eikä arvoa $f(-2)$ ole olemassa.
Kohdassa $x = 2$ kuvaajan pisteen $y$-koordinaatti on 1, joten $f(2) = 1$.
Kohdassa $x = 8$ kuvaajan pisteen $y$-koordinaatti on 4, joten $f(8) = 4$.

b) Kun $x$ lähestyy lukua $-5$ eri puolilta, funktion arvot eivät lähesty mitään tiettyä, samaa reaalilukua. Funktiolla $f$ ei ole raja-arvoa kohdassa $-5$.

Kun $x$ lähestyy kohtaa $-2$ kummalta puolelta tahansa, funktion arvot lähestyvät lukua 1. Siis $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 1$.

Kun $x$ lähestyy lukua 2 eri puolilta, funktion arvot eivät lähesty samaa reaalilukua. Funktiolla $f$ ei ole raja-arvoa kohdassa 2.

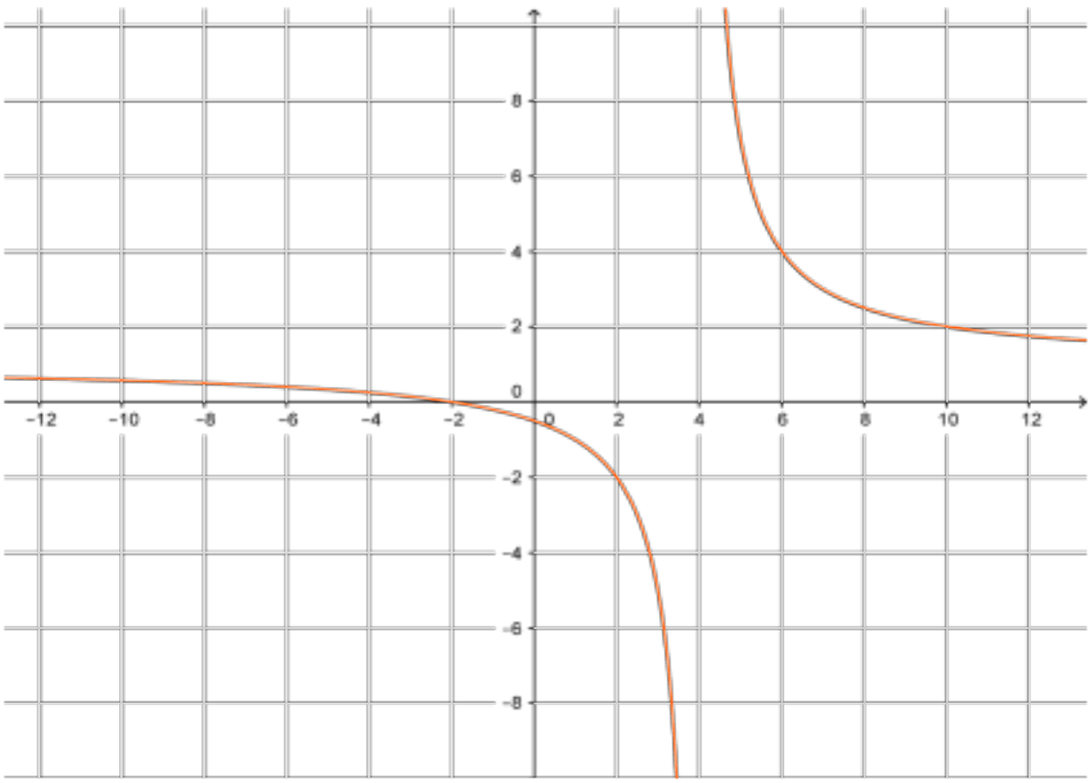
Kun $x$ lähestyy kohtaa 8 kummalta puolelta tahansa, funktion arvot lähestyvät lukua 3. Siis $\lim\limits_{x\to 8} f(x) = 3$.

Vastaus a) $f(-5) = 2$, $f(-2)$ ei ole määritelty, $f(2) = 1$, $f(8) = 4$

b) $\lim\limits_{x\to -5} f(x)$ ei ole olemassa, $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ei ole olemassa, $\lim\limits_{x\to 8} f(x) = 3$

**79**

Piirretään funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 16}$ kuvaaja laskimella.



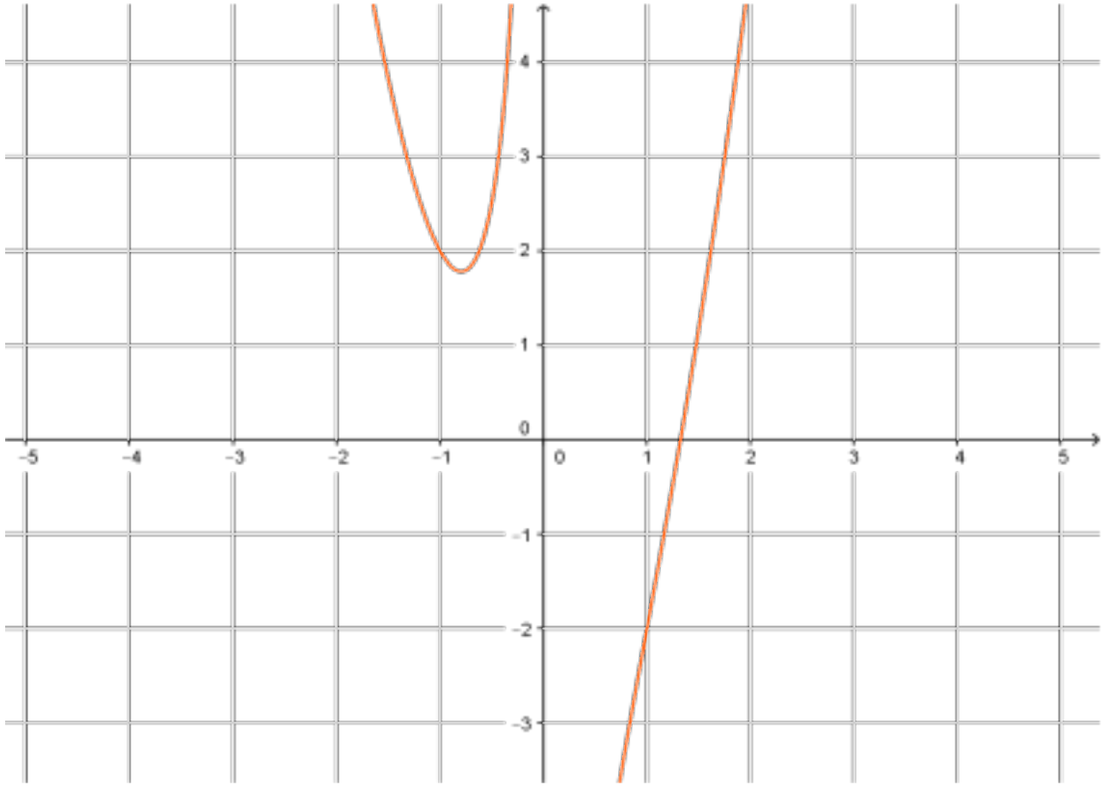

a) Kun $x$ lähestyy kohtaa $-4$ kummalta puolelta tahansa, funktion arvot lähestyvät lukua 0,25.

b) Kun $x$ lähestyy kohtaa 4 eri puolilta, funktion arvot eivät lähesty mitään tiettyä, samaa reaalilukua. Funktiolla $f$ ei ole raja-arvoa kohdassa 0.

Vastaus a) 0,25
b) ei ole olemassa

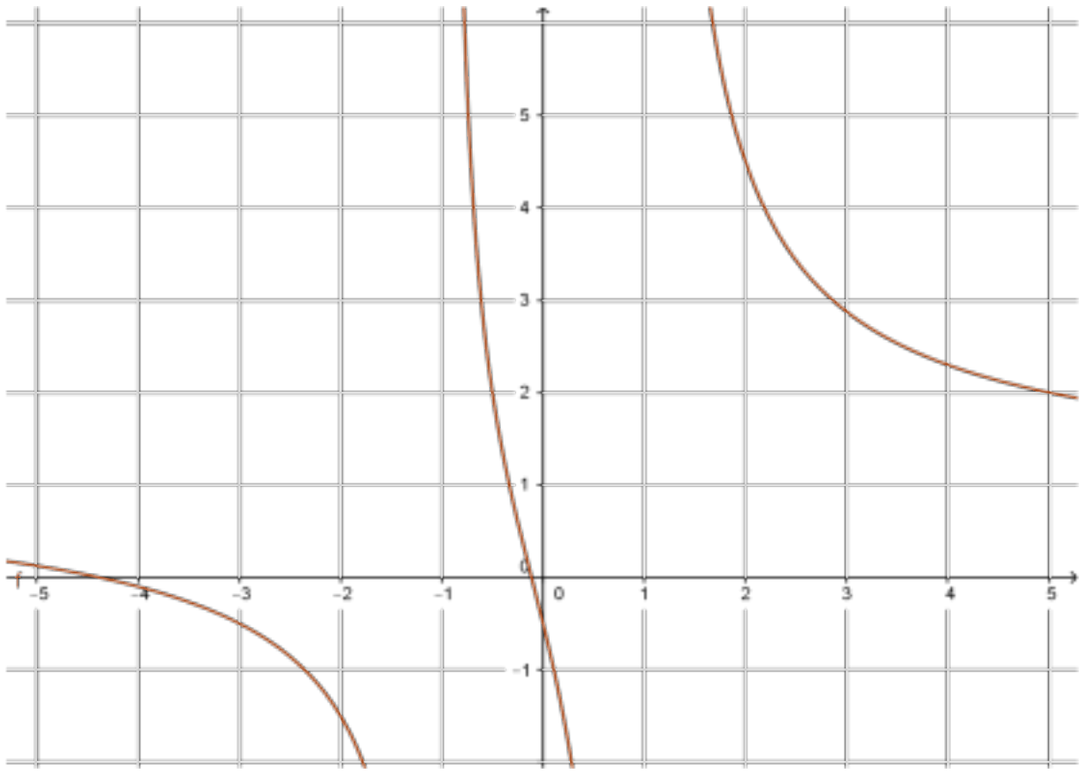
# 80

a) Piirretään funktion $f(x) = 2x^2 - 1 - \frac{x+2}{x}$ kuvaaja laskimella.




Kun $x$ lähestyy kohtaa 1 kummalta puolelta tahansa, funktion arvot lähestyvät lukua $-2$. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -2$

b) Piirretään funktion $f(x) = \frac{2x+1}{x-1} - \frac{2x-1}{2x+2}$ kuvaaja laskimella.




Kun $x$ lähestyy kohtaa 2 kummalta puolelta tahansa, funktion arvot lähestyvät lukua 4,5. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4,5$.

Vastaus a) $-2$
b) 4,5

**81**

a) Lasketaan funktion $f(x)=\begin{cases}3x-2, \text{ kun } x<-1\\ x^3+7x+3, \text{ kun } -1<x\le 2\\ 30-2x^2, \text{ kun } x>2\end{cases}$ arvoja kohdan $-1$ molemmilta puolilta ja taulukoidaan arvot.

| $x$ | $f(x)=3x-2$ | $x$ | $f(x)=x^3+7x+3$ |
|---|---|---|---|
| $-1{,}1$ | $-5{,}3$ | $-0{,}9$ | $-4{,}029$ |
| $-1{,}01$ | $-5{,}03$ | $-0{,}99$ | $-4{,}90029\ldots$ |
| $-1{,}001$ | $-5{,}003$ | $-0{,}999$ | $-4{,}99000\ldots$ |
| $-1{,}0001$ | $-5{,}0003$ | $-0{,}9999$ | $-4{,}99900\ldots$ |

Näyttää siltä, että kun muuttujan arvot lähestyvät lukua $-1$ kummalta puolelta tahansa, niin funktion $f$ arvot lähestyvät lukua $-5$. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=5$.

b) Lasketaan funktion arvoja kohdan 2 molemmilta puolilta ja taulukoidaan arvot.

| $x$ | $f(x)=x^3+7x+3$ | $x$ | $f(x)=30-2x^2$ |
|---|---|---|---|
| 1,9 | 23,159 | 2,1 | 21,18 |
| 1,99 | 24,81059… | 2,01 | 21,9198 |
| 1,999 | 24,98100... | 2,001 | 21,99199… |
| 1,9999 | 24,99810… | 2,0001 | 21,99919… |

Funktion arvot eivät lähesty molemmilta puolilta samaa reaalilukua. Funktiolla $f$ ei ole raja-arvoa kohdassa 2.

Vastaus a) $-5$
b) ei ole

## 82

a) Funktio $f(x) = \dfrac{-x^2 + 3x - 2}{x^2 + 5x - 14}$ ei ole määritelty nimittäjän nollakohdissa.

$x^2 + 5x - 14 = 0$
$x = -7$ tai $x = 2$

b) Lasketaan funktion arvoja kohdan $-7$ molemmilta puolilta ja taulukoidaan arvot.

| $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| $-7{,}1$ | $-81$ | $-6.9$ | 79 |
| $-7{,}01$ | $-801$ | $-6{,}99$ | 799 |
| $-7{,}001$ | $-8001$ | $-6{,}999$ | 7999 |

Funktion arvot eivät lähesty molemmilta puolilta samaa reaalilukua. Funktiolla $f$ ei ole raja-arvoa kohdassa $-7$.

c) Lasketaan funktion arvoja kohdan 2 molemmilta puolilta ja taulukoidaan arvot.

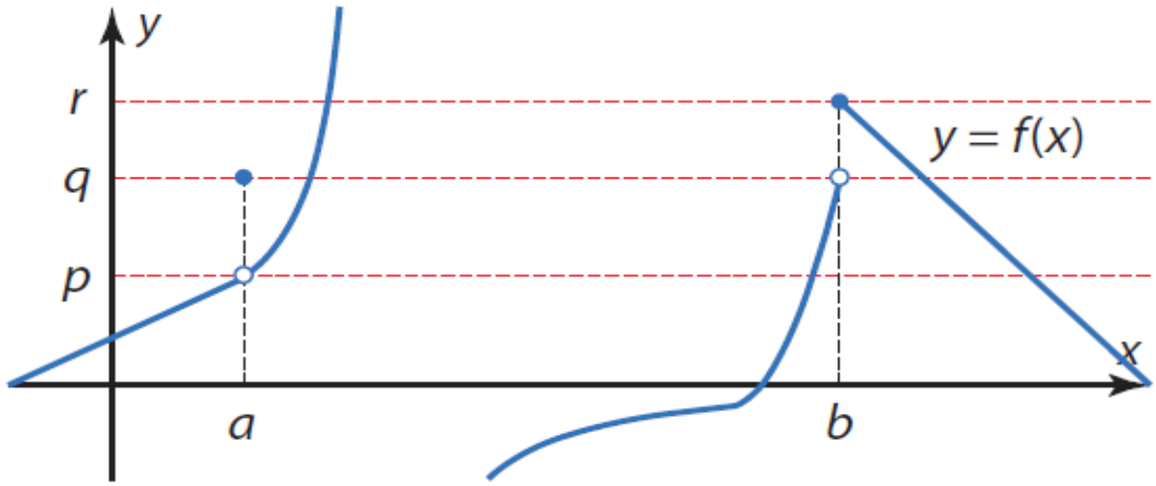
| $x$ | $f(x) = x^3 + 7x + 3$ | $x$ | $f(x) = 30 - 2x^2$ |
|---|---|---|---|
| 1,9 | $-0{,}10112\ldots$ | 2,1 | $-0{,}12087\ldots$ |
| 1,99 | $-0{,}11012\ldots$ | 2,01 | $-0{,}11209\ldots$ |
| 1,999 | $-0{,}11101\ldots$ | 2,001 | $-0{,}11120\ldots$ |
| 1,9999 | $-0{,}11110\ldots$ | 2,0001 | $-0{,}11112\ldots$ |

Näyttää siltä, että kun muuttujan arvot lähestyvät lukua 2 kummalta puolelta tahansa, niin funktion $f$ arvot lähestyvät lukua $-0{,}111\ldots = -\dfrac{1}{9}$

Vastaus a) Kohdissa $x = -7$ ja $x = 2$.

b) kohdassa $-7$ ei raja-arvoa, kohdassa $2$ raja-arvo on $-\frac{1}{9} \approx -0{,}11$

**83**




a) Kohdassa $a$ kuvaajan pisteen $y$-koordinaatti on $q$, eli $f(a) = q$.
Kun $x$ lähestyy kohtaa $a$ kummalta puolelta hyvänsä, funktion arvot lähestyvät lukua $p$. Siis $\lim\limits_{x \to a} f(x) = p$

b) Kohdassa $b$ kuvaajan pisteen $y$-koordinaatti on $r$, eli $f(b) = r$.
Kun $x$ lähestyy kohtaa $b$ eri puolilta, funktion arvot lähestyvät eri lukuja. Tällöin $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ ei ole olemassa.

Vastaus

a) $f(a) = q$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = p$

b) $f(b) = r$, $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ ei ole olemassa

**84**

Taulukoidaan funktion $f(x)=\begin{cases}3x+a, \text{ kun } x\le 1\\ \dfrac{x^2+5}{3x}, \text{ kun } x>1\end{cases}$ arvoja, kun $x$ lähestyy kohtaa $1$ oikealta puolelta.

| $x$ | $f(x)=\dfrac{x^2+5}{3x}$ |
|---|---|
| 1,1 | 1,88181… |
| 1,01 | 1,98683… |
| 1,001 | 1,99866… |
| 1,0001 | 1,99986… |

Kun $x$ lähestyy kohtaa $1$ oikealta, funktion arvot lähestyvät lukua 2. Jotta funktiolla on kohdassa raja-arvo, on funktion lähestyttävä lukua $2$ myös vasemmalta, kun $x$ lähestyy kohtaa $1$.

Taulukoidaan funktion arvoja, kun $x$ lähestyy kohtaa $1$ vasemmalta puolelta.

| $x$ | $f(x)=3x+a$ |
|---|---|
| 1,1 | 3,3 + $a$ |
| 1,01 | 3,03 + $a$ |
| 1,001 | 3,003 + $a$ |
| 1,0001 | 3,0003 + $a$ |

Funktion arvot näyttävät lähestyvän lukua $3 + a$, jonka on siis oltava yhtä suuri kuin $2$.

$$3+a=2$$
$$a=-1$$

Vastaus $a=-1$

**85**

a) Lasketaan funktion $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ arvoja kohdan 0 molemmilta puolilta ja taulukoidaan arvot.

| $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| −0.01 | 2.731999026… | 0,01 | 2.7048138294… |
| −0,001 | 2.7196422164… | 0,001 | 2.7169239322… |
| −0,0001 | 2.7184177550… | 0,0001 | 2.7181459268… |
| −0,00001 | 2.7182954199… | 0,00001 | 2.7182682371… |
| −0,000001 | 2.7182831876… | 0,000001 | 2.7182804693… |

Näyttää siltä, että kun muuttujan arvot lähestyvät lukua 0 kummalta puolelta tahansa, niin funktion $f$ arvot lähestyvät lukua, jonka nelidesimaalinen likiarvo on 2,7183.

b) Lasketaan funktion $f(x) = \frac{2^x - 1}{x}$ arvoja kohdan 0 molemmilta puolilta ja taulukoidaan arvot.

| $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| −0.01 | 0.690750456296 | 0,01 | 0.690750… |
| −0,001 | 0.69290700955 | 0,001 | 0.692907… |
| −0,0001 | 0.6931231584 | 0,0001 | 0.693123… |
| −0,00001 | 0.693144778 | 0,00001 | 0.693144… |

Näyttää siltä, että kun muuttujan arvot lähestyvät lukua 0 kummalta puolelta tahansa, niin funktion $f$ arvot lähestyvät lukua, jonka kolmedesimaalinen likiarvo on 0,693.

Vastaus a) 2,7183
b) 0,693

# 86

a) Funktio $f(x) = -\frac{1}{2}x + 8$. Halutaan löytää luku $\delta$ niin, että kun $0 < |x - 2| < \delta$, on
$|f(x) - 7| < 0{,}01$. Muodostetaan epäyhtälö ja muokataan sitä.

$$|f(x) - 7| < 0{,}01$$
$$\left|-\frac{1}{2}x + 8 - 7\right| < 0{,}01$$
$$\left|-\frac{1}{2}x + 1\right| < 0{,}01$$
$$\left|-\frac{1}{2}(x - 2)\right| < 0{,}01$$
$$\frac{1}{2}|x - 2| < 0{,}01 \quad |\cdot 2$$
$$|x - 2| < 0{,}02$$

Kulkemalla päättelyketju alhaalta ylös nähdään, että kun
$0 < |x - 2| < 0{,}02$, niin $|f(x) - 7| < 0{,}01$. Ehto siis täyttyy, kun etäisyys on alle 0,02.

b) Halutaan löytää luku $\delta$ niin, että kun $0 < |x - 0| < \delta$, on $|f(x) - 8| < 0{,}0001$. Muodostetaan epäyhtälö ja muokataan sitä.

$$
\begin{aligned}
|f(x) - 8| &< 0{,}0001 \\
\left|-\frac{1}{2}x + 8 - 8\right| &< 0{,}0001 \\
\left|-\frac{1}{2}x\right| &< 0{,}0001 \\
\frac{1}{2}|x| &< 0{,}0001 \quad |\cdot 2 \\
|x| &< 0{,}0002 \\
|x - 0| &< 0{,}0002
\end{aligned}
$$

Kulkemalla päättelyketju alhaalta ylös nähdään, että kun $0 < |x - 0| < 0{,}0002$, niin $|f(x) - 8| < 0{,}0001$. Ehto siis täyttyy, kun etäisyys on alle 0,0002.

Vastaus a) $0{,}02$
b) $0{,}0002$

**87**

Funktio $g(x) = 2x + 3$. Oletetaan, että $\varepsilon > 0$ on annettu. Halutaan löytää luku $\delta$ niin, että kun $0 < |x - 0| < \delta$, on $|\, g(x) - 3 \,| < \varepsilon$. Muodostetaan epäyhtälö ja muokataan sitä.

$$|g(x) - 3| < \varepsilon$$
$$|2x + 3 - 3| < \varepsilon$$
$$|2x| < \varepsilon$$
$$2|x| < \varepsilon \qquad |:2$$
$$|x| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$|x - 0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Kulkemalla päättelyketju alhaalta ylös nähdään, että kun $0 < |x - 0| < \frac{\varepsilon}{2}$, niin $|\, g(x) - 3 \,| < \varepsilon$. Voidaan siis valita $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Vastaus $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

# 88

Oletetaan, että $\varepsilon > 0$ on annettu. Etsitään luku $\delta > 0$ niin, että $\left|\frac{1}{2}x + 5 - 7\right| < \varepsilon$, kun $0 < |x - 4| < \delta$. Muodostetaan epäyhtälö ja muokataan sitä.

$$\left|\frac{1}{2}x + 5 - 7\right| < \varepsilon$$
$$\left|\frac{1}{2}x - 2\right| < \varepsilon$$
$$\left|\frac{1}{2}(x - 4)\right| < \varepsilon$$
$$\frac{1}{2}|x - 4| < \varepsilon \quad |\cdot 2$$
$$|x - 4| < 2\varepsilon$$

Kulkemalla päättelyketju alhaalta ylös nähdään, että kun $0 < |x - 4| < 2\varepsilon$, niin $\left|\frac{1}{2}x + 5 - 7\right| < \varepsilon$. Voidaan siis valita $\delta = 2\varepsilon$ ja raja-arvon määritelmän ehdot täyttyvät.

Vastaus $\delta = 2\varepsilon$

# 89

a) Polynomifunktion raja-arvo on sama, kuin funktion arvo.

$$\lim_{x \to -4} (x^2 + 5x + 1) = (-4)^2 + 5 \cdot (-4) + 1 = -3$$

b) Raja-arvo on sama, kuin funktion arvo.

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x^2 - 6x}{3} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} \left(4x^2 - 6x\right)}{\lim\limits_{x \to 0} 3} = \frac{4 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0}{3} = 0$$

Vastaus a) $-3$
b) 0

# 90

a) Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x\to 5}(4x-10) = 4\cdot 5 - 10 = 10$$

$$\lim_{x\to 5}(x^2-5) = 5^2 - 5 = 20$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{4x-10}{x^2-5} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

b) Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x\to 2}(6x-10) = 6\cdot 2 - 10 = 2$$

$$\lim_{x\to 2}(x^2-2x) = 2^2 - 2\cdot 2 = 0$$

Koska nimittäjän raja-arvo on nolla, mutta osoittajan raja-arvo on erisuuri kuin nolla, niin $\lim_{x\to 2}\frac{6x-10}{x^2-2x}$ ei ole olemassa.

Vastaus a) $\frac{1}{2}$

b) ei ole olemassa

# 91

a) Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x\to -6}(x+6) = -6+6 = 0$$
$$\lim_{x\to -6}(x+2) = -6+2 = -4$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x+6}{x+2} = \frac{0}{-4} = 0$$

b) Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x\to 1}(3x) = 3\cdot 1 = 3$$
$$\lim_{x\to 1}(x(1-x)) = 1\cdot(1-1) = 0$$

Koska nimittäjän raja-arvo on nolla, mutta osoittajan raja-arvo on erisuuri kuin nolla, niin $\lim_{x\to 1}\frac{3x}{x(1-x)}$ ei ole olemassa.

Vastaus a) 0
b) ei ole olemassa

# 92

a) Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x\to -1}(x^2+x) = (-1)^2 + (-1) = 0$$
$$\lim_{x\to -1}(3x+3) = 3\cdot(-1) + 3 = 0$$

Lauseketta voidaan sieventää.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{3x+3} = \lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{3(x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{x}{3} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

b) Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x\to 0}(2x^2 - 6x) = 2\cdot 0^2 - 6\cdot 0 = 0$$
$$\lim_{x\to 0}(x^2(x-3)) = 0^2(0-3) = 0$$

Lauseketta voidaan sieventää.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-6x}{x^2(x-3)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x(x-3)}{x\cdot x(x-3)} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{x} = \frac{2}{0}$$ Ei määritelty.

Koska sievennetyn lausekkeen nimittäjän raja-arvo on nolla, mutta osoittajan raja-arvo on erisuuri kuin nolla, niin

$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-6x}{x^2(x-3)}$ ei ole olemassa.

Vastaus a) $-\frac{1}{3}$

b) ei ole olemassa

# 93

a) Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x\to 6}(x^2-6x)=6^2-6\cdot 6=0$$
$$\lim_{x\to 6}(6-x)=6-6=0$$

Lauseketta voidaan sieventää.

$$\lim_{x\to 6}\frac{x^2-6x}{6-x}=\lim_{x\to 6}\frac{-x(-x+6)}{-x+6}=\lim_{x\to 6}\frac{-x}{1}=\frac{-6}{1}=-6$$

b) Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x\to 4}(x^2-16)=4^2-16=0$$
$$\lim_{x\to 4}(x-4)=4-4=0$$

Lauseketta voidaan sieventää.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x+4)(x-4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x+4)}{1}=4+4=8$$

Vastaus a) $-6$
b) 8

# 94

a) Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x\to -1}(x^2+2x+1) = (-1)^2 + 2\cdot(-1) + 1 = 0$$
$$\lim_{x\to -1}(x^2-1) = (-1)^2 - 1 = 0$$

Lauseketta voidaan sieventää.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$= \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)}{(x-1)} = \frac{-1+1}{-1-1} = \frac{0}{-2} = 0$$

b) Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x\to 1}(x^4-1) = 1^4 - 1 = 0$$
$$\lim_{x\to 1}(2-2x) = 2 - 2\cdot 1 = 0$$

Lauseketta voidaan sieventää.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{2-2x} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{-2(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)(x^2+1)}{-2(x-1)}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x^2+1)}{-2} = \frac{(1+1)(1^2+1)}{-2} = -2$$

Vastaus a) 0
b) $-2$

**95**

Funktion $f(x)=\begin{cases} x^3-10x, \text{ kun } x<3 \\ -5x+12, \text{ kun } x>3 \end{cases}$ lauseke vaihtuu kohdassa 3.

Määritetään vasemmanpuoleinen raja-arvo.

$$\lim_{x\to 3-}\left(x^3-10x\right)=3^3-10\cdot 3=-3$$

Määritetään oikeanpuoleinen raja-arvo.

$$\lim_{x\to 3+}(-5x+12)=-5\cdot 3+12=-3$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret, on funktiolla raja-arvo $\lim_{x\to 3} f(x)=-3$.

Vastaus $-3$

**96**

a) Funktion $f(x)=\begin{cases}4x+13, \text{ kun } x<-3\\ x^2+2x-2, \text{ kun } -3<x<2\\ 5x+1, \text{ kun } x\geq 2\end{cases}$ lauseke vaihtuu kohdassa $-3$.

Määritetään vasemmanpuoleinen raja-arvo.

$$\lim_{x\to -3-}\left(4x+13\right)=4\cdot(-3)+13=1$$

Määritetään oikeanpuoleinen raja-arvo.

$$\lim_{x\to -3+}(x^2+2x-2)=(-3)^2+2\cdot(-3)-2=1$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret, on funktiolla raja-arvo $\lim\limits_{x\to -3} g(x)=1$.

b) Funktion lauseke vaihtuu kohdassa $2$.

Määritetään vasemmanpuoleinen raja-arvo.

$$\lim_{x\to 2-}(x^2+2x-2)=2^2+2\cdot 2-2=6$$

Määritetään oikeanpuoleinen raja-arvo.

$$\lim_{x\to 2+}(5x+1)=5\cdot 2+1=11$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat eri suuret, funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa $2$.

Vastaus a) 1
b) ei ole olemassa

**97**

a) Sievennetään lauseke.

$$\frac{3x^2-6x}{5x}\cdot\frac{10}{x^2-4}=\frac{3x(x-2)\cdot 10}{5x(x^2-4)}=\frac{6x(x-2)}{x(x-2)(x+2)}=\frac{6}{x+2}.$$

Täten

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x^2-6x}{5x}\cdot\frac{10}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{6}{x+2}=\frac{6}{2+2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

b) Sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned}\frac{4}{1-x^2}-^{1-x)}\frac{2}{1+x}&=\frac{4}{(1-x)(1+x)}-\frac{2(1-x)}{(1-x)(1+x)}\\&=\frac{4-2(1-x)}{(1-x)(1+x)}=\frac{4-2(1-x)}{(1-x)(1+x)}=\frac{4-2+2x}{(1-x)(1+x)}\\&=\frac{2+2x}{(1-x)(1+x)}=\frac{2(1+x)}{(1-x)(1+x)}\\&=\frac{2}{1-x}\end{aligned}$$

Täten

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{4}{1-x^2}-\frac{2}{1+x}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{2}{1-x}=\frac{2}{1-(-1)}=1.$$

Vastaus a) $\frac{3}{2}$

b) 1

# 98

a) Sievennetään lauseke.

$$\frac{(x-2)^2-4}{x} = \frac{x^2-4x+4-4}{x} = \frac{x(x-4)}{x} = x-4$$

Täten

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x-2)^2-4}{x} = \lim_{x\to 0}(x-4) = 0-4 = -4$$

b) Sievennetään lauseke.

$$\frac{(1+h)^3-1}{2h} = \frac{h^3+3h^2+3h+1-1}{2h} = \frac{h(h^2+3h+3)}{2h} = \frac{h^2+3h+3}{2}$$

Täten

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3-1}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+3h+3}{2} = \frac{0^2+3\cdot 0+3}{2} = \frac{3}{2}$$

Vastaus a) $-4$

b) $\frac{3}{2}$

**99**

a) Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x\to -8}(x^2-32)=(-8)^2-32=32$$
$$\lim_{x\to -8}(16+x)=16+(-8)=8$$

$$\lim_{x\to -8}\frac{x^2-32}{16+x}=\frac{32}{8}=4$$

b) Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x\to 3}(7x-21)=7\cdot 3-21=0$$
$$\lim_{x\to 3}(4x^2-12x)=4\cdot 3^2-12\cdot 3=0$$

Lauseketta voidaan sieventää.

$$\lim_{x\to 3}\frac{7x-21}{4x^2-12x}=\lim_{x\to 3}\frac{7(x-3)}{4x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{7}{4x}=\frac{7}{4\cdot 3}=\frac{7}{12}$$

Vastaus a) 4

b) $\frac{7}{12}$

# 100

a) Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x\to 2}(5x-10) = 5\cdot 2 - 10 = 0$$
$$\lim_{x\to 2}(x^3 - 2x^2) = 2^3 - 2\cdot 2^2 = 0$$

Lauseketta voidaan sieventää.

$$\lim_{x\to 2}\frac{5x-10}{x^3-2x^2} = \lim_{x\to 2}\frac{5(x-2)}{x^2(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{5}{x^2} = \frac{5}{2^2} = \frac{5}{4}$$

b) Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x\to 3}(9+3x) = 9 + 3\cdot 3 = 18$$
$$\lim_{x\to 3}(x^2 - 9) = 3^2 - 9 = 0$$

Koska nimittäjän raja-arvo on nolla, mutta osoittajan raja-arvo on erisuuri kuin nolla, niin $\lim_{x\to 3}\frac{9+3x}{x^2-9}$ ei ole olemassa.

Vastaus a) $\frac{5}{4}$

b) ei ole olemassa

# 101

a) Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}(16x^2-4)=16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-4=0$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}(2x-1)=2\cdot\frac{1}{2}-1=0$$

Lauseketta voidaan sieventää.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{16x^2-4}{2x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(4x-2)(4x+2)}{2x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2(2x-1)(4x+2)}{2x-1}$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{2}}(2(4x+2))=2(4\cdot\frac{1}{2}+2)=8$$

b) Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x\to-\frac{3}{2}}(4x^2+12x+9)=4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2+12\cdot-\frac{3}{2}+9=0$$

$$\lim_{x\to-\frac{3}{2}}(4x^2-9)=4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2-9=0$$

Lauseketta voidaan sieventää.

$$\lim_{x\to-\frac{3}{2}}\frac{4x^2+12x+9}{4x^2-9}=\lim_{x\to-\frac{3}{2}}\frac{(2x+3)(2x+3)}{(2x-3)(2x+3)}=\lim_{x\to-\frac{3}{2}}\frac{2x+3}{2x-3}$$

$$=\frac{2\cdot(-\frac{3}{2})+3}{2\cdot(-\frac{3}{2})-3}=\frac{0}{-6}=0$$

Vastaus a) 8
b) 0

# 102

Funktion $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-10}{4x-10}, \text{ kun } x\le 2\\ x^2-3x+1, \text{ kun } x>2\end{cases}$ lauseke vaihtuu kohdassa 2.

Määritetään vasemmanpuoleinen raja-arvo.

$$\lim_{x\to 2-}\frac{3x^2-10}{4x-10}=\frac{3\cdot 2^2-10}{4\cdot 2-10}=\frac{2}{-2}=-1$$

Määritetään oikeanpuoleinen raja-arvo.

$$\lim_{x\to 2+}(x^2-3x+1)=2^2-3\cdot 2+1=-1$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret, on funktiolla raja-arvo $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-1$.

Vastaus $-1$

**103**

Funktion $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+4x}{x^2-16}, \text{ kun } x<-4\\ 0, \text{ kun } x=4\\ \dfrac{1}{2}x^2+3x+2, \text{ kun } x>4\end{cases}$ lauseke vaihtuu kohdassa $-4$.

Määritetään vasemmanpuoleinen raja-arvo.

$$\lim_{x\to -4-}\frac{x^3+4x^2}{x^2-16}=\lim_{x\to -4-}\frac{x^2(x+4)}{(x+4)(x-4)}=\lim_{x\to -4-}\frac{x^2}{x-4}=\frac{(-4)^2}{-4-4}=-2$$

Määritetään oikeanpuoleinen raja-arvo.

$$\lim_{x\to -4+}\left(\frac{1}{2}x^2+3x+2\right)=\frac{1}{2}\cdot(-4)^2+3\cdot(-4)+2=-2$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret, on funktiolla raja-arvo $\lim\limits_{x\to -4} g(x)=-2$.

Vastaus $-2$

# 104

a) Sievennetään lauseke.

$$\frac{2}{x}\left( \overset{2)}{\phantom{x}} \frac{5}{x-2} + \overset{x-2)}{\phantom{x}} \frac{5}{2} \right) = \frac{2}{x}\left( \frac{10}{2(x-2)} + \frac{5(x-2)}{2(x-2)} \right) = \frac{2}{x}\left( \frac{10+5x-10}{2(x-2)} \right)$$

$$= \frac{2}{x}\left( \frac{5x}{2(x-2)} \right) = \frac{10x}{2x(x-2)} = \frac{5}{x-2}$$

Täten

$$\lim_{x\to 0}\left( \frac{2}{x}\left( \frac{5}{x-2} + \frac{5}{2} \right) \right) = \lim_{x\to 0} \frac{5}{x-2} = \frac{5}{0-2} = -\frac{5}{2}$$

b) Sievennetään lauseke.

$$\left( \frac{8}{x} + 4 \right) : (x+2) = \frac{8+4x}{x} : \frac{x+2}{1} = \frac{8+4x}{x} \cdot \frac{1}{x+2} = \frac{8+4x}{x(x+2)}$$

$$= \frac{4(x+2)}{x(x+2)} = \frac{4}{x}$$

Täten

$$\lim_{x\to -2}\left( \left( \frac{8}{x} + 4 \right) : (x+2) \right) = \lim_{x\to -2} \frac{4}{x} = \frac{4}{-2} = -2$$

Vastaus a) $-\frac{5}{2}$

b) $-2$

# 105

a) Sievennetään lauseke.

$$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}\right):(x-2)=\left(\frac{4}{4x^2}-\frac{x^2}{4x^2}\right):\frac{x-2}{1}=\frac{4-x^2}{4x^2}\cdot\frac{1}{x-2}$$
$$=\frac{4-x^2}{4x^2}\cdot\frac{1}{x-2}=\frac{-(x-2)(x+2)}{4x^2(x-2)}=\frac{-x-2}{4x^2}$$

Täten

$$\lim_{x\to 2}\left(\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}\right):(x-2)\right)=\lim_{x\to 2}\frac{-x-2}{4x^2}=\frac{-2-2}{4\cdot 2^2}=\frac{-4}{16}=-\frac{1}{4}$$

b) Sievennetään lauseke.

$$\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x^3}\right):(x+1)=\left(\frac{2x^2}{x^3}-\frac{2}{x^3}\right):\frac{x+1}{1}=\frac{2x^2-2}{x^3}\cdot\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{2x^2-2}{x^3(x+1)}=\frac{2(x^2-1)}{x^3(x+1)}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x^3(x+1)}=\frac{2(x-1)}{x^3}$$

Täten

$$\lim_{x\to -1}\left(\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x^3}\right):(x+1)\right)=\lim_{x\to -1}\frac{2(x-1)}{x^3}=\frac{2(-1-1)}{(-1)^3}=\frac{-4}{-1}=4$$

Vastaus a) $-\frac{1}{4}$

b) 4

# 106

a) Lasketaan funktion $f(x)=\dfrac{x^2-100}{|x+10|}$ osoittajan ja nimittäjän raja-arvot kohdassa 0.

$$\lim_{x\to 0}(x^2-100)=0^2-100=-100$$

$$\lim_{x\to 0}|x+10|=\left|\lim_{x\to 0}(x+10)\right|=|0+10|=10$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-100}{|x+10|}=\frac{-100}{10}=-10$$

b) Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot kohdassa $-10$.

$$\lim_{x\to -10}(x^2-100)=(-10)^2-100=0$$

$$\lim_{x\to -10}|x+10|=\left|\lim_{x\to -10}(x+10)\right|=|-10+10|=0$$

Osoittajan ja nimittäjän raja-arvo on 0. Lauseketta voidaan sieventää.

Selvitetään, milloin lausekkeen $x+10$ arvot ovat epänegatiivisia.

$$x+10\geq 0$$

$$x\geq -10$$

Saadaan

$$|x+10| = \begin{cases} x+10, & x \geq -10 \\ -x-10, & x < -10 \end{cases}$$

Koska lauseke vaihtuu kohdassa $-10$, määritetään toispuoliset raja-arvot.

$$\lim_{x \to -10-} \frac{x^2-100}{|x+10|} = \lim_{x \to -10-} \frac{x^2-100}{-x-10} = \lim_{x \to -10-} \frac{(x+10)(x-10)}{-(x+10)}$$

$$= \lim_{x \to -10-} \frac{x-10}{-1} = \frac{-10-10}{-1} = 20$$

$$\lim_{x \to -10+} \frac{x^2-100}{|x+10|} = \lim_{x \to -10+} \frac{x^2-100}{x+10} = \lim_{x \to -10+} \frac{(x+10)(x-10)}{x+10}$$

$$= \lim_{x \to -10+} \frac{x-10}{1} = \frac{-10-10}{1} = -20$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat eri suuret, funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa $-10$.

Vastaus a) $-10$
b) ei ole olemassa

# 107

Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x\to 2}(x-|3-2x|)=\lim_{x\to 2}x-\lim_{x\to 2}|3-2x|=\lim_{x\to 2}x-\left|\lim_{x\to 2}(3-2x)\right|$$
$$=2-|3-2\cdot 2|=2-|-1|=2-1=1$$

$$\lim_{x\to 2}(5+|2-x|)=\lim_{x\to 2}5+\lim_{x\to 2}|2-x|=\lim_{x\to 2}5+\left|\lim_{x\to 2}(2-x)\right|$$
$$=5+|2-2|=5+|0|=5$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-|3-2x|}{5+|2-x|}=\frac{1}{5}$$

Vastaus $\frac{1}{5}$

# 108

Sijoitetaan $f(x) = x^2$.

$$\frac{(f(x))^2 - (f(2))^2}{x-2} = \frac{(x^2)^2 - (2^2)^2}{x-2} = \frac{x^4 - 16}{x-2}$$

Sievennetään lauseke.

$$\frac{x^4 - 16}{x-2} = \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)(x^2+4)}{x-2} = (x+2)(x^2+4)$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(f(x))^2 - (f(2))^2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \Big((x+2)(x^2+4)\Big) = (2+2)(2^2+4) = 32$$

Vastaus 32

**109**

Funktion $f(x)=\begin{cases} ax^2-10, \text{ kun } x<5 \\ 7x-5a, \text{ kun } x\geq 5 \end{cases}$ lauseke vaihtuu kohdassa 5.

Määritetään vasemmanpuoleinen raja-arvo.

$$\lim_{x\to 5-}(ax^2-10)=a\cdot 5^2-10=25a-10$$

Määritetään oikeanpuoleinen raja-arvo.

$$\lim_{x\to 5+}(7x-5a)=7\cdot 5-5a=35-5a$$

Jotta funktiolla on raja-arvo kohdassa 5, pitää toispuolisten raja-arvojen olla samat.

$$\begin{aligned} 25a-10&=35-5a \\ 30a&=45 \\ a&=\frac{45}{30}=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Vastaus $a=\frac{3}{2}$

# 110

a) Jotta funktiolla on raja-arvo kohdassa $-2$, on lauseketta pystyttävä supistamaan. Koska nimittäjän $x+2$ nollakohta on $-2$, on myös osoittajalla oltava nollakohta $-2$, jotta supistaminen on mahdollista.
Ratkaistaan $a$.

$$\begin{aligned} 2\cdot(-2)^2+(-2)+a &= 0 \\ 8-2+a &= 0 \\ a &= -6 \end{aligned}$$

Tekijöihin jakoa varten ratkaistaan osoittajan toinen nollakohta laskimella.

$$2x^2+x-6=0$$
$$x=\begin{cases}-2\\ \frac{3}{2}\end{cases}$$

Lasketaan raja-arvo, kun $a=-6$

$$\lim_{x\to-2}\frac{2x^2+x-6}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{2(x+2)(x-\frac{3}{2})}{x+2}=\lim_{x\to-2}2(x-\frac{3}{2})$$
$$=2(-2-\frac{3}{2})=-7$$

b) Jotta funktiolla on raja-arvo kohdassa $a$, on lauseketta pystyttävä supistamaan. Koska nimittäjän $x - a$ nollakohta on $a$, on myös osoittajalla oltava nollakohta $a$, jotta supistaminen on mahdollista.
Ratkaistaan $a$.

$$\begin{aligned} a \cdot a^2 - 8 &= 0 \\ a^3 &= 8 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Lasketaan raja-arvo, kun $a = 2$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{ax^2 - 8}{x - a} &= \lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x^2 - 4)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{2(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} 2(x + 2) \\ &= 2(2 + 2) = 8 \end{aligned}$$

Vastaus a) $a = -6$, raja-arvo on $-7$
b) $a = 2$, raja-arvo on 8

# 111

a) Kuvan perusteella $f(-1) = 3$ ja $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ ei ole olemassa.
Funktio ei ole jatkuva kohdassa $-1$.

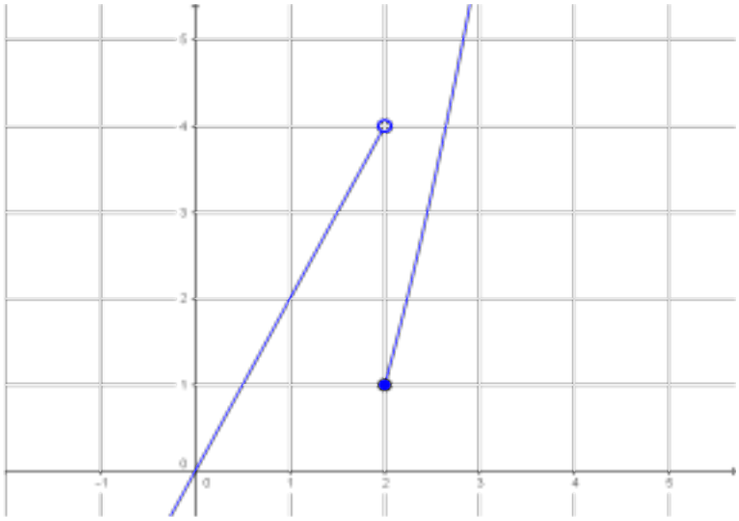
b) Kuvan perusteella $f(0) = 2$ ja $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2$
Funktio on jatkuva kohdassa $0$.

c) Kuvan perusteella $f(3) = -2$ ja $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -1$
Funktio ei ole jatkuva kohdassa $3$.

**Vastaus**
a) ei
b) on
c) ei

# 112

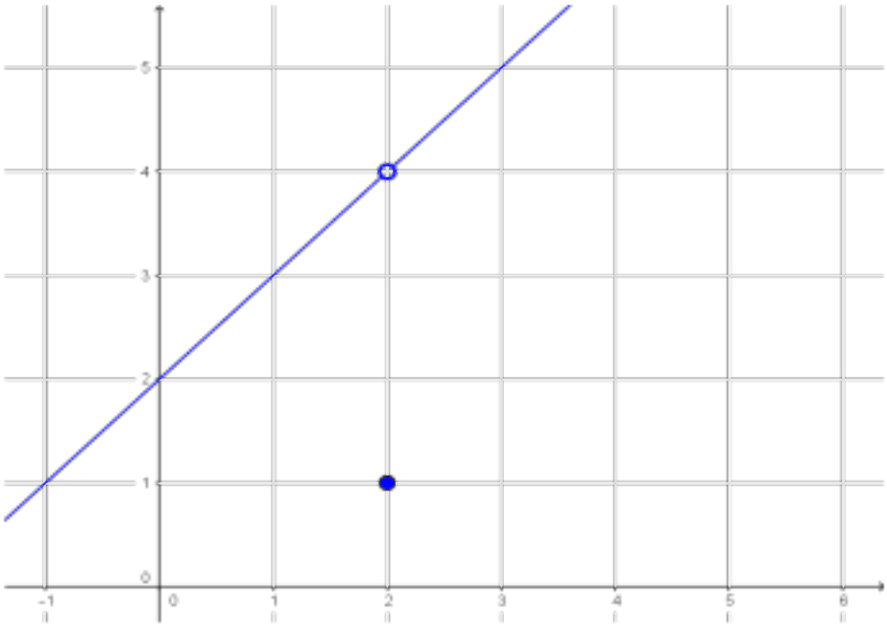
a) Esimerkiksi



Koska $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = 4$ ja $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = 1$,

niin $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ ei ole olemassa.

b) Esimerkiksi



$\lim_{x \to 2} f(x) = 4, \quad f(2) = 1$

Koska funktion raja-arvo kohdassa $2$ ei ole yhtä suuri kuin funktion arvo tässä kohdassa, funktio ei ole jatkuva kohdassa 2.

# 113

a) Väärin.
Lisäksi pitää olla $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

b) Oikein.
Funktio voi olla jatkuva vain kohdassa, jossa se on määritelty.

c) Oikein.
Funktio on jatkuva kohdassa 2, jos tässä kohdassa funktion arvo ja raja-arvo ovat yhtä suuret.

d) Väärin.
Funktion pitää lisäksi olla määritelty ja pitää olla $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x)$.

# 114

a) Koska funktion $f(x)=\begin{cases}2x-6, & \text{kun } x\le 3\\ -3, & \text{kun } x\le 3\end{cases}$ lauseke vaihtuu kohdassa 3, pitää laskea toispuoliset raja-arvot.

$$\lim_{x\to 3-}(2x-6)=2\cdot 3-6=0$$

$$\lim_{x\to 3+}(-3)=-3$$

Funktion toispuoliset raja-arvot ovat erisuuret, joten funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa 3.
Funktio $f$ ei siis ole jatkuva kohdassa 3.

b) Jotta funktio $g(x)=\begin{cases}\dfrac{5x-15}{x-3}, & \text{kun } x\ne 3\\ 5, & \text{kun } x=3\end{cases}$ olisi jatkuva kohdassa 3, niin funktion arvon ja raja-arvon kohdassa 3 on oltava samat.

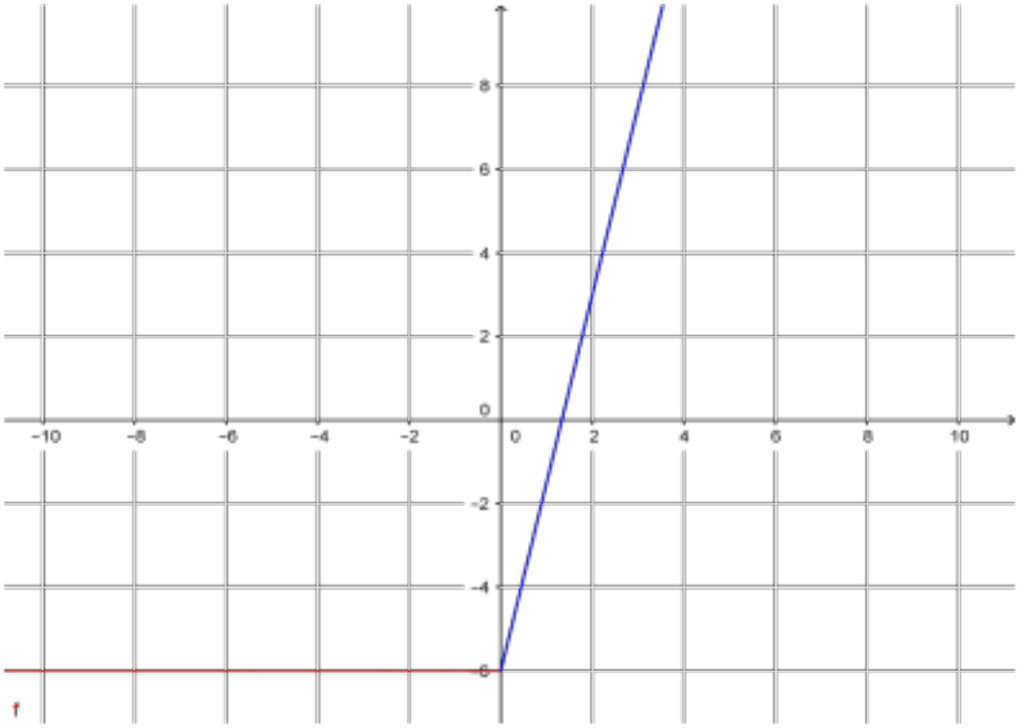
Arvo kohdassa 3 on $g(3)=5$.
Lasketaan funktion raja-arvo kohdassa 3.

$$\lim_{x\to 3}\frac{5x-15}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{5(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{5}{1}=5$$

Koska $g(3)=\lim\limits_{x\to 3}g(x)$, funktio on jatkuva.

**Vastaus**
a) ei b) on

**115**




a) Funktio $f(x)=\begin{cases}-6, & \text{kun } x \le 0 \\ \dfrac{9x^2-12x}{2x}, & \text{kun } x<0\end{cases}$

näyttää kuvaajan perusteella jatkuvalta kohdissa $-3$ ja $0$.

b) **Kohta –3:**

$f(-3) = -6$ ja $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} (-6) = -6$,
joten funktio on jatkuva kohdassa $-3$.

**Kohta 0:**

$f(0) = -6$

Funktion $f$ lauseke vaihtuu kohdassa 0, joten on laskettava toispuoleiset raja-arvot.

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (-6) = -6$$

Lasketaan ensin osoittajan ja nimittäjän oikeanpuoleiset raja-arvot kohdassa 0.

$$\lim_{x \to 0+} (9x^2 - 12x) = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to 0+} 2x = 0$$

Osoittajan ja nimittäjän raja-arvot ovat molemmat 0, joten oikeanpuoleinen raja-arvo saattaa olla olemassa.
Sievennetään lauseketta.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0+} f(x) &= \lim_{x \to 0+} \frac{9x^2 - 12x}{2x} = \lim_{x \to 0+} \frac{x(9x-12)}{2x} \\ &= \lim_{x \to 0+} \frac{9x - 12}{2} = \frac{9 \cdot 0 - 12}{2} \\ &= -6 = \lim_{x \to 0-} f(x) \end{aligned}$$

Siis $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$. Funktio $f$ on jatkuva kohdassa 0.

# 116

$$f(x)=\begin{cases}2x+3, & \text{kun } x<-2\\ -1, & \text{kun } x=-2\\ \frac{1}{2}x, & \text{kun } x>-2\end{cases}$$

$f(-2)=-1$

Tutkitaan, ovatko toispuoliset raja-arvot samat kuin funktion arvo kohdassa $-2$.

$$\lim_{x\to -2-} f(x)=\lim_{x\to -2-}(2x+3)=2\cdot(-2)+3=-1$$

$$\lim_{x\to -2+} f(x)=\lim_{x\to -2+}(\frac{1}{2}x)=\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1$$

Siis $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-1$ joten $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(-2)$.

Funktion arvo ja raja-arvo ovat samat kohdassa $-2$, joten funktio $f$ on jatkuva kohdassa $-2$.

**Vastaus**

on

# 117

a) $\lim\limits_{x \to -6} f(x) = -2$

Jotta funktio $f$ olisi jatkuva kohdassa $-6$, on oltava $f(-6) = -2$.

b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$

Jotta funktio olisi jatkuva kohdassa 3, on oltava $f(3) = -4$.

**Vastaus**

a) $f(-6) = -2$

b) $f(3) = -4$

# 118

Funktio on määritelty lausekkeella $f(x) = \dfrac{3x^2 + 12x}{x + 4}$, kun $x \neq -4$.

Funktio $f$ on jatkuva kohdassa $-4$, jos määritellään funktion arvo kohdassa $-4$ niin, että $f(-4) = \lim\limits_{x \to -4} f(x)$.

Määritetään funktion $f$ raja-arvo kohdassa $-4$.

Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x \to -4} (3x^2 + 12x) = 3 \cdot (-4)^2 + 12 \cdot (-4) = 0$$

$$\lim_{x \to -4} (x + 4) = -4 + 4 = 0$$

Osoittajan ja nimittäjän raja-arvo on $0$, sievennetään lauseketta.

$$\lim_{x \to -4} \frac{3x^2 + 12x}{x + 4} = \lim_{x \to -4} \frac{3x(x + 4)}{x + 4} = \lim_{x \to -4} 3x = 3 \cdot (-4) = -12$$

Funktio on jatkuva kohdassa $-4$, kun määritetään $f(-4) = -12$.

**Vastaus**

$f(-4) = -12$

# 119

Funktio $f(x)=\begin{cases}3x^2-4x+b, & \text{kun } x\le 1\\ 2x-1, & \text{kun } x>1\end{cases}$ on jatkuva kohdassa 1,

jos $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$.

Määritetään toispuoliset raja-arvot ja funktion arvo kohdassa 1.

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(3x^2-4x+b)=3\cdot 1^2-4\cdot 1+b=-1+b$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(2x-1)=2\cdot 1-1=1$$

$$f(1)=3\cdot 1^2-4\cdot 1+b=-1+b$$

Toispuolisten raja-arvojen ja funktion arvon on oltava yhtä suuret.
Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$-1+b=1$$
$$b=2$$

**Vastaus**
$b=2$

# 120

Funktio $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5x + 7, & \text{kun } x \neq 2 \\ b, & \text{kun } x = 2 \end{cases}$ on jatkuva kohdassa 2,

jos $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

Lasketaan funktion arvo ja raja-arvo kohdassa 2.

$f(2) = b$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (3x^2 - 5x + 7) = 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 7 = 9$

Saadaan $b = 9$.

**Vastaus**

$b = 9$

# 121

Funktio $f(x) = \begin{cases} 2x-2, & \text{kun } x < a \\ x, & \text{kun } x \geq a \end{cases}$ on jatkuva kohdassa $a$, jos

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Määritetään toispuoliset raja-arvot ja funktion arvo kohdassa $a$.

$$f(a) = a$$

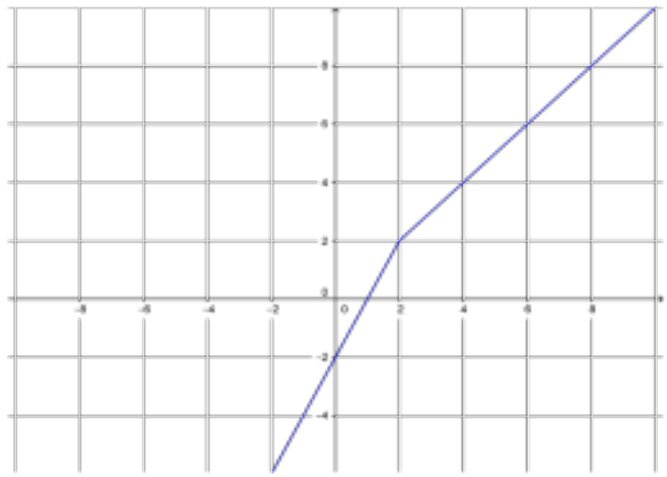
$$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a-} (2x-2) = 2a-2$$

$$\lim_{x \to a-} x = a$$

Toispuolisten raja-arvojen ja funktion arvon kohdassa $2$ on oltava samat.

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö

$$2a-2 = a$$
$$a = 2$$



**Vastaus**

$a = 2$

# 122

a) Kuvan perusteella $f(-2) = 2$.

Funktion toispuoliset raja-arvot kohdassa –2 ovat

$\lim\limits_{x \to -2-} f(x) = 1$ ja
$\lim\limits_{x \to -2+} f(x) = 2$,

joten $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ ei ole olemassa.
Funktio ei ole jatkuva kohdassa $-2$.

b) Kuvan perusteella $f(1) = -1$ ja $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -1$.

Funktio on jatkuva kohdassa 1.

c) Kuvan perusteella $f(2) = -1$ ja $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -2,5$.
Funktio ei ole jatkuva kohdassa 2.

**Vastaus**
a) ei
b) on
c) ei

# 123

Funktio $f(x)=\begin{cases} x^3-8, & \text{kun } x\le -2 \\ -4x^2, & \text{kun } x>-2 \end{cases}$ on jatkuva kohdassa $-2$,

jos $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2)$.

Määritetään toispuoliset raja-arvot ja funktion arvo kohdassa $-2$.

$$\lim_{x\to -2-} f(x)=\lim_{x\to -2-}(x^3-8)=(-2)^3-8=-16$$

$$\lim_{x\to -2+} f(x)=\lim_{x\to -2+}(-4x^2)=-4\cdot(-2)^2=-16$$

$$f(-2)=(-2)^3-8=-16$$

Funktion arvo ja toispuoliset raja-arvot ovat samat kohdassa $-2$,
joten funktio $f$ on jatkuva

**Vastaus**
on

**124**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 6x}{x - 3}, & \text{kun } x \neq 3 \\ 5, & \text{kun } x = 3 \end{cases}$$

a) Funktio on jatkuva kohdassa 0, jos $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

Määritetään raja-arvo ja funktion arvo kohdassa 0.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{2x^3 - 6x}{x - 3} = \frac{2 \cdot 0^3 - 6 \cdot 0}{0 - 3} = \frac{0}{-3} = 0$$

$$f(0) = \frac{2 \cdot 0^3 - 6 \cdot 0}{0 - 3} = \frac{0}{-3} = 0$$

Funktio on jatkuva kohdassa 0.

b) Funktio on jatkuva kohdassa 3, jos $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$.

Määritetään raja-arvo ja funktion arvo kohdassa 3.

$f(3) = 5$

Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvo.

$$\lim_{x\to 3}(2x^2 - 6x) = 2\cdot 3^2 - 6\cdot 3 = 0$$

$$\lim_{x\to 3}(x - 3) = 3 - 3 = 0$$

Osoittajan että nimittäjän raja-arvo ovat 0. Sievennetään lauseke.

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\frac{2x^2 - 6x}{x - 3} = \lim_{x\to 3}\frac{2x(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(2x) = 2\cdot 3 = 6$$

Koska $f(3) = 5$ ja $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 6 \neq 5$, niin funktio $f$ ei ole jatkuva kohdassa 3.

**Vastaus**
a) on
b) ei

## 125

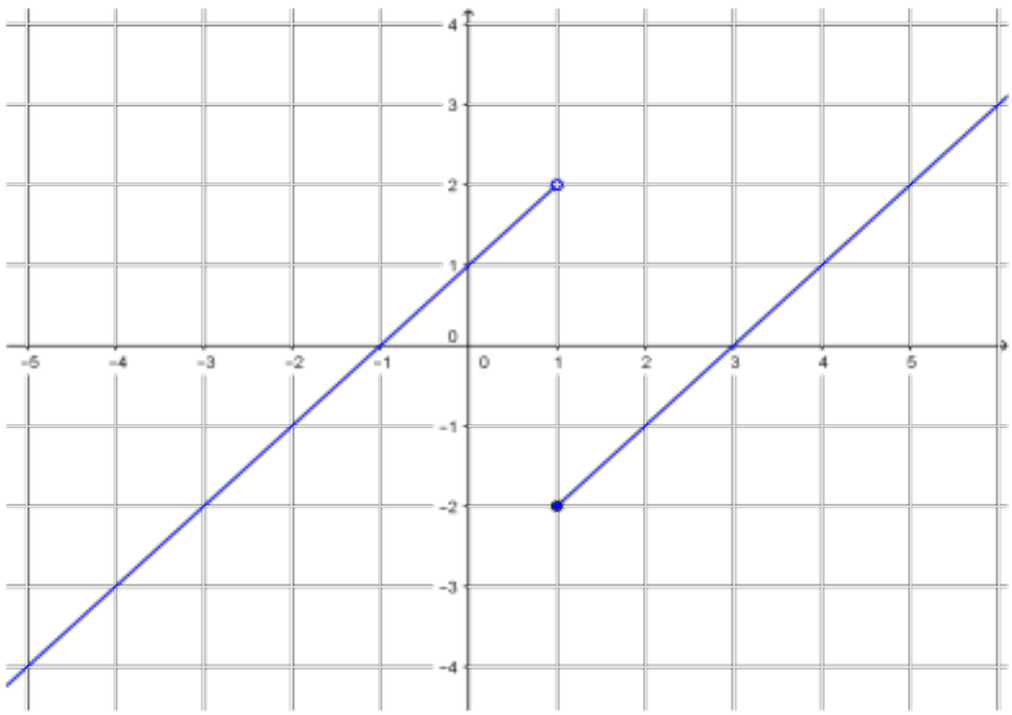
Esimerkiksi funktio $f(x)=\begin{cases} x+1, \text{ kun } x<1 \\ x-3, \text{kun } x\geq 1 \end{cases}$ toteuttaa annetut ehdot.

1) Funktio $f$ on epäjatkuva kohdassa 1, koska
$f(1)=1-3=-2$,
$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(x+1)=1+1=2$
$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(x-3)=1-3=-2$

ja funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa 1.

2) Nollakohdat ovat $x=-1$ ja $x=3$, sillä

$f(-1)=-1+1=0$ ja $f(3)=3-3=0$.



# 126

Funktio $f$ on määritelty lausekkeella $f(x) = \frac{2x^2 - 50}{3x - 15}$, kun $x \neq 5$.

Funktio $f$ on jatkuva kohdassa $5$, jos $f(5) = \lim\limits_{x \to 5} f(x)$.

Määritetään funktion $f$ raja-arvo kohdassa $5$.

Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x \to 5}(2x^2 - 50) = 2 \cdot 5^2 - 50 = 0$$

$$\lim_{x \to 5}(3x - 15) = 3 \cdot 5 - 15 = 0$$

Osoittajan että nimittäjän raja-arvo on $0$. Sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 5} f(x) &= \lim_{x \to 5} \frac{2x^2 - 50}{3x - 15} = \lim_{x \to 5} \frac{2(x^2 - 25)}{3(x - 5)} \\ &= \lim_{x \to 5} \frac{2(x + 5)(x - 5)}{3(x - 5)} = \lim_{x \to 5} \frac{2(x + 5)}{3} \\ &= \frac{2(5 + 5)}{3} = \frac{20}{3}\end{aligned}$$

Funktio on jatkuva kohdassa $5$, kun määritellään $f(5) = \frac{20}{3}$.

**Vastaus**

$f(5) = \frac{20}{3}$

**127**

Funktio $f(x)=\begin{cases}\dfrac{9-x^2}{x+3}, & \text{kun } x<-3\\ 2x+b, & \text{kun } x\le -3\end{cases}$ on jatkuva kohdassa $-3$,

jos $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=f(-3)$.

Määritetään funktion toispuoliset raja-arvot ja funktion arvo kohdassa $-3$.

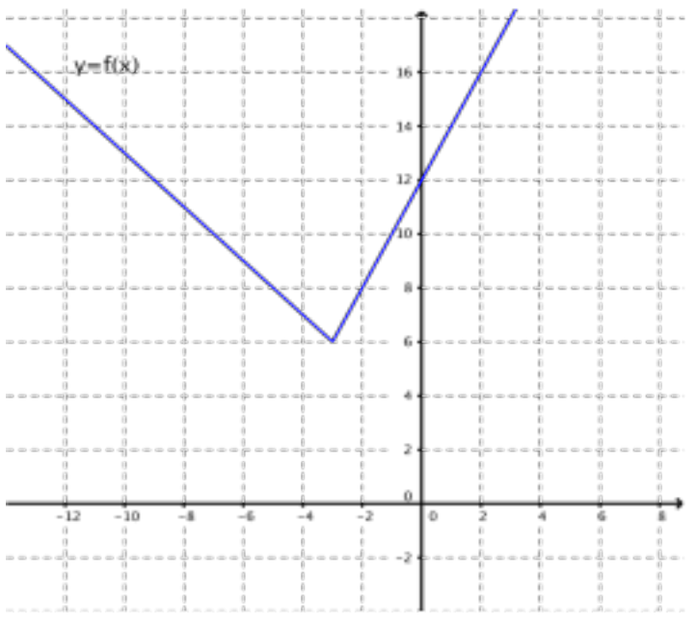
Vasemmanpuolisen raja-arvon osoittajan ja nimittäjän raja-arvot ovat molemmat 0. Sievennetään lauseke.

$$\lim_{x\to -3-}\frac{9-x^2}{x+3}=\lim_{x\to -3-}\frac{(3-x)(3+x)}{x+3}=\lim_{x\to -3-}(3-x)=3-(-3)=6$$

$$\lim_{x\to -3+}(2x+b)=2\cdot(-3)+b=-6+b$$

$$f(-3)=2\cdot(-3)+b=-6+b$$

Toispuolisten raja-arvojen ja funktion arvon on oltava samat. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.




$$-6+b=6$$

$$b=12$$

**Vastaus**

$b=12$

# 128

Funktio $f(x)=\begin{cases}\dfrac{6}{x^2+1}, & \text{kun } x \le a \\ 3, & \text{kun } x \ge a\end{cases}$ on jatkuva kohdassa $a$, jos $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Määritetään funktion toispuoliset raja-arvot ja funktion arvo kohdassa $a$.

$$\lim_{x\to a-}\frac{6}{x^2+1}=\frac{6}{a^2+1}$$

$$\lim_{x\to a+}3=3$$

$$f(a)=3$$

Toispuolisten raja-arvojen ja funktion arvon on oltava samat. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{6}{a^2+1}=3$$

$$6=3(a^2+1)$$

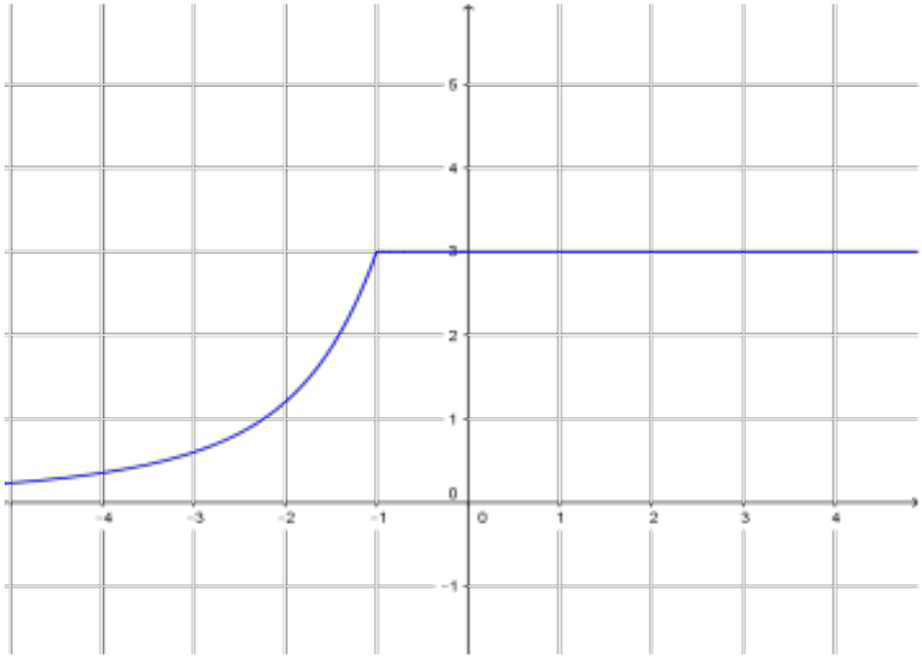
$$6=3a^2+3$$

$$3=3a^2$$

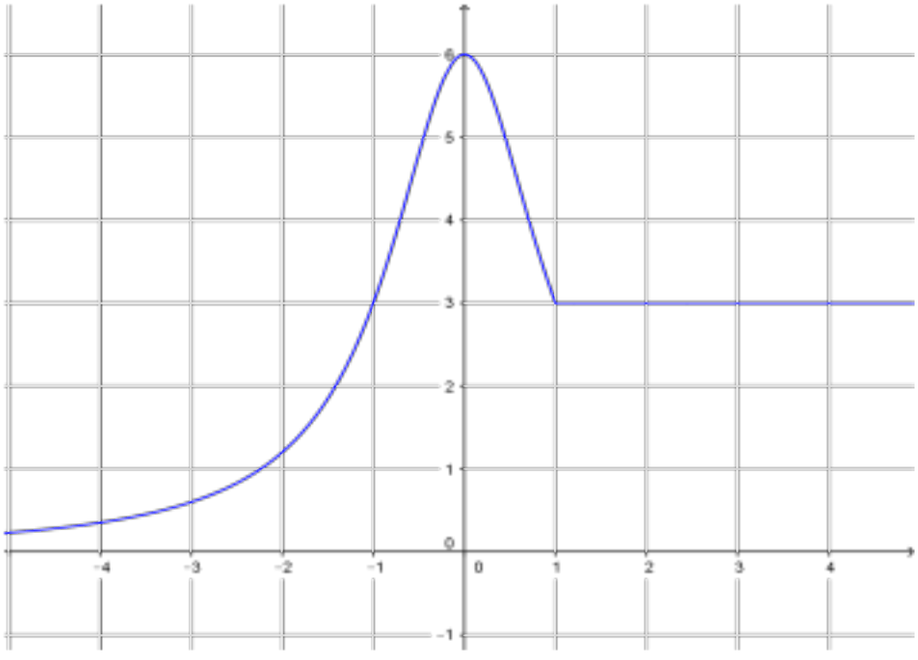
$$a^2=1$$

$$a=-1 \quad \text{tai} \quad a=1$$

Piirretään kuvaaja, kun $a = -1$.




Piirretään kuvaaja, kun $a = 1$.




**Vastaus**

$a = 1$ tai $a = -1$

## 129

Funktio $f$ on määritelty lausekkeella $f(x) = \frac{ax^2 + 8x}{x - 2}$, kun $x \neq 2$.
Funktio $f$ on jatkuva kohdassa 2, jos $f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Nimittäjän raja-arvo on $\lim\limits_{x \to 2}(x - 2) = 0$. Funktion raja-arvo kohdassa 2 on olemassa, kun funktion lauseke voidaan supistaa tekijällä $x - 2$.

Osoittajan tekijänä on $x - 2$, kun $x = 2$ on osoittajan nollakohta.

$$\begin{aligned} a \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 &= 0 \\ 4a + 16 &= 0 \\ 4a &= -16 \,|: 4 \\ a &= -4 \end{aligned}$$

Lasketaan raja-arvo kohdassa 2, kun $a = -4$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} f(x) &= \lim_{x \to 2} \frac{ax^2 + 8x}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{-4x^2 + 8x}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{-4x(x - 2)}{x - 2} \\ &= -4 \cdot 2 \\ &= -8 \end{aligned}$$

Funktio $f$ on jatkuva kohdassa 2, kun $f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f(x) = -8$.

**Vastaus** a) $a = -4$ b) $f(2) = -8$

**130**

Funktio $f(x)=\begin{cases}4x-a, & \text{kun } x\le -2\\ \dfrac{x^2+2x}{x-2}, & \text{kun } -2<x<1\\ x^2+b, & \text{kun } x\ge 1\end{cases}$ on

jatkuva kohdassa $-2$, jos $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2)$ ja

jatkuva kohdassa $1$, jos $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$.

Määritetään funktion arvot ja raja-arvot kohdissa $-2$ ja $1$.

**Kohta $x=-2$:**

$$f(-2)=4\cdot(-2)-a=-8-a$$

$$\lim_{x\to -2-} f(x)=\lim_{x\to -2-}(4x-a)=4\cdot(-2)-a=-8-a$$

$$\lim_{x\to -2+} f(x)=\lim_{x\to -2+}\frac{x^2+2x}{x-2}=\frac{(-2)^2+2\cdot(-2)}{-2-2}=\frac{0}{-4}=0$$

Saadaan yhtälö

$$-8-a=0$$
$$a=-8$$

**Kohta $x = 1$:**

$$f(1) = 1^2 + b = 1 + b$$

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} \frac{x^2 + 2x}{x - 2} = \frac{1^2 + 2 \cdot 1}{1 - 2} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (x^2 + b) = 1^2 + b = 1 + b$$

Saadaan yhtälö

$$1 + b = -3$$
$$b = -4$$

**Vastaus**

$a = -8$ ja $b = -4$

# 131

Funktio $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\,|x|-1}{|x-1|}, & \text{kun } x\neq 1\\ 2, & \text{kun } x=1\end{cases}$ on jatkuva kohdassa $1$,

jos $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=2$.

Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvo.

$$\lim_{x\to 1}(x|x|-1)=1\cdot|1|-1=1\cdot 1-1=0$$

$$\lim_{x\to 1}|x-1|=|1-1|=0$$

Osoittajan että nimittäjän raja-arvo on 0. Sievennetään lauseke.
Nimittäjässä oleva lauseke $x-1$ vaihtaa merkkiä kohdassa $x=1$.
Osoittajassa oleva $x$ vaihtaa merkkiä kohdassa $x=0$.

Kun $x\geq 1$, niin $|x-1|=x-1$ ja $|x|=x$.

Kun $0<x<1$, niin $|x-1|=-x+1$ ja $|x|=x$.

Lasketaan funktion $f$ toispuoliset raja-arvot kohdassa 1.

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{x|x|-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1-} \frac{x\cdot x-1}{-x+1}$$

$$= \lim_{x\to 1-} \frac{x^2-1}{-x+1} = \lim_{x\to 1-} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{-1\cdot \cancel{(x-1)}}$$

$$= \lim_{x\to 1-} \frac{x+1}{-1}$$

$$= \frac{1+1}{-1} = -2$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{x|x|-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1+} \frac{x\cdot x-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to 1+} (x+1) = 1+1 = 2$$

Toispuoliset raja-arvot ovat erisuuret, joten funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa 1.

Funktio ei siis ole jatkuva kohdassa 1.

**Vastaus**
ei ole

# 132

a) Funktio $L$ on jatkuva kohdassa $0$, jos $\lim\limits_{x \to 0} L(x) = L(0)$.

Tutkitaan toispuolisia raja-arvoja.

$$L(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun } -1 \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0-} L(x) = \lim_{x \to 0-} (-1) = -1$$

$$\lim_{x \to 0+} L(x) = \lim_{x \to 0+} 0 = 0$$

Funktiolla $L$ ei ole raja-arvoa kohdassa $0$, joten funktio ei ole jatkuva kohdassa $0$.

b) Funktio $f$ on jatkuva kohdassa $0$, jos $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

$f(0) = 0 \cdot L(0) = 0$

Tutkitaan toispuolisia raja-arvoja.

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} xL(x) = \lim_{x\to 0+} x \cdot \lim_{x\to 0+} L(x) = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} xL(x) = \lim_{x\to 0-} x \cdot \lim_{x\to 0-} L(x) = 0 \cdot (-1) = 0$$

Siis $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Koska $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, funktio $f$ on jatkuva kohdassa $0$.

**Vastaus**
a) ei ole jatkuva
b) on jatkuva

**133**

a) Funktio $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x + 2}$ on rationaalifunktio, joten se on määrittelyjoukossaan $(x \neq 2)$ jatkuva.

Siis funktio $f$ on jatkuva.

b) Koska funktiota $f$ ei ole määritelty kohdassa $2$, niin se ei ole jatkuva kohdassa $2$.

Funktio $f$ ei siis ole jatkuva kaikkialla.

**Vastaus**
a) on
b) ei

**134**

a) Funktio $f(x) = 5x^7 - 3x^2 - \frac{x}{2}$ on polynomifunktio, joten se on jatkuva.

Funktio on määritelty kaikilla reaalilukuarvoilla $x$, joten se on jatkuva kaikkialla.

b) Funktio $f(x) = x^2 - \frac{3}{x-1}$ on rationaalifunktio, joten se on jatkuva määrittelyjoukossaan.

Koska funktiota ei ole määritelty kohdassa $x = 1$, niin se ei ole jatkuva kohdassa $1$.

Funktio $f$ ei siis ole jatkuva kaikkialla.

**Vastaus**
a) on jatkuva kaikkialla
b) on jatkuva, ei jatkuva kaikkialla

**135**

a) $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = 4$ ja $f(1) = 2$.

Koska $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) \neq f(1)$, funktio $f$ ei ole vasemmalta jatkuva kohdassa 1.

b) $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = 2$ ja $f(1) = 2$.

Koska $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = f(1)$ funktio $f$ on oikealta jatkuva kohdassa 1.

c) Funktio $f$ ei ole vasemmalta jatkuva kohdassa 1, joten $f$ ei ole jatkuva välillä $[-2, 1]$.

d) Funktio $f$ on oikealta jatkuva kohdassa $-2$ ja jatkuva jokaisessa välin $]-2, 1[$ pisteessä, joten $f$ on jatkuva välillä $[-2, 1[$.

e) Funktio $f$ on oikealta jatkuva kohdassa 1 ja vasemmalta jatkuva kohdassa 3 sekä jatkuva välillä $]1, 3[$, joten $f$ on jatkuva välillä $[1, 3]$.

**Vastaus**

a) ei
b) on
c) ei
d) on
e) on

**136**

a) Funktio $f$ on jatkuva välin $[-1,1]$ jokaisessa sisäpisteessä ja toispuolisesti jatkuva välin päätepisteissä.

$f$ on jatkuva välillä $[-1,1]$.

b) Funktio $f$ ei ole jatkuva kohdassa $1$, koska funktiolla $f$ ei ole raja-arvoa tässä kohdassa.

Funktio $f$ ei ole jatkuva välillä $[0, 3]$.

c) Funktio $f$ on jatkuva avoimen välin $]1, 3[$ jokaisessa pisteessä.

d) Funktiota $f$ ei ole määritelty kohdassa $3$, joten funktio $f$ ei ole jatkuva välillä $[2, 4]$.

**Vastaus**

a) on
b) ei
c) on
d) ei

# 137

a) Funktio $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ on määritelty välillä $[2,3]$.
Funktio $f$ on polynomifunktio, joten se on jatkuva.
Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä ja tutkitaan, voidaanko soveltaa Bolzanon lausetta.

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 1 = -3 < 0$$
$$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 1 = 1 > 0$$

Funktion arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, joten voidaan soveltaa Bolzanon lausetta. Funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]2,3[$.

b) Funktion $f(x) = x + \frac{x-6}{x-1}$ nimittäjän $x-1$ nollakohta on $x = 1$. Funktio $f$ on määritelty välillä $[2,3]$. Funktio $f$ on rationaalifunktio, joten se on jatkuva määrittelyjoukossaan.
Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä ja tutkitaan, voidaanko soveltaa Bolzanon lausetta.

$$f(2) = 2 + \frac{2-6}{2-1} = -2 < 0$$
$$f(3) = 3 + \frac{3-6}{3-1} = \frac{3}{2} > 0$$

Funktion arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, joten voidaan soveltaa Bolzanon lausetta. Funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]2,3[$.

**Vastaus** a) on, voidaan soveltaa
b) on, voidaan soveltaa

**138**

a) Funktion $g(x) = \frac{2x-3}{x-4}$ nimittäjän $x-4$ nollakohta on $x = 4$. Funktio $g$ on määritelty välillä $[1,3]$.

Funktio $g$ on rationaalifunktio, joten se on jatkuva määrittelyjoukossaan.

Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä ja tutkitaan, voidaanko soveltaa Bolzanon lausetta.

$$g(1) = \frac{2 \cdot 1 - 3}{1 - 4} = \frac{1}{4} > 0$$

$$g(3) = \frac{2 \cdot 3 - 3}{3 - 4} = -3 < 0$$

Funktion arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, joten voidaan soveltaa Bolzanon lausetta. Funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]1,3[$.

b) Funktion $g(x) = \frac{5-x}{x^2-16}$ nimittäjän $x^2 - 16$ nollakohdat ovat $x = \pm 4$. Funktio $g$ on määritelty välillä $[1, 3]$.

Funktio $g$ on rationaalifunktio, joten se on jatkuva määrittelyjoukossaan.

Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä ja tutkitaan, voidaanko soveltaa Bolzanon lausetta.

$$g(1) = \frac{5-1}{1^2-16} = -\frac{4}{15} < 0$$
$$g(3) = \frac{5-3}{3^2-16} = -\frac{2}{7} < 0$$

Funktion arvot välin päätepisteissä ovat samanmerkkiset, joten ei voida soveltaa Bolzanon lausetta.

Tutkitaan, voidaanko funktion nollakohdat ratkaista.

$$\frac{5-x}{x^2-16} = 0 \quad |\cdot(x^2-16) \quad (x \neq \pm 4)$$
$$5 - x = 0$$
$$x = 5$$

Funktiolla on vain yksi nollakohta, ja se ei kuulu välille $[1, 3]$.

**Vastaus**

a) on, voidaan soveltaa
b) ei ole, ei voida soveltaa

**139**

a) $f(x) = x^6 - 3x^4$

$f(1) = 1^6 - 3 \cdot 1^4 = -2 < 0$

$f(2) = 2^6 - 3 \cdot 2^4 = 16 > 0$

Funktio $f$ on polynomifunktio, joten se on jatkuva kaikkialla.

Funktion arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, joten voidaan soveltaa Bolzanon lausetta.

Funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]1, 2[$.

b) $f(x) = x^3 - 2x + 3$

$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 + 3 = 2 > 0$

$f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 + 3 = 7 > 0$

Funktion arvot välin päätepisteissä ovat samanmerkkiset, joten ei voida soveltaa Bolzanon lausetta.

c) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 - 2} + 3$

$f(1) = \dfrac{4 \cdot 1}{1^2 - 2} + 3 = -1 < 0$

$f(2) = \dfrac{4 \cdot 2}{2^2 - 2} + 3 = 7 > 0$

Nimittäjän $x^2 - 2$ nollakohta on $x = \pm\sqrt{2} = \pm 1,414...$ .

Koska funktio ei ole määritelty tarkasteluvälin kohdassa $\sqrt{2}$, se ei ole välillä $[1,2]$ jatkuva funktio.

Bolzanon lausetta ei voida soveltaa.

**Vastaus** a) voidaan soveltaa
b) ei voida soveltaa
c) ei voida soveltaa

**140**

Funktion $f(x) = x^3 - \frac{x}{x^2+1}$ nimittäjällä $x^2+1$ ei ole nollakohtia.

Funktio $f$ on siis määritelty kaikilla $x$. Erityisesti $f$ on määritelty suljetulla välillä $[-2, 1]$.

Funktio $f$ on rationaalifunktio, joten se on jatkuva.

Lasketaan funktion arvot tarkasteluvälin välin päätepisteissä ja tutkitaan, voidaanko soveltaa Bolzanon lausetta.

$$f(-2) = (-2)^3 - \frac{-2}{(-2)^2+1} = -\frac{38}{5} < 0$$

$$f(1) = 1^3 - \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2} > 0$$

Funktion arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, joten voidaan soveltaa Bolzanon lausetta.

Funktiolla on siis ainakin yksi nollakohta välillä $]-2,1[$. □

**141**

a) $x^3 + 1 = -\frac{3}{2}x^2$

$x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1 = 0$

Yhtälön $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1 = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ nollakohdat.

Funktio $f$ on polynomifunktio ja siten kaikkialla jatkuva. Bolzanon lausetta voidaan soveltaa funktioon.

$f(0) = 0^3 + \frac{3}{2} \cdot 0^2 + 1 = 1 > 0$

$f(-2) = (-2)^3 + \frac{3}{2} \cdot (-2)^2 + 1 = -1 < 0$

Koska funktion arvot välin $[-2, 0]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]-2, 0[$.

Siis yhtälöllä $x^3 + 1 = -\frac{3}{2}x^2$ on ainakin yksi ratkaisu. □

b) $2x^4 - x^3 = 1 - x^2$

$2x^4 - x^3 + x^2 - 1 = 0$

Yhtälön $2x^4 - x^3 + x^2 - 1 = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - 1$ nollakohdat.

Funktio $f$ on polynomifunktio ja siten kaikkialla jatkuva.
Bolzanon lausetta voidaan soveltaa funktioon.

$f(0) = 2 \cdot 0^4 - 0^3 + 0^2 - 1 = -1 < 0$

$f(1) = 2 \cdot 1^4 - 1^3 + 1^2 - 1 = 1 > 0$

Koska funktion arvot välin $[0,1]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]0,1[$.

Siis yhtälöllä $2x^4 - x^3 = 1 - x^2$ on ainakin yksi ratkaisu. □

**142**

Muodostetaan yhtälö.

$$f(x) = -1$$
$$x^4 - 5x^3 + 1 = -1$$
$$x^4 - 5x^3 + 2 = 0$$

Yhtälön $x^4 - 5x^3 + 2 = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $g(x) = x^4 - 5x^3 + 2$ nollakohdat.

Funktio $g$ on polynomifunktio ja siten kaikkialla jatkuva. Bolzanon lausetta voidaan soveltaa funktioon.

$$g(0) = 0^4 - 5 \cdot 0^3 + 2 = 2 > 0$$
$$g(1) = 1^4 - 5 \cdot 1^3 + 2 = -2 < 0$$

Koska funktion $g$ arvot välin $[0,1]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]0,1[$.

Siis yhtälöllä $x^4 - 5x^3 + 1 = -1$ on ainakin yksi ratkaisu välillä $]0,1[$.

Funktio $f$ saa siis arvon $-1$ ainakin kerran. □

**143**

$5x^4 - 3x = 6x^3 + 1$

$5x^4 - 6x^3 - 3x - 1 = 0$

Yhtälön $5x^4 - 6x^3 - 3x - 1 = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = 5x^4 - 6x^3 - 3x - 1$ nollakohdat.

Funktio $f$ on polynomifunktio ja siten kaikkialla jatkuva.
Bolzanon lausetta voidaan soveltaa funktioon.

$f(-1) = 5 \cdot (-1)^4 - 6 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1) - 1 = 13 > 0$

$f(0) = 5 \cdot 0^4 - 6 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0 - 1 = -1 < 0$

$f(2) = 5 \cdot 2^4 - 6 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2 - 1 = 25 > 0$

- Koska funktion arvot välin $[-1, 0]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]-1, 0[$.

  Siis yhtälöllä $5x^4 - 3x = 6x^3 + 1$ on ainakin yksi ratkaisu välillä $]-1, 0[$.

- Koska funktion arvot välin $[0, 2]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]0, 2[$.

  Siis yhtälöllä $5x^4 - 3x = 6x^3 + 1$ on ainakin yksi ratkaisu välillä $]0, 2[$.

Yhtälöllä $5x^4 - 3x = 6x^3 + 1$ on siis ainakin kaksi ratkaisua. □

**144**

a) Funktio $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{2x^2 - 3x + 1}$, kun $x \neq \dfrac{1}{2}$, $x \neq 1$, on rationaalifunktio, joten se on määrittelyjoukossaan jatkuva.

Siis funktio $f$ on jatkuva.

b) Koska funktio $f$ ei ole määritelty kohdissa $\dfrac{1}{2}$ ja $1$, niin se ei ole jatkuva näissä kohdassa.

Funktio $f$ ei siis ole jatkuva kaikkialla.

**Vastaus**
a) on
b) ei

**145**

Jotta funktio $f(x)=\begin{cases}-1, & \text{kun } x<-1\\ h(x), & \text{kun } -1\le x\le 2\\ 1, & \text{kun } x>2\end{cases}$ olisi jatkuva, on

oltava $h(-1)=-1$ ja $h(2)=1$ sekä funktion $h$ on oltava jatkuva välillä $[-1,2]$.

Valitaan funktio $h$ niin, että sen kuvaaja on suora, joka kulkee pisteiden $(-1,-1)$ ja $(2,1)$ kautta.

Muodostetaan suoran yhtälö.

$$k=\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{1-(-1)}{2-(-1)}=\frac{2}{3}$$

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad k=\frac{2}{3},\ (x_0,y_0)=(-1,-1)$$

$$y+1=\frac{2}{3}(x+1)$$

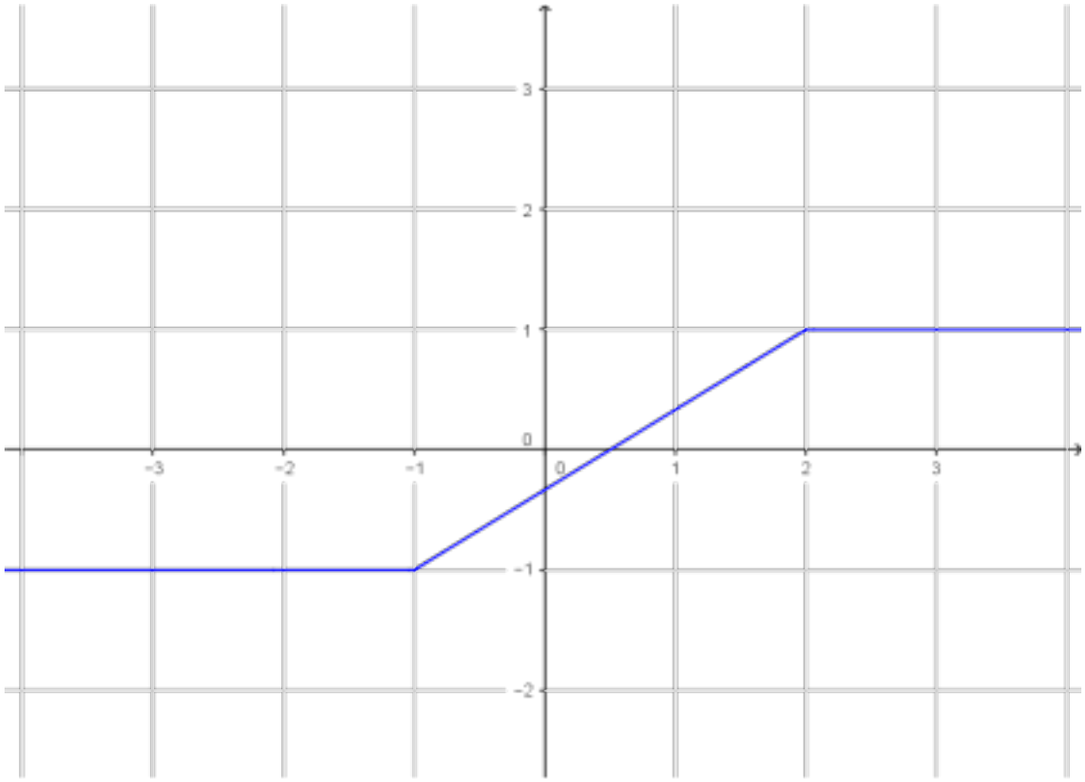
$$y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$$

Siis $h(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$.

Saadaan

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{kun } x<-1\\ \frac{2}{3}x-\frac{1}{3}, & \text{kun } -1\le x\le 2\\ 1, & \text{kun } x>2\end{cases}$$

Piirretään funktion $f$ kuvaaja.




**Vastaus**

esimerkiksi $h(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$

**146**

a) Funktio $f$ on jatkuva välin $[-2,0]$ jokaisessa sisäpisteessä ja toispuolisesti jatkuva välin päätepisteissä.

Funktio $f$ on jatkuva välillä $[-2,0]$.

b) Funktio $f$ ei ole oikealta jatkuva kohdassa $0$, koska

$f(0) = 1$ ja $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = -2 \neq 1$.

Funktio $f$ ei ole jatkuva välillä $[0,3]$.

c) Funktio $f$ on jatkuva avoimen välin $]0, 3[$ jokaisessa pisteessä.

Funktio $f$ on jatkuva välillä $]0, 3[$.

**Vastaus**

a) on
b) ei
c) on

**147**

a) Funktio $f(x)=\frac{x}{x-2}$ on rationaalifunktio, joten se on jatkuva määrittelyjoukossaan.

Tutkitaan, onko funktio määritelty välillä $[-2,3]$.

Lasketaan nimittäjän nollakohta.

$$x-2=0$$
$$x=2$$

Funktio ei ole määritelty kohdassa $x=2$, joten funktio ei ole jatkuva välillä $[-2,3]$.

b) Funktio $g(x)=\frac{1}{x^2+2}-\frac{x^2}{x+3}$ on rationaalifunktio, joten se on jatkuva määrittelyjoukossaan.

Tutkitaan, onko funktio määritelty välillä $[-2,3]$.

Lasketaan nimittäjien nollakohdat.

$$x^2-2=0$$
$$x^2=-2$$
ei ratkaisua

$$x+3=0$$
$$x=-3$$

Funktio $g$ ei ole määritelty kohdassa $x=-3$, mutta on määritelty välillä $[-2,3]$. Funktio $g$ on siis jatkuva välillä $[-2,3]$.

**Vastaus**

a) ei b) on

**148**

a) Funktion $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x + 1}{x^2 - 9}$ nimittäjän $x^2 - 9$ nollakohdat ovat $x = \pm 3$. Funktio $f$ on siis määritelty välillä $[-2, 0]$.

Funktio $f$ on rationaalifunktio, joten se on jatkuva.

Lasketaan funktion arvot tarkasteluvälin päätepisteissä ja tutkitaan, voidaanko soveltaa Bolzanon lausetta.

$$f(-2) = \frac{3 \cdot (-2)^3 + 4 \cdot (-2) + 1}{(-2)^2 - 9} = \frac{31}{5} > 0$$

$$f(0) = \frac{3 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0 + 1}{(0)^2 - 9} = -\frac{1}{9} < 0$$

Funktion arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, joten voidaan soveltaa Bolzanon lausetta.

Funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]-2, 0[$.

b) Funktion $g(x) = \dfrac{5x^3 - 2}{x^2 - 1}$ nimittäjän $x^2 - 1$ nollakohdat ovat $x = \pm 1$.

Funktio $g$ ei siis ole määritelty kohdassa $x = -1$ eikä ole jatkuva tarkasteluvälillä $[-2, 0]$. Bolzanon lausetta ei voida soveltaa.

Tutkitaan, voidaanko funktion nollakohdat ratkaista.

$$\frac{5x^3 - 2}{x^2 - 1} = 0 \qquad | \cdot (x^2 - 1) \quad (\neq 0)$$

$$5x^3 - 2 = 0$$

$$x^3 = \frac{2}{5}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$$

Funktion $g$ nollakohta ei kuulu tarkasteluvälille.

Funktiolla $g$ ei ole nollakohtia välillä $[-2, 0]$.

**Vastaus**

a) on

b) ei

**149**

a) Funktio $f(x) = 10x^3 - x^2 - 2$ on polynomifunktio, joten se on jatkuva kaikkialla. Erityisesti $f$ on on määritelty suljetulla välillä $[0,1]$.

Lasketaan funktion arvot välin $[0,1]$ päätepisteissä ja tutkitaan, voidaanko soveltaa Bolzanon lausetta.

$$f(0) = 10 \cdot 0^3 - 0^2 - 2 = -2 < 0$$
$$f(1) = 10 \cdot 1^3 - 1^2 - 2 = 7 > 0$$

Funktion arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, joten voidaan soveltaa Bolzanon lausetta.

Funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]0,1[$ .

b) Funktion $g(x) = x^2 - \frac{x}{x-2}$ nimittäjän $x-2$ nollakohta on $x = 2$. Funktio $g$ on siis määritelty suljetulla välillä $[0,1]$. Funktio $g$ on rationaalifunktio, joten se on jatkuva.

Lasketaan funktion arvot välin $[0,1]$ päätepisteissä ja tutkitaan, voidaanko soveltaa Bolzanon lausetta.

$$g(0) = 0^2 - \frac{0}{0-2} = 0 \qquad g(1) = 1^2 - \frac{1}{1-2} = 1+1 = 2$$

koska funktion arvot välin päätepisteissä eivät ole erimerkkiset, Bolzanon lausetta ei voida soveltaa.

Tutkitaan, voidaanko funktion nollakohdat ratkaista.

$$x^2 - \frac{x}{x-2} = 0 \qquad |\cdot(x-2) \quad (\neq 0)$$
$$(x-2)\cdot x^2 - x = 0$$
$$x^3 - 2x^2 - x = 0$$
$$x(x^2 - 2x - 1) = 0$$

$x = 0$ tai $x^2 - 2x - 1 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot(-1)}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$
$$x = -\sqrt{2} + 1 \approx -0,4 \text{ tai } x = \sqrt{2} + 1 \approx 2,4$$

Funktion nollakohdista mikään ei kuulu välille $]0,1[$.

**Vastaus**

a) on b) ei

**150**

Muodostetaan yhtälö.

$$\begin{aligned} f(x) &= \pi \\ 2x^3 - 3x^2 - 1 &= \pi \\ 2x^3 - 3x^2 - 1 - \pi &= 0 \end{aligned}$$

Yhtälön $2x^3 - 3x^2 - 1 - \pi = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1 - \pi$ nollakohdat.

Funktio $g$ on polynomifunktio ja siten kaikkialla jatkuva.
Tutkitaan funktion $g$ arvoja.

$$g(0) = 2 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 - 1 - \pi = -1 - \pi < 0$$
$$g(3) = 2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 1 - \pi = 26 - \pi > 0$$

Koska jatkuvan funktion $g$ arvot välin $[0,3]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla $g$ on ainakin yksi nollakohta välillä $]0,3[$.

Siis yhtälöllä $x^4 - 5x^3 + 1 = -1$ on ainakin yksi ratkaisu välillä $]0,3[$.

Funktio $f$ saa siis arvon $\pi$ ainakin kerran. □

**151**

Muodostetaan yhtälö.

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ x^3 - 1 &= x \\ x^3 - x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Yhtälön $x^3 - x - 1 = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $g(x) = x^3 - x - 1$ nollakohdat.

Funktio $g$ on polynomifunktio ja siten kaikkialla jatkuva.
Tutkitaan funktion $g$ arvoja.

$$g(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1 < 0$$
$$g(2) = 2^3 - 2 - 1 = 5 > 0$$

Koska jatkuvan funktion $g$ arvot välin $[1,2]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla $g$ on ainakin yksi nollakohta välillä $]1,2[$.

Siis yhtälöllä $x^3 - 1 = x$ on ainakin yksi ratkaisu, joten funktiolla $f$ on ainakin yksi kiintopiste. □

**152**

Muodostetaan yhtälö

$$f(x) = x$$
$$\frac{1}{1+x^2} = x$$
$$\frac{1}{1+x^2} - x = 0$$

Yhtälön $\frac{1}{1+x^2} - x = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $g(x) = \frac{1}{1+x^2} - x$ nollakohdat.

Funktio $g$ on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Koska nimittäjällä $1+x^2$ ei ole nollakohtia, funktio on jatkuva kaikkialla.
Tutkitaan funktion $g$ arvoja.

$$g(0) = \frac{1}{1+0^2} - 0 = 1 > 0$$
$$g(1) = \frac{1}{1+1^2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$$

Koska jatkuvan funktion $g$ arvot välin $[0,1]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla $g$ on ainakin yksi nollakohta välillä $]0,1[$.
Siis yhtälöllä $\frac{1}{1+x^2} = x$ on ainakin yksi ratkaisu, joten funktiolla $f$ on ainakin yksi kiintopiste. □

**153**

$$x^n = x + 1$$
$$x^n - x - 1 = 0$$

Yhtälön $x^n - x - 1 = 0$, missä $n = 2, 3, 4, \ldots$, ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^n - x - 1$ nollakohdat.

Funktio $f$ on polynomifunktio ja siten kaikkialla jatkuva.
Tutklitaan funktion $f$ arvoja.

$$f(1) = 1^n - 1 - 1 = -1 < 0$$
$$f(2) = 2^n - 2 - 1 = 2^n - 3$$

Kun $n = 2, 3, 4, \ldots$ niin $2^n \geq 4$, kaikilla $n$, joten $2^n - 3 \geq 4 - 3 > 0$.

Koska jatkuvan funktion $f$ arvot välin $[1, 2]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, niin funktiolla $f$ on ainakin yksi nollakohta välillä $]1, 2[$.

Siis yhtälöllä $x^n = x + 1$ on ainakin yksi ratkaisu välillä $[1, 2]$. □

**154**

$$f(x) = g(x)$$
$$f(x) - g(x) = 0$$

Yhtälön $f(x) - g(x) = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $h(x) = f(x) - g(x)$ nollakohdat.

Koska funktiot $f$ ja $g$ ovat jatkuvia välillä $[0,1]$, myös erotus $f - g$ on jatkuva välillä $[0,1]$.

Lasketaan funktion *h* arvo välin päätepisteissä.

$$h(0) = f(0) - g(0) = \underbrace{f(0)}_{>0} + \underbrace{(-g(0))}_{>0} > 0$$

$$h(1) = f(1) - g(1) = \underbrace{f(1)}_{<0} + \underbrace{(-g(1))}_{<0} < 0$$

Koska funktion $h$ arvot välin $[0,1]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla $h$ on ainakin yksi nollakohta välillä $]0, 1[$.

Siis yhtälöllä $f(x) = g(x)$ on ainakin yksi ratkaisu välillä $]0, 1[$ ja funktiot $f$ ja $g$ saavat saman arvon ainakin yhdessä kohdassa välillä $[0,1]$. □

**155**

On osoitettava, että yhtälöllä $f(x) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ on ainakin yksi ratkaisu välillä $[a,b]$.

$$f(x) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$
$$f(x) - \frac{f(a)+f(b)}{2} = 0$$

Yhtälön $f(x) - \frac{f(a)+f(b)}{2} = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $g(x) = f(x) - \frac{f(a)+f(b)}{2}$ nollakohdat.

Koska funktio $f$ on jatkuva välillä $[a,b]$, myös funktio $g$ on jatkuva välillä $[a,b]$.

Lasketaan funktion $g$ arvo välin $[a,b]$ päätepisteissä.

$$g(a) = f(a) - \frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{2f(a)-(f(a)+f(b))}{2}$$
$$= \frac{f(a)-f(b)}{2}$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{2f(b)-(f(a)+f(b))}{2}$$
$$= \frac{-f(a)+f(b)}{2}$$

**1)** Luvut $\frac{f(a)-f(b)}{2}$ ja $\frac{f(a)-f(b)}{2}$ ovat toistensa vastalukuja, kun $f(a) \neq f(b)$, joten funktio $g(x)$ saa tällöin erimerkkiset arvot välin $[a, b]$ päätepisteissä ja funktiolla $g$ on Bolzanon lauseen perusteella ainakin yksi nollakohta välillä $]a, b[$.

Yhtälöllä $f(x) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ on ainakin yksi ratkaisu välillä $[a, b]$.
Siis välillä $[a, b]$ on ainakin yksi kohta, missä funktion $f$ arvo on funktion arvojen $f(a)$ ja $f(b)$ keskiarvo.

**2)** Tutkitaan tapaus $f(a) = f(b)$.

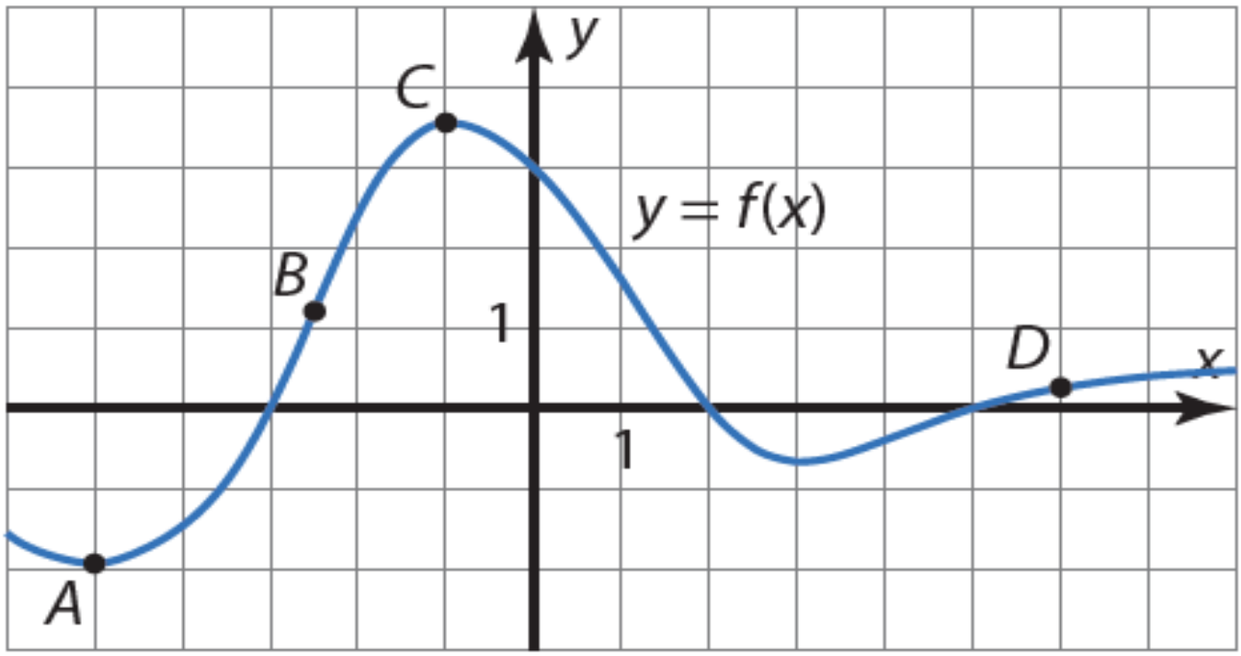
Funktion arvojen $f(a)$ ja $f(b)$ keskiarvo on

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{f(b)+f(a)}{2} = \frac{2f(b)}{2} = f(b) = f(a).$$

Ainakin välin $[a, b]$ päätepisteissä funktion arvo on sama, kuin arvojen $f(a)$ ja $f(b)$ keskiarvo.

Kohtien 1 ja 2 perusteella välillä $[a, b]$ on aina ainakin yksi kohta, missä funktion $f$ arvo on funktion arvojen $f(a)$ ja $f(b)$ keskiarvo. □

**156**




1) C

2) A

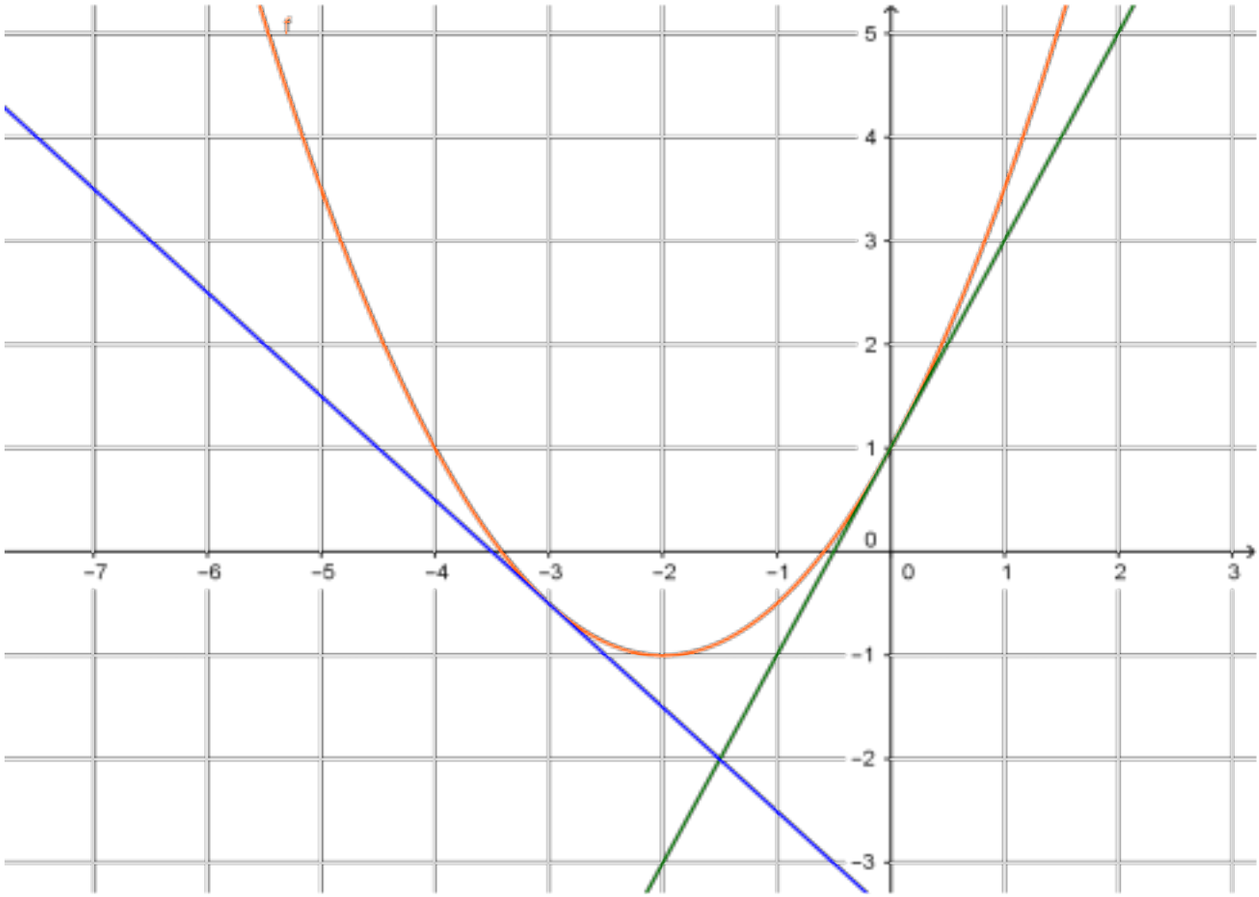
3) Derivaatan arvo on suurin kohdassa, jossa kuvaaja nousee jyrkimmin. Näin tapahtuu pisteessä B.

4) Derivaatta on nolla kohdissa, joissa funktion kuvaaja on (hetkellisesti) vaakasuora. Näin tapahtuu pisteissä A ja C.

Vastaus
1) C
2) A
3) B
4) A ja C

## 157

Piirretään kuvaajalle tangentit kohtiin $0$ ja $-3$.




Lasketaan tangenttien kulmakertoimet.

$$f'(0) = \frac{3-1}{1-0} = \frac{2}{1} = 2$$

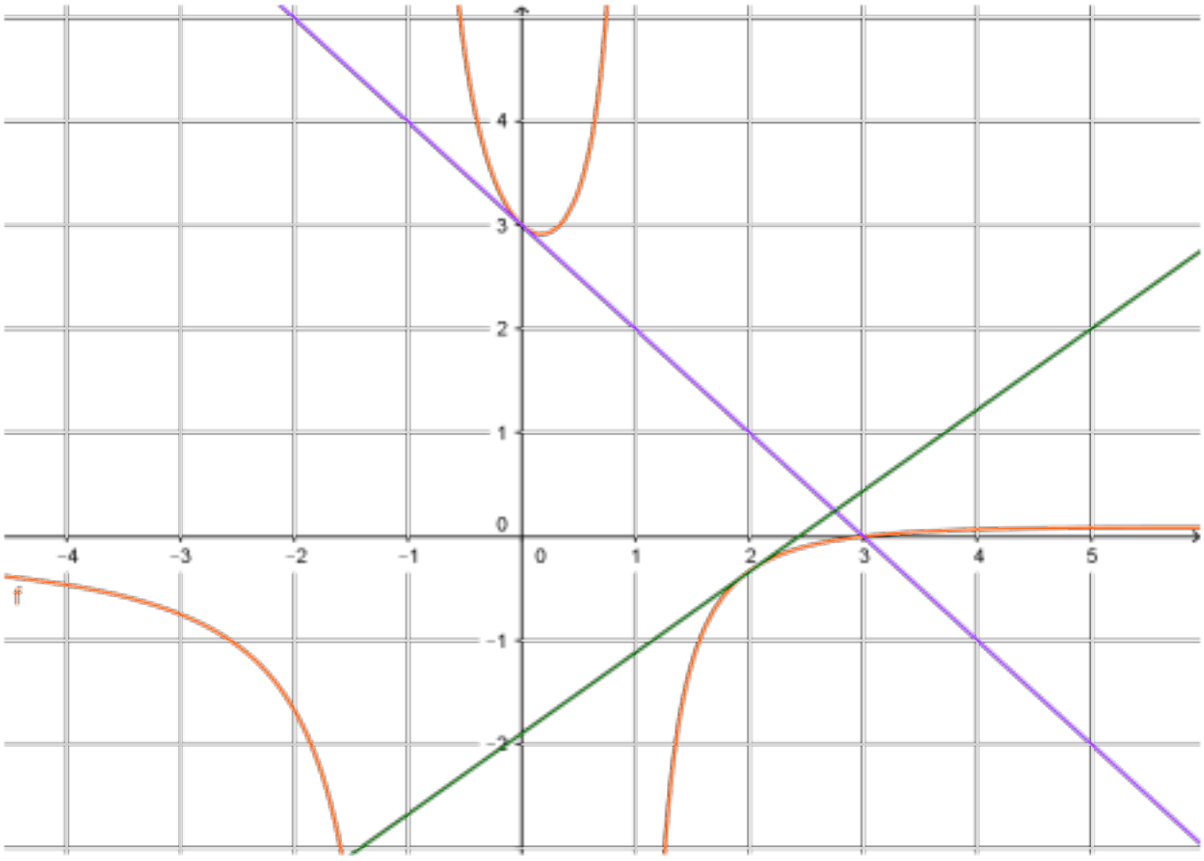
$$f'(-3) = \frac{-0,5-0,5}{-3-(-4)} = \frac{-1}{1} - 1$$

Vastaus a) 2

b) $-1$

# 158

Piirretään funktion $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-1}$ kuvaaja ja kuvaajalle tangentit kohtiin 0 ja 2.




Määritetään piirtosovelluksen avulla tangenttien kulmakertoimet.

$f'(0) = -1$
$f'(2) = 0,78$

Vastaus a) $-1$
b) noin $0,78$

**159**

a) Muodostetaan funktion $f(x) = 4x^2$ erotusosamäärä kohdassa 3.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad a = 3$$

$$= \frac{f(3+h)-f(3)}{h} \qquad f(x) = 4x^2$$

$$= \frac{4(3+h)^2 - 4 \cdot 3^2}{h}$$

$$= \frac{4(9+6h+h^2)-36}{h}$$

$$= \frac{36+24h+4h^2-36}{h}$$

$$= \frac{4h^2+24h}{h}$$

$$= \frac{h(4h+24)}{h}$$

$= 4h + 24$, missä $h \neq 0$

b) Funktion derivaatta kohdassa 3 on erotusosamäärän raja-arvo, kun $h$ lähestyy lukua 0.

$$\lim_{h \to 0}(4h+24) = 4 \cdot 0 + 24 = 24$$

Vastaus a) $4h + 24$, kun $h \neq 0$

b) $f'(3) = 24$

# 160

a) Muodostetaan funktion $f(x) = 3x^2 + 2x$ erotusosamäärä kohdassa 2.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad a = 2$$

$$= \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \qquad f(x) = 3x^2 + 2x$$

$$= \frac{3(2+h)^2 + 2(2+h) - 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2}{h}$$

$$= \frac{3(4+4h+h^2) + 4 + 2h - 16}{h}$$

$$= \frac{12 + 12h + 3h^2 + 2h - 12}{h}$$

$$= \frac{3h^2 + 14h}{h}$$

$$= \frac{h(3h+14)}{h}$$

$= 3h + 14$, missä $h \neq 0$.

b) Funktion derivaatta kohdassa 2 on erotusosamäärän raja-arvo, kun $h$ lähestyy lukua 0.

$$\lim_{h \to 0}(3h + 14) = 3 \cdot 0 + 14 = 14$$

Vastaus a) $3h + 14$, kun $h \neq 0$
b) $f'(2) = 14$

# 161

Muodostetaan funktion $f(x) = \frac{3}{x}$ erotusosamäärä kohdassa $-1$.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad a = -1$$

$$= \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} \qquad f(x) = \frac{3}{x}$$

$$= \frac{\frac{3}{-1+h} - \frac{3}{-1}}{h}$$

$$= \frac{\frac{3}{-1+h} + \frac{3(-1+h)}{-1+h}}{h}$$

$$= \frac{\frac{3-3+3h}{-1+h}}{h}$$

$$= \frac{\frac{3h}{-1+h}}{h}$$

$$= \frac{3}{-1+h}, \text{ missä } h \neq 0.$$

Funktion derivaatta kohdassa $-1$ on erotusosamäärän raja-arvo, kun $h$ lähestyy lukua 0.

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{3}{-1+h}\right) = \frac{3}{-1+0} = \frac{3}{-1} = -3$$

Vastaus $f'(-1) = -3$

# 162

a) Määritetään funktion $f(x) = 4x^2 + 3$ derivaattafunktio laskemalla erotusosamäärän raja-arvo kohdassa $x$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(4(x+h)^2 + 3) - (4x^2 + 3)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{4(x^2 + 2xh + h^2) + 3 - 4x^2 - 3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{4x^2 + 8xh + 4h^2 - 4x^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{8xh + 4h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(8x + 4h)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (8x + 4h) = 8x + 4 \cdot 0 = 8x
\end{aligned}$$

b) $f'(-10) = 8 \cdot (-10) = -80$

$f'(1) = 8 \cdot 1 = 8$

Vastaus a) $f'(x) = 8x$
b) $f'(-10) = -80$ ja $f'(1) = 8$

## 163

a) Määritetään funktion $f(x)=\frac{1}{x}$ derivaattafunktio laskemalla erotusosamäärän raja-arvo kohdassa $x$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x}{x(x+h)}-\frac{x+h}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{x^2+hx}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{x^2+hx}\right) = -\frac{1}{x^2+0\cdot x} = -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}
$$

b) Kuvaajalle kohtaan $-3$ piirretyn tangentin kulmakerroin on derivaatta kohdassa $3$.

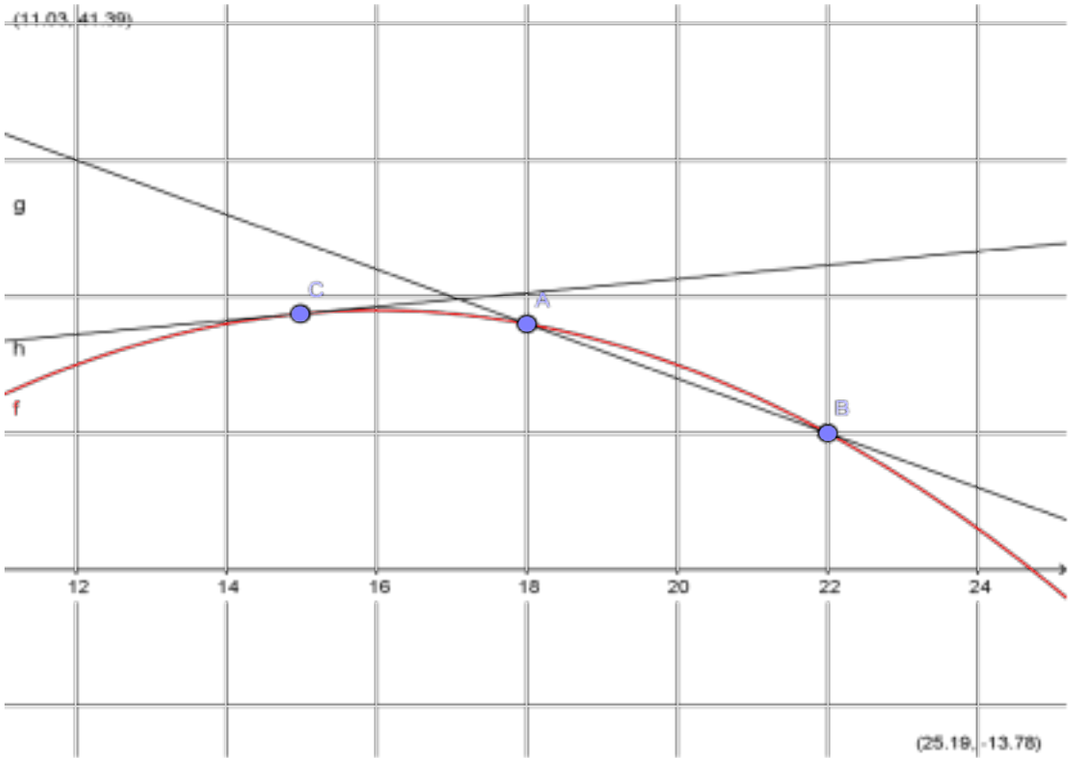
$$k = f'(-3) = -\frac{1}{(-3)^2} = -\frac{1}{9}$$

Vastaus a) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

b) $-\frac{1}{9}$

# 164

Piirretään laskimella funktion $f(x) = -0{,}25x^2 + 8x - 45$ kuvaaja.
Lisätään kuvaajaan sekantti ja tangentti.




a) Sekantti kulkee pisteiden A=(18, 18) ja B=(22, 10) kautta, joten kulmakertoimeksi saadaan.

$$\frac{10-18}{22-18} = -2$$

Muutos on siis $-2\,°\text{C} / \text{h}$.

b) Kohtaan 15 piirretyn tangentin kulmakertoimeksi saadaan geometriaohjelmasta 0,5. Muutosnopeus on siis $0{,}5\,°\text{C} / \text{h}$.

Vastaus a) $-2\,°\text{C} / \text{h}$
b) $0{,}5\,°\text{C} / \text{h}$

**165**

a) Muodostetaan ensin funktion $f(x) = 2x^2 - 1$ derivaattafunktio.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)^2 - 1 - (2x^2+1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2(x^2+2xh+h^2) - 2x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2x^2+4xh+2h^2-2x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4xh+2h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(4x+2h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (4x+2h) = 4x + 2\cdot 0 = 4x
\end{aligned}$$

Selvitetään, milloin derivaatan arvo on 10.

$$\begin{aligned}
4x &= 10 \\
x &= \frac{10}{4} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

b) Selvitetään, milloin derivaatan arvo on 0.

$$\begin{aligned}
4x &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}$$

Vastaus a) $x = \frac{5}{2}$ b) $x = 0$

# 166

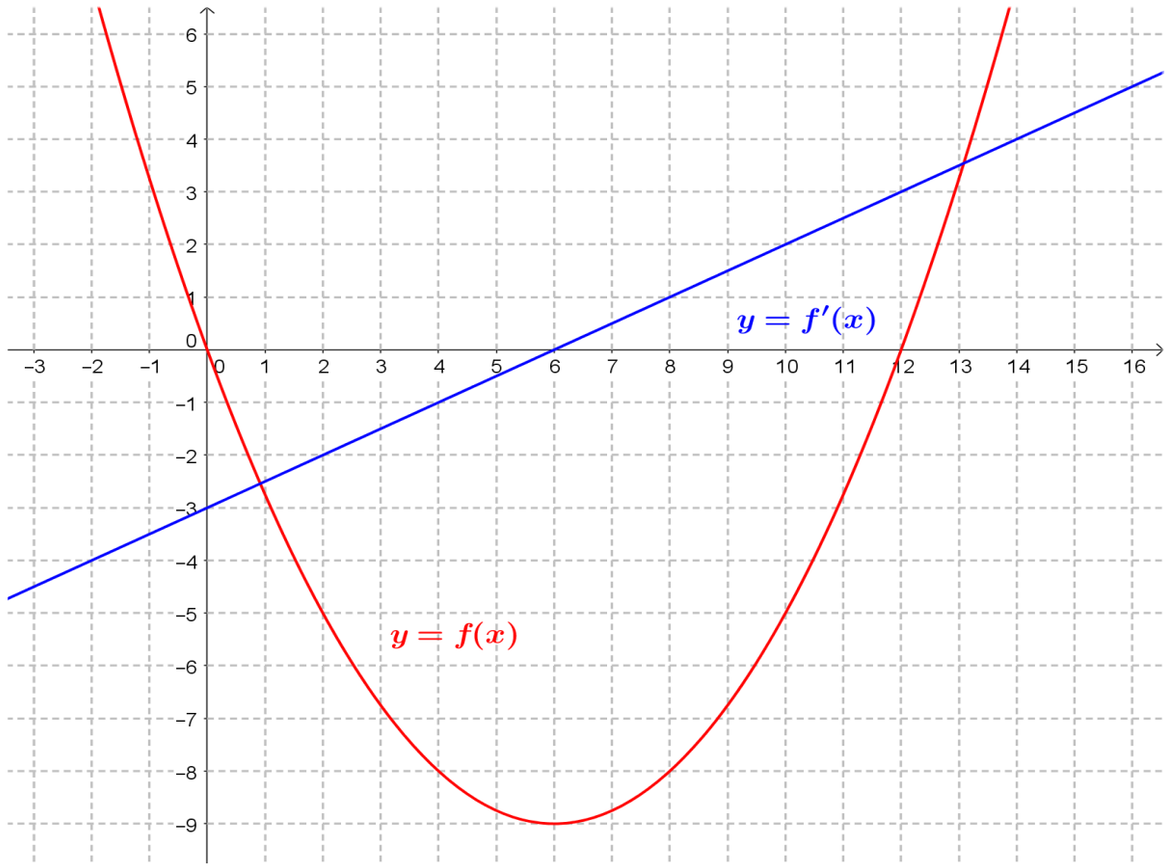
a) Määritetään funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x$ derivaattafunktio laskemalla erotusosamäärän raja-arvo kohdassa $x$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\frac{1}{4}(x+h)^2 - 3(x+h)) - (\frac{1}{4}x^2 - 3x)}{h}$$ lasketaan raja-arvo laskimella

$$= \frac{1}{2}x - 3$$

Piirretään laskimella $f$ ja $f'$.




b) Kun $f'(x) = 0$, funktion $f$ kuvaaja on hetkellisesti vaakasuorassa.

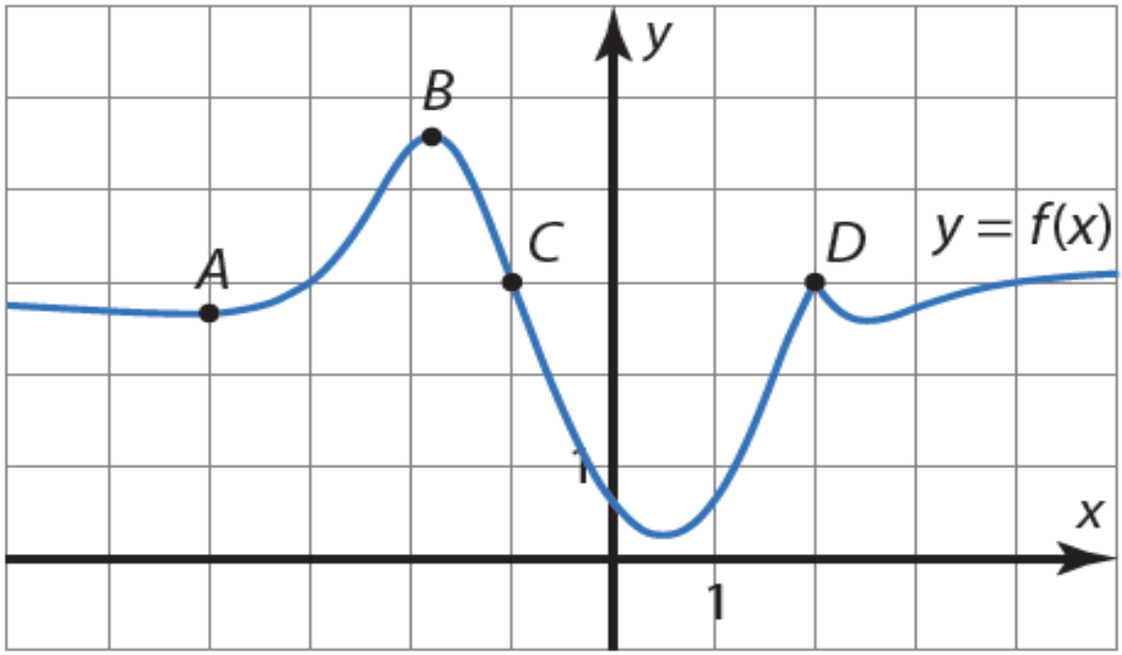
c) Kun $f'(x) < 0$, funktion kuvaaja on laskeva.

Vastaus a) $\frac{1}{2}x - 3$

c) Kuvaaja on (hetkellisesti) vaakasuora.

d) Kuvaaja on laskeva.

**167**




1) B

2) Derivaatan arvo on pienin kohdassa, jossa funktion kuvaaja laskee jyrkimmin. Näin tapahtuu pisteessä C.

3) Derivaattaa ei ole olemassa kohdassa, jossa kuvaaja katkeaa tai kuvaajalla on kärki. Kuvaajalla on kärki pisteessä D.

4) Derivaatta on nolla kohdissa, joissa funktion kuvaaja on (hetkellisesti) vaakasuora. Näin tapahtuu pisteissä A ja B.

Vastaus
a) B
b) C
c) D
d) A ja B

# 168

Piirretään tangentit kohtiin $-1$ ja 1.

a) Kohdassa $-1$ tangentti on vaakasuora, joten $f'(-1) = 0$.

b) Kohdassa 1 tangentin kulmakerroin on $\dfrac{2-(-1)}{1-0} = 3$,

joten $f'(1) = 3$.

Vastaus a) 0
b) 3

# 169

a) Muodostetaan funktion $f(x) = 3x^2 + 2$ erotusosamäärä kohdassa $-2$.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad a = -2$$

$$= \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} \qquad f(x) = 3x^3 + 2$$

$$= \frac{(3(-2+h)^3 + 2) - (3\cdot(-2)^3 + 2)}{h}$$

$$= \frac{3((-2)^3 + 3\cdot(-2)^2 h + 3\cdot(-2)h^2 + h^3) + 2 - (-22)}{h}$$

$$= \frac{-24 + 36h - 18h^2 + 3h^3 + 24}{h}$$

$$= \frac{h(3h^2 - 18h + 36)}{h}$$

$$= 3h^2 - 18h + 36, \text{ missä } h \neq 0.$$

b) Funktion derivaatta kohdassa $-2$ on erotusosamäärän raja-arvo, kun $h$ lähestyy lukua $0$.

$$\lim_{h\to 0}(3h^2 - 18h + 36) = 3\cdot 0^2 - 18\cdot 0 + 36 = 36$$

Vastaus a) $3h^2 - 18h + 36$, missä $h \neq 0$
b) $f'(-2) = 36$

**170**

a) Muodostetaan funktion $g(x) = \dfrac{2}{x^2 - 2}$ erotusosamäärä kohdassa 4.

$$\frac{g(a+h) - g(a)}{h} \qquad a = 4$$

$$= \frac{f(4+h) - f(4)}{h} \qquad g(x) = \frac{2}{x^2 - 2}$$

$$= \frac{\dfrac{2}{(4+h)^2 - 2} - \dfrac{2}{4^2 - 2}}{h}$$

$$= \frac{\dfrac{2}{16 + 8h + h^2 - 2} - \dfrac{1}{7}}{h}$$

$$= \frac{\dfrac{14}{7(14 + 8h + h^2)} - \dfrac{14 + 8h + h^2}{7(14 + 8h + h^2)}}{h}$$

$$= \frac{\dfrac{-8h - h^2}{7(14 + 8h + h^2)}}{h}$$

$$= \frac{\dfrac{h(-8 - h)}{7(14 + 8h + h^2)}}{h}$$

$$= \frac{-8 - h}{7(h^2 + 8h + 14)}, \text{ missä } h \neq 0.$$

b) Funktion derivaatta kohdassa $4$ on erotusosamäärän raja-arvo, kun $h$ lähestyy lukua $0$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{-8-h}{7(h^2+8h+14)}=\frac{-8-h}{7h^2+56h+98}=\frac{-8-0}{7\cdot 0^2+56\cdot 0+98}$$

$$=-\frac{8}{98}=-\frac{4}{49}$$

Vastaus a) $\dfrac{-8-h}{7(h^2+8h+14)}$, kun $h\neq 0$

b) $g'(4)=-\dfrac{4}{49}$

# 171

a) Lasketaan funktion $f(x) = 6x^2 + x - 5$ erotusosamäärän raja-arvo kohdassa $-2$.

$$\begin{aligned}
f'(-2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(6(-2+h)^2 + (-2+h) - 5) - (6 \cdot (-2)^2 + (-2) - 5)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{6(4 - 4h + h^2) - 2 + h - 5 - 17}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{24 - 24h + 6h^2 + h - 24}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{6h^2 - 23h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(6h - 23)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (6h - 23) = 6 \cdot 0 - 23 \\
&= -23
\end{aligned}$$

b) Lasketaan funktion $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ erotusosamäärän raja-arvo kohdassa $-2$.

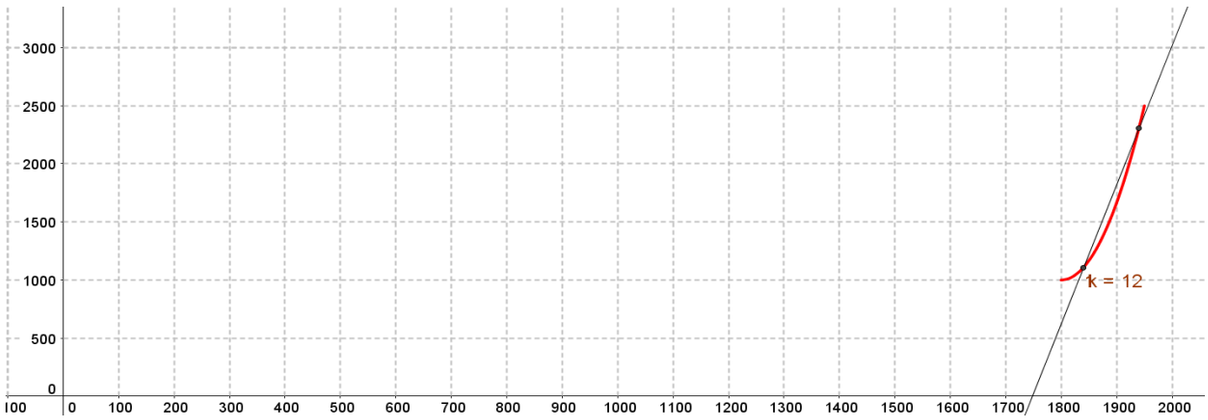
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{-2+h}{(-2+h)^2+1}-\dfrac{-2}{(-2)^2+1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{-2+h}{4-4h+h^2+1}+\dfrac{2}{5}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\overset{5)}{\dfrac{-2+h}{h^2-4h+5}}+\overset{h^2-4h+5)}{\dfrac{2}{5}}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{-10+5h}{5(h^2-4h+5)}+\dfrac{2h^2-8h+10}{5(h^2-4h+5)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{-10+5h+2h^2-8h+10}{5(h^2-4h+5)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2h^2-3h}{5(h^2-4h+5)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h(2h-3)}{5(h^2-4h+5)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2h-3}{5(h^2-4h+5)} = \frac{2\cdot 0-3}{5(0^2-4\cdot 0+5)} \\
&= -\frac{3}{25}
\end{aligned}
$$

Vastaus a) $-23$

b) $-\frac{3}{25}$

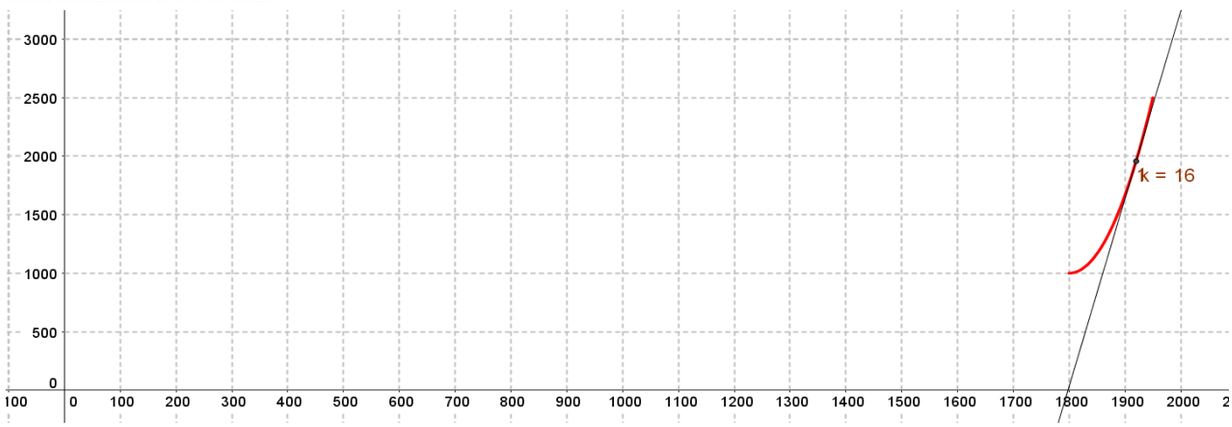
# 172

a) Piirretään laskimella funktion $f(x) = \frac{1}{15}x^2 - 240x + 217000$ kuvaaja välillä $1800 \le x \le 1950$. Lisätään kuvaajaan sekantti pisteiden $(1840, f(1840))$ ja $(1940, f(1940))$ kautta ja selvitetään sen kulmakerroin.




Sekantin kulmakerroin on 12, jolloin keskimääräinen väestön kasvunopeus oli 12 miljoonaa ihmistä/vuosi.

b) Lisätään kuvaajaan tangentti kohtaan 1920 ja selvitetään sen kulmakerroin.




Tangentin kulmakerroin on 16, jolloin hetkellinen väestön kasvunopeus oli 16 miljoonaa ihmistä/vuosi.

Vastaus a) 12 miljoonaa ihmistä/vuosi
b) 16 miljoonaa ihmistä/vuosi

# 173

a) Lasketaan funktion $f(x) = c$ erotusosamäärän raja-arvo kohdassa $x$.

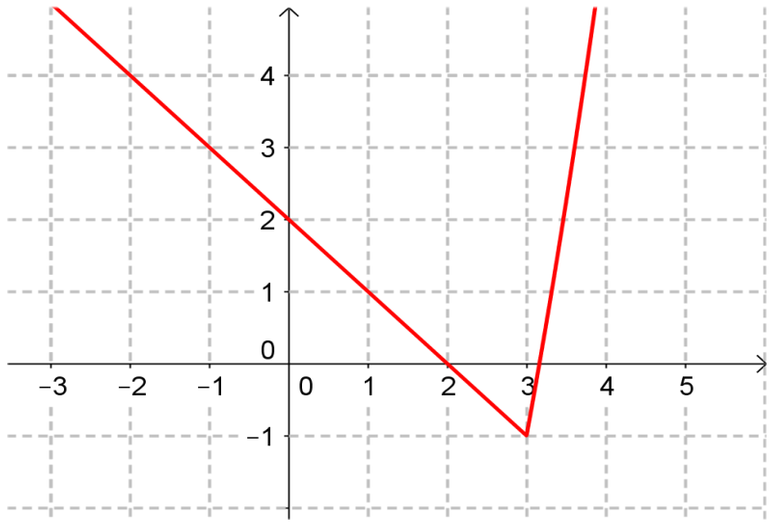
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) Lasketaan funktion $f(x) = kx + s$ erotusosamäärän raja-arvo kohdassa $x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(k(x+h)+s) - (kx+s)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{kx + kh + s - kx - s}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{kh}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} k \\ &= k \end{aligned}$$

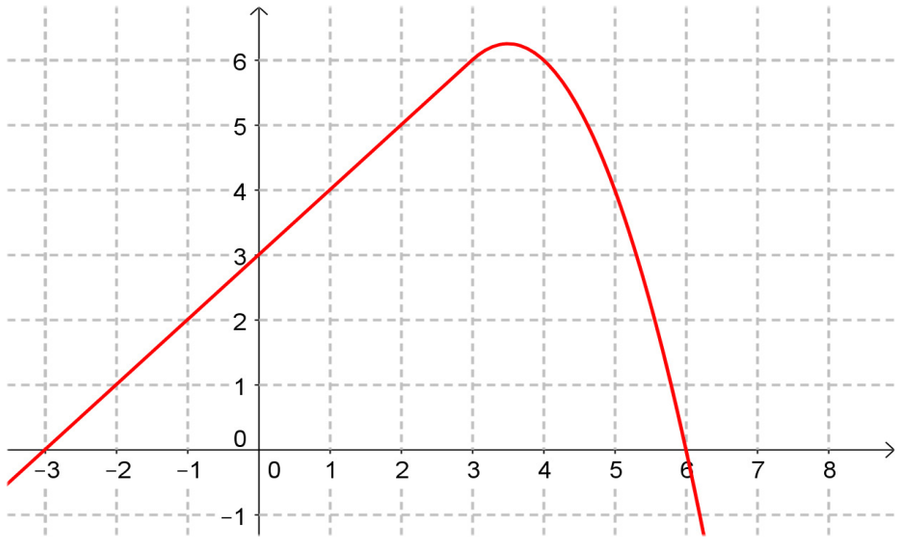
**174**

a) Piirretään funktion $f(x) = \begin{cases} -x+2, \text{ kun } x \le 3 \\ x^2 - 10, \text{ kun } x > 3 \end{cases}$ kuvaaja.



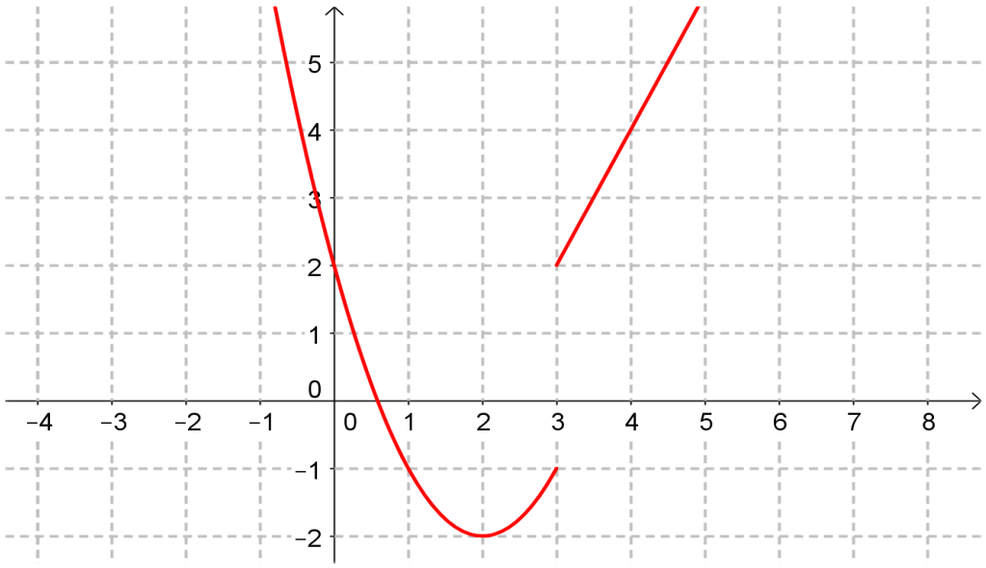

Kuvaajassa on kohdassa 3 kärki, joten funktio ei ole derivoituva kohdassa 3. Funktio on jatkuva kohdassa 3.

b) Piirretään funktion $f(x) = \begin{cases} x+3, \text{ kun } x < 3 \\ -x^2 + 7x - 6, \text{ kun } x \geq 3 \end{cases}$ kuvaaja.




Kuvaajan perusteella funktio $f$ näyttää olevan jatkuva ja derivoituva kohdassa 3.

c) Piirretään funktion $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 2, \text{ kun } x < 3 \\ 2x - 4, \text{ kun } x \geq 3 \end{cases}$ kuvaaja.




Funktio ei ole jatkuva kohdassa 3, joten se ei ole myöskään derivoituva kohdassa 3.

Vastaus
a) jatkuva, ei derivoituva
b) jatkuva ja derivoituva
c) ei jatkuva, ei derivoituva

**175**

Muodostetaan ja sievennetään funktion $f(x) = \frac{x}{x-4}$ erotusosamäärä kohdassa 3.

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(3)}{x-3} &= \frac{\frac{x}{x-4}-\frac{3}{3-4}}{x-3} \\
&= \frac{\frac{x}{x-4}+3}{x-3} \\
&= \frac{\frac{x}{x-4}+\frac{3(x-4)}{x-4}}{x-3} \\
&= \frac{\frac{x}{x-4}+\frac{3x-12}{x-4}}{x-3} \\
&= \frac{\frac{4x-12}{x-4}}{x-3} \\
&= \frac{4x-12}{x-4}\cdot\frac{1}{x-3} \\
&= \frac{4(x-3)}{x-4}\cdot\frac{1}{x-3} \\
&= \frac{4}{x-4}, \text{ kun } x \neq 3 \text{ ja } x \neq 4
\end{aligned}$$

$$f'(3) = \lim_{x\to 3}\frac{4}{x-4} = \frac{4}{3-4} = -4$$

Vastaus –4

# 176

a) Lasketaan funktion $f(x) = 2x^2 + 5x - 1$ erotusosamäärän raja-arvo kohdassa $-3$.

$$\begin{aligned} f'(-3) &= \lim_{x \to -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} \\ &= \lim_{x \to -3} \frac{2x^2 + 5x - 1 - (2(-3)^2 + 5 \cdot (-3) - 1)}{x + 3} \\ &= \lim_{x \to -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} \end{aligned}$$

Jaetaan osoittaja tekijöihin nollakohtiensa avulla. Ratkaistaan osoittajan nollakohdat.

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -3 \end{cases}$$

Jatketaan raja-arvon laskemista.

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} \\ &= \lim_{x \to -3} \frac{2(x + 3)(x - \frac{1}{2})}{x + 3} \\ &= \lim_{x \to -3} 2(x - \frac{1}{2}) \\ &= 2(-3 - \frac{1}{2}) = -7 \end{aligned}$$

Siis, $f'(-3) = -7$.

b) Lasketaan ensin funktion $f(x) = 2x^2 + 5x - 1$ erotusosamäärän raja-arvo kohdassa $a$.

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{2x^2 + 5x - 1 - (2a^2 + 5a - 1)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{2x^2 + 5x - 1 - 2a^2 - 5a + 1}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{2x^2 + 5x - 2a^2 - 5a}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{2(x^2 - a^2) + 5(x - a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{2(x + a)(x - a) + 5(x - a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{(x - a)(2(x + a) + 5)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} (2(x + a) + 5) \\
&= 2(a + a) + 5 \\
&= 4a + 5
\end{aligned}
$$

Vaihdetaan muuttuja $a$ muuttujaksi $x$.

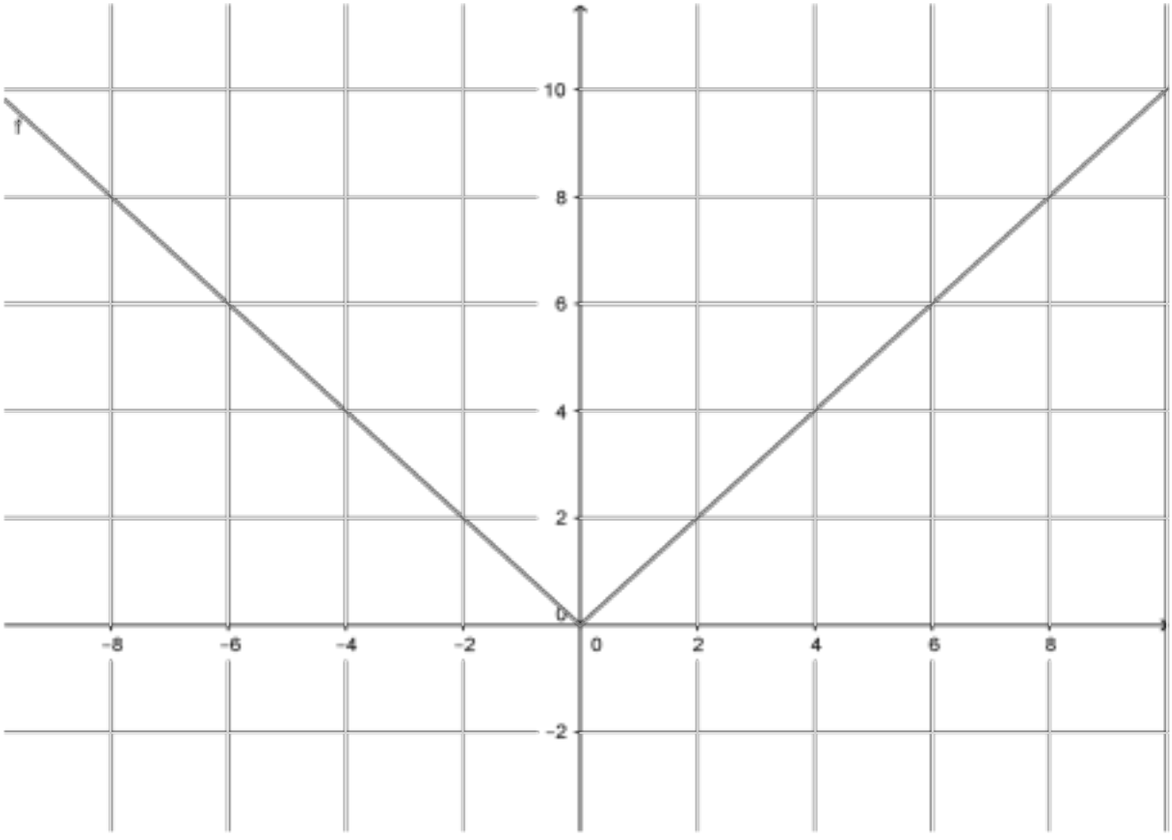
$f'(x) = 4x + 5$

Vastaus a) $f'(-3) = -7$

b) $f'(x) = 4x + 5$

# 177

a) Piirretään funktion $f(x) = |x|$ kuvaaja laskimella.




Funktio ei ole derivoituva kohdassa $x = 0$, sillä kuvaajassa on tässä kohdassa kärki.

b) Lasketaan ensin erotusosamäärän oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa $0$.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \qquad f(x)=|x|$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{|0+h|-|0|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{|h|}{h} \qquad h>0$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}1=1$$

Lasketaan sitten erotusosamäärän vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa $0$.

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{|0+h|-|0|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{|h|}{h} \qquad h<0$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{-h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}(-1)=-1$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat eri suuret, ei erotusosamäärällä ole raja-arvoa kohdassa $0$ eikä funktio $f$ ole tässä kohdassa derivoituva.

Vastaus

a) Ei ole derivoituva kohdassa $x = 0$.

b) Erotusosamäärän toispuoliset raja-arvot kohdassa $0$ ovat eri suuret

## 178

a) Lasketaan funktion $f(x) = x\,g(x)$ erotusosamäärän raja-arvo kohdassa 0.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(0+h)g(0+h)-0\cdot g(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{hg(h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} g(h) \qquad\qquad g \text{ on jatkuva kohdassa } 0 \\ &= g(0) \end{aligned}$$

Siis, $f'(0) = g(0)$.

b) a-kohdan perusteella funktion $f(x) = x(|x| + 1)$ derivaatta kohdassa 0 on funktion $g(x) = |x| + 1$ arvo kohdassa 0.

$$f'(0) = |0| + 1 = 1$$

Vastaus a) $f'(0) = g(0)$
b) $f'(0) = 1$

**179**

a) $\mathrm{D}\, x^8 = 8 \cdot x^{8-1} = 8x^7$

b) $\mathrm{D}(5x^3) = 5 \cdot \mathrm{D}\, x^3 = 5 \cdot 3x^{3-1} = 15x^2$

c) $\mathrm{D}(-2x^6) = -2 \cdot \mathrm{D}\, x^6 = -2 \cdot 6x^{6-1} = -12x^5$

d) $\mathrm{D}\, \frac{2x^{10}}{5} = \frac{2}{5} \mathrm{D} x^{10} = \frac{2}{5} \cdot 10x^{10-1} = 4x^9$

e) $\mathrm{D}(-17x) = -17 \cdot \mathrm{D}\, x = -17 \cdot 1 = -17$

f) $\mathrm{D}13 = 0$

**180**

a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}(2x^5 - 12x^3 + 5x) \\ &= \mathrm{D}(2x^5) - \mathrm{D}(12x^3) + \mathrm{D}(5x) \\ &= 2 \cdot 5x^{5-1} - 12 \cdot 3x^{3-1} + 5 \cdot 1 \\ &= 10x^4 - 36x^2 + 5 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g'(x) &= \mathrm{D}(3x^4 + \frac{3}{4}x^2 + 5) \\ &= \mathrm{D}(3x^4) + \mathrm{D}(\frac{3}{4}x^2) + \mathrm{D}(5) \\ &= 3 \cdot 4x^{4-1} + \frac{3}{4} \cdot 2x^{2-1} + 0 \\ &= 12x^3 + \frac{3}{2}x \end{aligned}$$

Vastaus a) $f'(x) = 10x^4 - 36x^2 + 5$

b) $g'(x) = 12x^3 + \frac{3}{2}x$

## 181

a) Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}(-2x^3 + x^2 - x + 1) \\ &= -2 \cdot 3x^{3-1} + 2x^{2-1} - 1 + 0 \\ &= -6x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa $2$.

$$f'(2) = -6 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 1 = -21$$

b) Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \mathrm{D}(125t^2 - 110t) \\ &= 125 \cdot 2t^{2-1} - 110 \\ &= 250t - 110 \end{aligned}$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa $2$.

$$f'(2) = 250 \cdot 2 - 110 = 390$$

Vastaus a) $f'(x) = -6x^2 + 2x - 1$, $f'(2) = -21$
b) $f'(t) = 250t - 110$, $f'(2) = 390$

## 182

a) Sievennetään lauseke polynomiksi.

$$f(x) = 2x^3(8 - 4x + x^2) = 16x^3 - 8x^4 + 2x^5$$

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}(2x^5 - 8x^4 + 16x^3) \\ &= 2 \cdot 5x^{5-1} - 8 \cdot 4x^{4-1} + 16 \cdot 3x^{3-1} \\ &= 10x^4 - 32x^3 + 48x^2 \end{aligned}$$

b) Sievennetään lauseke polynomiksi.

$$g(t) = 3t(t + 4)^2 = 3t(t^2 + 8t + 16) = 3t^3 + 24t^2 + 48t$$

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} g'(t) &= \mathrm{D}(3t^3 + 24t^2 + 48t) \\ &= 3 \cdot 3t^{3-1} + 24 \cdot 2t^{2-1} + 48 \\ &= 9t^2 + 48t + 48 \end{aligned}$$

Vastaus a) $f'(x) = 10x^4 - 32x^3 + 48x^2$

b) $g'(t) = 9t^2 + 48t + 48$

## 183

a) Derivoidaan funktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}\left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x + 2\right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot 3x^{3-1} + \frac{5}{2} \cdot 2x^{2-1} - 3 + 0 \\ &= 2x^2 + 5x - 3 \end{aligned}$$

b) Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa 0.

$$f'(0) = 2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 - 3 = -3$$

c) Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$x = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2} \qquad \text{tai} \qquad x = \frac{-5-7}{4} = -3$$

Vastaus a) $f'(x) = 2x^2 + 5x - 3$

b) $f'(0) = -3$

c) $x = -3$ ja $x = \frac{1}{2}$

## 184

Funktion arvojen hetkellisen muutosnopeuden ilmaisee derivaattafunktio. Derivoidaan funktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}(-2x^2 + 6x - 1) \\ &= -2 \cdot 2x^{2-1} + 6 - 0 \\ &= -4x + 6 \end{aligned}$$

a) Ratkaistaan milloin derivaattafunktio saa arvon 0.

$$\begin{aligned} -4x + 6 &= 0 \\ -4x &= -6 \\ x &= \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

b) Ratkaistaan milloin derivaattafunktio saa arvon 2.

$$\begin{aligned} -4x + 6 &= 2 \\ -4x &= -4 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Vastaus a) $x = \frac{3}{2}$ b) $x = 1$

## 185

Hetkellisen putoamisnopeuden ilmaisee derivaattafunktio $s'$.
Derivoidaan funktio.

$$\begin{aligned} s'(t) &= \mathrm{D}(4{,}9t^2) \\ &= 4{,}9 \cdot 2t^{2-1} \\ &= 9{,}8t \end{aligned}$$

a) Lasketaan putoamisnopeus ajanhetkellä $t = 2$ eli derivaatan arvo kohdassa 2.

$$s'(2) = 9{,}8 \cdot 2 = 19{,}6 \text{ (m/s)}$$

b) Lasketaan putoamisnopeus ajanhetkellä $t = 3$ eli derivaatan arvo kohdassa 3.

$$s'(3) = 9{,}8 \cdot 3 = 29{,}4 \text{ (m/s)}$$

Vastaus a) 19,6 m/s
b) 29,4 m/s

## 186

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}(3x^4 - px^3 - x^2 + 1) \\ &= 3 \cdot 4x^{4-1} - 3px^{3-1} - 2x^{2-1} + 0 \\ &= 12x^3 - 3px^2 - 2x \end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakion $p$ arvo.

$$\begin{aligned} f'(1) &= 4 \\ 12 \cdot 1^3 - 3p \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 &= 4 \\ 12 - 3p - 2 &= 4 \\ -3p &= -6 \\ p &= 2 \end{aligned}$$

Vastaus $p = 2$

## 187

Derivoidaan funktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}(-3x^2 + 12x - 5) \\ &= -3 \cdot 2x^{2-1} + 12 - 0 \\ &= -6x + 12 \end{aligned}$$

Ratkaistaan, millä muuttujan $x$ arvoilla derivaatta on positiivinen.

$-6x + 12 > 0$ Epäyhtälön voi ratkaista myös laskimella.

$$\begin{aligned} -6x &> -12 \\ x &< \frac{-12}{-6} \\ x &< 2 \end{aligned}$$

Vastaus $x < 2$

## 188

a) Derivoidaan funktio.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \mathrm{D}\Big(3x(x^2+2x)\Big) \\ &= \mathrm{D}(3x)\cdot(x^2+2x)+3x\cdot\mathrm{D}(x^2+2x) \\ &= 3(x^2+2x)+3x(2x+2) \\ &= 3x^2+6x+6x^2+6x \\ &= 9x^2+12x \end{aligned}$$

b) Derivoidaan funktio.

$$\begin{aligned} s'(x) &= \mathrm{D}\Big((2x-5)(6x^3+4)\Big) \\ &= \mathrm{D}(2x-5)\cdot(6x^3+4)+(2x-5)\cdot\mathrm{D}(6x^3+4) \\ &= 2(6x^3+4)+(2x-5)\cdot 18x^2 \\ &= 12x^3+8+36x^3+90x^2 \\ &= 48x^3+90x^2+8 \end{aligned}$$

Vastaus a) $h'(x) = 9x^2+12x$

b) $s'(x) = 48x^3+90x^2+8$

**189**

a) $\mathrm{D}\,2x^3 = 2 \cdot \mathrm{D}\,x^3 = 2 \cdot 3x^{3-1} = 6x^2$

b) $\mathrm{D}\,(-3x^{12}) = -3 \cdot \mathrm{D}\,x^{12} = -3 \cdot 12x^{12-1} = -36x^{11}$

c) $\mathrm{D}\,\frac{2x^4}{5} = \frac{2}{5} \cdot \mathrm{D}\,x^4 = \frac{2}{5} \cdot 4x^{4-1} = \frac{8x^3}{5}$

d) $\mathrm{D}\,\frac{x^8}{4} = \frac{1}{4} \cdot \mathrm{D}\,x^8 = \frac{1}{4} \cdot 8x^{8-1} = 2x^7$

e) $\mathrm{D}\,2017 = 0$

f) $\mathrm{D}\,(x\sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot \mathrm{D}\,x = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$

# 190

a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}(3x^4 - 5x^2 + 36x + 2) \\ &= 3 \cdot 4x^{4-1} - 5 \cdot 2x^{2-1} + 36 + 0 \\ &= 12x^3 - 10x + 36 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g'(t) &= \mathrm{D}(\frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{8}t^2 + t + \pi) \\ &= \frac{2}{3} \cdot 3t^{3-1} - \frac{3}{8} \cdot 2t^{2-1} + 1 + 0 \\ &= 2t^2 - \frac{3}{4}t + 1 \end{aligned}$$

Vastaus a) $f'(x) == 12x^3 - 10x + 36$

b) $g'(t) = 2t^2 - \frac{3}{4}t + 1$

## 191

a) Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \mathrm{D}(2t^8 - 5t^4 + 15t^3) \\ &= 2 \cdot 8t^{8-1} - 5 \cdot 4t^{4-1} + 15 \cdot 3t^{3-1} \\ &= 16t^7 - 20t^3 + 45t^2 \end{aligned}$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa $-1$.

$$\begin{aligned} f'(-1) &= 16 \cdot (-1)^7 - 20 \cdot (-1)^3 + 45 \cdot (-1)^2 \\ &= -16 + 20 + 45 = 49 \end{aligned}$$

b) Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \mathrm{D}\left(4x(11 - 2x^4)\right) \qquad \text{Sievennetään lauseke polynomiksi.} \\ &= \mathrm{D}(44x - 8x^5) \\ &= 44 - 8 \cdot 5x^{5-1} \\ &= 44 - 40x^4 \end{aligned}$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa $-1$.

$$g'(-1) = 44 - 40 \cdot (-1)^4 = 44 - 40 = 4$$

Vastaus a) $f'(-1) = 49$
b) $g'(-1) = 4$

## 192

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}(x^2 + bx + c) \\ &= 2x^{2-1} + b + 0 \\ &= 2x + b \end{aligned}$$

Muodostetaan annetuista tiedoista yhtälöpari.

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = 5 \end{cases} \qquad \begin{aligned} f(x) &= x^2 + bx + z \\ f'(x) &= 2x + b \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 1^2 + b \cdot 1 + c = 2 \\ 2 \cdot 1 + b = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + c = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

Sijoitetaan $b = 3$ ylempään yhtälöön.

$$\begin{aligned} 3 + c &= 1 \\ c &= -2 \end{aligned}$$

Vastaus $b = 3$ ja $c = -2$

## 193

Kiven hetkellisen nopeuden ilmaisee derivaattafunktio $h'$.
Derivoidaan funktio.

$$\begin{aligned} h'(t) &= \mathrm{D}(18t - 5t^2) \\ &= 18 - 5 \cdot 2t \\ &= 18 - 10t \end{aligned}$$

a) Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdissa $t = 1$ ja $t = 2$.

$h'(1) = 18 - 10 \cdot 1 = 8$ (m/s)

$h'(2) = 18 - 10 \cdot 2 = -2$ (m/s)

b) Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} h'(t) &= 0 \\ 18 - 10t &= 0 \\ t &= 1{,}8 \text{ (s)} \end{aligned}$$

c) Kivi oli korkeimmillaan ajanhetkellä $t = 1{,}8$.

$h(1{,}8) = 18 \cdot 1{,}8 - 5 \cdot 1{,}8^2 = 16{,}2$ (m)

Vastaus a) 8 m/s ja –2 m/s
b) 1,8 s
c) 16 m

# 194

Funktion kuvaajan jyrkkyyden ilmaisee derivaattafunktio.
Derivoidaan molemmat funktiot.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}\left(\frac{3}{2}x^4 + 15\right) \\ &= \frac{3}{2} \cdot 4x^3 + 0 \\ &= 6x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \mathrm{D}(10x^3 - 12x^2 - 7) \\ &= 10 \cdot 3x^2 - 12 \cdot 2x^1 - 0 \\ &= 30x^2 - 24x \end{aligned}$$

a) Lasketaan molempien derivaattafunktioiden arvo kohdassa $x = 2$.

$$f'(2) = 6 \cdot 2^3 = 48$$

$$g'(2) = 30 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 = 72$$

Funktion $g$ kuvaaja on jyrkempi, koska sen derivaatta kohdassa $x = 2$ on suurempi.

b) Ratkaistaan millä muuttujan $x$ arvoilla derivaattafunktioiden arvot ovat yhtä suuret.

$$f'(x) = g'(x)$$
$$6x^3 = 30x^2 - 24x$$
$$6x^3 - 30x^2 + 24x = 0$$
$$6x(x^2 - 5x + 4) = 0$$

$6x = 0$ tai $x^2 - 5x + 4 = 0$

$x = 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{5+3}{2} = 4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{5-3}{2} = 1$$

$x = 0$ tai $x = 1$ tai $x = 4$

Vastaus a) Funktion $g$ kuvaaja on jyrkempi kohdassa $x = 2$.
b) $x = 0$, $x = 1$ tai $x = 4$

# 195

Derivoidaan funktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}(2x^3 - 9x^2 - 24x) \\ &= 2 \cdot 3x^2 - 9 \cdot 2x^1 - 24 \\ &= 6x^2 - 18x - 24 \end{aligned}$$

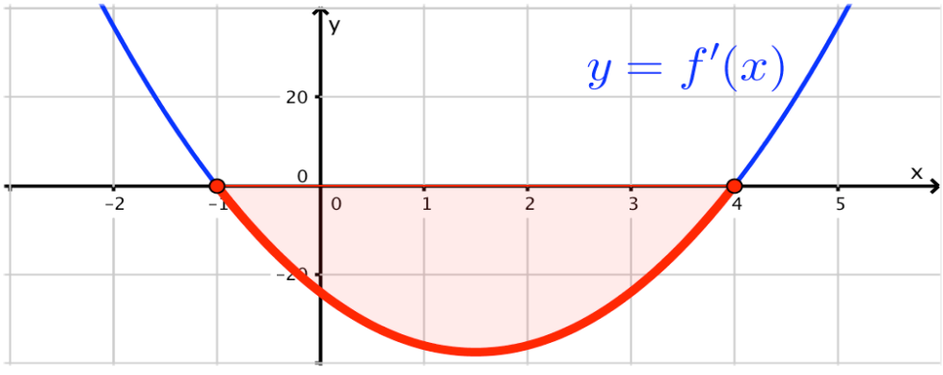
Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \\ 6x^2 - 18x - 24 &< 0 \qquad \text{Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.} \\ -1 &< x < 4 \end{aligned}$$

Vastaus $-1 < x < 4$

**Graafinen tarkistus**

Derivaattafunktion $f'(x) = 6x^2 - 18x - 24$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



**196**

Käytetään tulon derivointisääntöä.

$$\begin{aligned}
&f'(x)\\
&= \mathrm{D}\Big((2x^3-5x+1)(4x^4-2x^2-1)\Big)\\
&= \mathrm{D}(2x^3-5x+1)\cdot(4x^4-2x^2-1)+(2x^3-5x+1)\cdot\mathrm{D}(4x^4-2x^2-1)\\
&= (6x^2-5)(4x^4-2x^2-1)+(2x^3-5x+1)(16x^3-4x)
\end{aligned}$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa $1$.

$$\begin{aligned}
f'(1) &= (6\cdot 1^2-5)(4\cdot 1^4-2\cdot 1^2-1)+(2\cdot 1^3-5\cdot 1+1)(16\cdot 1^3-4\cdot 1)\\
&= 1\cdot 1+(-2)\cdot 12\\
&= -23
\end{aligned}$$

Vastaus

$$\begin{aligned}
&f'(x) = (6x^2-5)(4x^4-2x^2-1)+(2x^3-5x+1)(16x^3-4x)\\
&f'(1) = -23
\end{aligned}$$

**197**

Derivoidaan funktio $s$ tulon derivointisäännöllä.

$$\begin{aligned} s'(x) &= \mathrm{D}(x^3 \cdot g(x)) \\ &= \mathrm{D}\,x^3 \cdot g(x) + x^3 \cdot \mathrm{D}(g(x)) \\ &= 3x^2 \cdot g(x) + x^3 \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Lasketaan funktion $s$ derivaatta kohdassa $x = 2$.

$$\begin{aligned} s'(2) &= 3 \cdot 2^2 \cdot g(2) + 2^3 \cdot g'(2) \qquad \text{Sijoitetaan } g(2) = 5 \text{ ja } g'(2) = -3. \\ &= 3 \cdot 2^2 \cdot 5 + 2^3 \cdot (-3) \\ &= 36 \end{aligned}$$

Vastaus $s'(2) = 36$

## 198

a) Derivoidaan funktio $f$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}(5x^2 + 14x - 3) \\ &= 5 \cdot 2x + 14 \\ &= 10x + 14 \end{aligned}$$

b) Derivoidaan funktio $f'$.

$$f''(x) = \mathrm{D}(10x + 14) = 10$$

c) Derivoidaan funktio $f''$.

$$f'''(x) = \mathrm{D}10 = 0$$

Vastaus a) $f'(x) = 10x + 14$
b) $f''(x) = 10$
c) $f'''(x) = 0$

## 199

Toisen asteen polynomifunktio on muotoa $f(x) = ax^2 + bx + c$, missä $a \neq 0$.

Määritetään derivaattafunktio $f'$ ja toinen derivaattafunktio $f''$.

$$f'(x) = \mathrm{D}(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$$

$$f''(x) = \mathrm{D}(2ax + b) = 2a$$

Ehdosta $f''(2) = 6$ saadaan yhtälö, josta voidaan ratkaista vakio $a$.

$$\begin{aligned} f''(2) &= 6 \\ 2a &= 6 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

Tällöin $f'(x) == 2ax + b = 2 \cdot 3 \cdot x + b = 6x + b$.
Ehdosta $f'(2) = -2$ saadaan yhtälö, josta voidaan ratkaista vakio $b$.

$$\begin{aligned} f'(2) &= -2 \\ 6 \cdot 2 + b &= -2 \\ b &= -14 \end{aligned}$$

Tällöin $f(x) = ax^2 + bx + c = 3x^2 - 14x + c$.
Ehdosta $f(2) = 4$ saadaan yhtälö, josta voidaan ratkaista vakio $c$.

$$\begin{aligned} f(2) &= 4 \\ 3 \cdot 2^2 - 14 \cdot 2 + c &= 4 \\ -16 + c &= 4 \\ c &= 20 \end{aligned}$$

Funktion $f$ lausekkeeksi saadaan $f(x) = 3x^2 - 14x + 20$.

Vastaus $f(x) = 3x^2 - 14x + 20$

**200**

a) Funktion $f(x)$ muuttujana on $x$, joten $t$ on vakio.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3 + 5t^3x - 2t^2) \\ &= 3x^{3-1} + 5t^3 \cdot 1 - 0 \\ &= 3x^2 + 5t^3\end{aligned}$$

b) Funktion $f(t)$ muuttujana on $t$, joten $x$ on vakio.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^3 + 5t^3x - 2t^2) \\ &= 0 + 5x \cdot 3t^{3-1} - 2 \cdot 2t^{2-1} \\ &= 15xt^2 - 4t\end{aligned}$$

Vastaus a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = 3x^2 + 5t^3$

b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) = 15xt^2 - 4t$

# 201

Olkoon funktio $p(x) = k \cdot f(x)$, missä $k$ on reaaliluku ja $f$ derivoituva funktio. Osoitetaan, että $p'(x) = k \cdot f'(x)$.

Määritetään derivaatta erotusosamäärän raja-arvona.

$$
\begin{aligned}
p'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{k \cdot f(x+h) - k \cdot f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{k \cdot \big(f(x+h) - f(x)\big)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left( k \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) && \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} \big(k \cdot f(x)\big) = k \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x), \\ \text{kun } k \text{ on vakio.} \end{array} \right. \\
&= k \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} && \left| \text{Funktio } f \text{ on derivoituva.} \right. \\
&= k \cdot f'(x)
\end{aligned}
$$

On siis osoitettu, että $\mathrm{D}\big(k \cdot f(x)\big) = k \cdot f'(x)$. □

# 202

**Väite** $\mathrm{D}\,x^n = nx^{n-1}$ kaikilla $n = 2, 3, 4, \ldots$

**Todistus** **1) Alkuaskel**

Osoitetaan väite todeksi, kun $n = 2$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\,x^2 &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} \\
&= \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x
\end{aligned}$$

Toisaalta $\mathrm{D}\,x^2 = 2 \cdot x^{2-1} = 2x^1 = 2x$ .

Siis alkuaskel on tosi.

## 2) Induktioaskel

**Induktio-oletus:**

$\mathrm{D}\,x^n = n \cdot x^{n-1}$ mielivaltaisella $n = 2, 3, 4, \ldots$

**Induktioväite:**

$\mathrm{D}\,x^{n+1} = (n+1) \cdot x^{(n+1)-1} = (n+1) \cdot x^n$

**Induktioväitteen todistus:**

Muokataan induktioväitteen vasenta puolta induktio-oletuksen perusteella sekä tulon derivointikaavalla.

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\,x^{n+1} &= \mathrm{D}(x^n \cdot x^1) \\
&= \mathrm{D}(x \cdot x^n) && \text{Tulon derivaatta.} \\
&= \mathrm{D}\,x \cdot x^n + x \cdot \mathrm{D}\,x^n && \left|\begin{array}{l}\text{Induktio-oletus:} \\ \mathrm{D}\,x^n = n \cdot x^{n-1}\end{array}\right. \\
&= 1 \cdot x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} \\
&= x^n + n \cdot x^{1+(n-1)} \\
&= x^n + n \cdot x^n \\
&= x^n (1+n) \\
&= (n+1)x^n
\end{aligned}$$

Siis induktioväite on todistettu.

On todistettu alkuaskel ja induktioaskel.
Väite on näin todistettu. □

# 203

a) Funktio on kasvava, kun kuvaaja on nouseva eli välillä $-3 \le x \le -1$ ja välillä $1 \le x \le 7$.

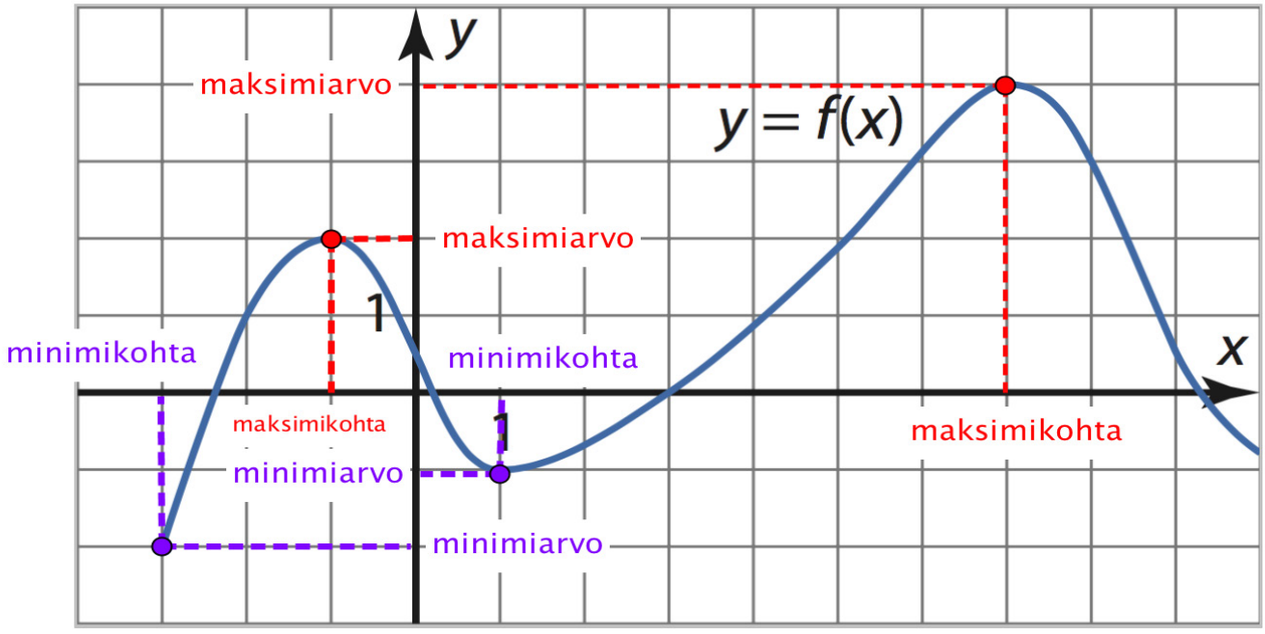
Funktio on vähenevä, kun funktion kuvaaja on laskeva eli välillä $-1 \le x \le 1$ ja välillä $x \ge 7$.

b) Funktiolla on kaksi maksimikohtaa: $x = -1$ ja $x = 7$.

Funktiolla on kaksi minimikohtaa: $x = -3$ ja $x = 1$.

c) Funktiolla on kaksi maksimiarvoa: $f(-1) = 2$ ja $f(7) = 4$.

Funktiolla on kaksi minimiarvoa: $f(-3) = -2$ ja $f(1) = -1$.



# 204

a) Derivaattafunktion arvo on negatiivinen, kun $x < 2$, ja positiivinen, kun $x > 2$.

Funktio on siis aidosti vähenevä, kun $x \leq 2$, ja aidosti kasvava, kun $x \geq 2$.

Oikea väite on numero 3.

b) Derivaattafunktion arvo on negatiivinen, kun $0 < x < 4$, ja positiivinen, kun $x < 1$ tai $x > 4$.

Funktio on siis aidosti vähenevä, kun $0 \leq x \leq 4$, ja aidosti kasvava, kun $x \leq 1$ tai $x \geq 4$.

Oikea väite on numero 4.

c) Derivaattafunktion arvo on aina negatiivinen.

Funktio on siis aidosti vähenevä kaikkialla.

Oikea väite on numero 2.

Vastaus a) 3 b) 4 c) 2

# 205

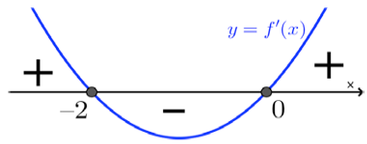
a) Tutkitaan, missä kohdissa funktion $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$ derivaattafunktion $f'$ arvot ovat positiivisia ja missä negatiivisia.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 3x^2 + 6x$

Derivaattafunktio $f'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$3x^2 + 6x = 0$$
$$3x(x+2) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x + 2 = 0$$
$$x = -2$$

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat ovat $x = -2$ ja $x = 0$.




| | | $-2$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | + | − | | + |
| $f$ | | ↗ | ↘ | | ↗ |

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio $f$ on aidosti kasvava välillä $x \le -2$ ja välillä $x \ge 0$.

Funktio $f$ on aidosti vähenevä välillä $-2 \le x \le 0$.

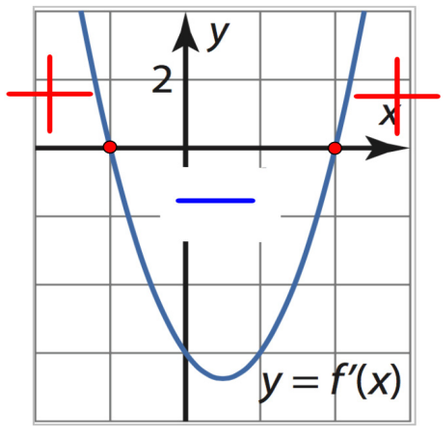
b) Funktio on aidosti kasvava, kun $x \geq 0$. Siis mitä suurempi on muuttujan arvo, sitä suurempi on funktion arvo. Täten $f(1,0000002) > f(1,0000001)$.

Vastaus a) aidosti kasvava välillä $x \leq -2$ ja välillä $x \geq 0$, aidosti vähenevä välillä $-2 \leq x \leq 0$

b) $f(1,0000002)$ on suurempi

## 206

a) Derivaattafunktion nollakohdat ovat $x = -1$ ja $x = 2$.




Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio.

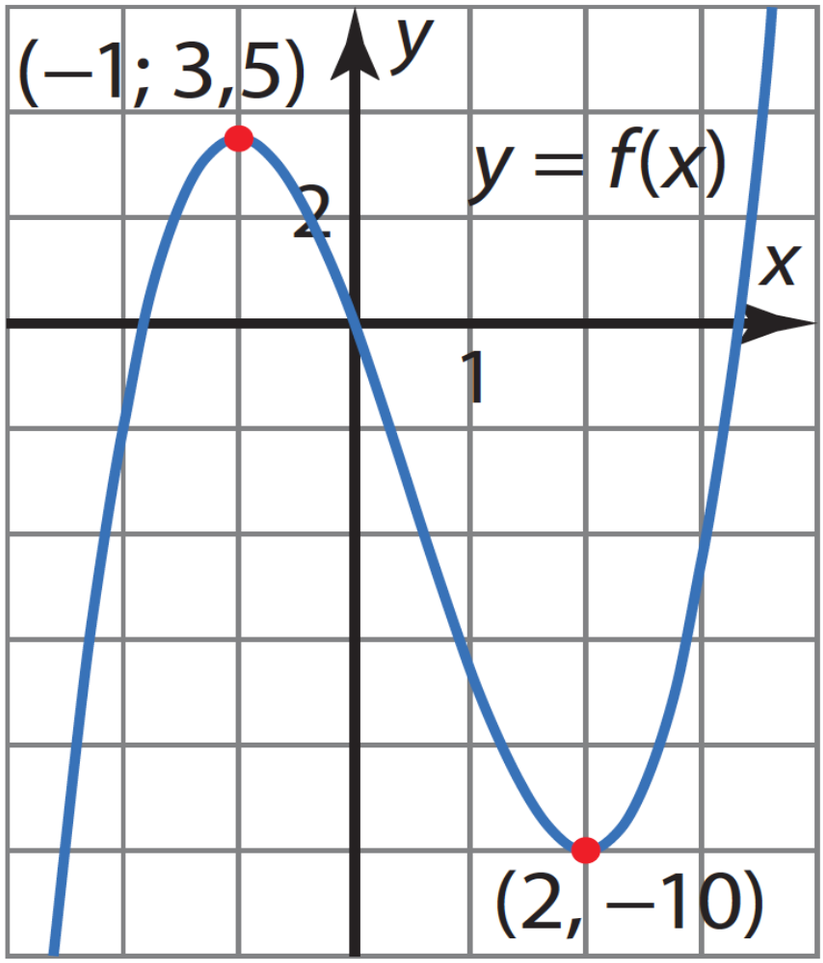
| | | $-1$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | | $-$ | | $+$ |
| $f$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

b) Funktio $f$ on kasvava välillä $x \le -1$ ja välillä $x \ge 2$.

Funktio $f$ on vähenevä välillä $-1 \le x \le 2$.

c) Kulkukaavion perusteella funktiolla on maksimikohta $x = -1$ ja minimikohta $x = 2$.

d) Funktiolla on maksimipiste $(-1;\ 3{,}5)$ ja minimipiste $(2,\ -10)$. Funktion kuvaaja voi olla esimerkiksi kuvan mukainen.




Vastaus b) kasvava välillä $x \le -1$ ja välillä $x \ge 2$,
vähenevä välillä $-1 \le x \le 2$

c) maksimikohta $x = -1$, minimikohta $x = 2$

# 207

**Funktio $f(x)$**

Funktio $f$ on aidosti kasvava, kun $x \leq 0$, ja aidosti vähenevä, kun $x \geq 0$.

Derivaattafunktion $f'$ arvo on siis negatiivinen, kun $x < 0$, ja positiivinen, kun $x > 0$.

Ainoa vaihtoehto tällöin on kuvaaja 4.

**Funktio $g(x)$**

Funktiolla $g$ on kaksi ääriarvoa, joten derivaattafunktiolla $g'$ on kaksi nollakohtaa.

Ainoa vaihtoehto tällöin on kuvaaja 1.

**Funktio $h(x)$**

Funktio $h(x)$ on aidosti kasvava kaikkialla, joten sen derivaatta on aina positiivinen.

Ainoa vaihtoehto tällöin on kuvaaja 3.

Vastaus $f(x)$ 4, $g(x)$ 1, $h(x)$ 3.

**Huomaa:** Oikeat derivaattafunktioiden kuvaajat voi päätellä muillakin tavoilla.

# 208

Funktion $f(x) = -3x^4 - 4x^3 + 36x^2$ kulku päätellään derivaattafunktion $f'$ merkeistä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = -12x^3 - 12x^2 + 72x$.

Derivaattafunktio $f'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$-12x^3 - 12x^2 + 72x = 0$$
$$-12x(x^2 + x - 6) = 0$$

$-12x = 0$ tai $x^2 + x - 6 = 0$

$x = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{-1 + 5}{2} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1 - 5}{2} = -3$$

Nollakohdat $-3$, $0$ ja $2$ jakavat lukusuoran neljään osaan. Päätellään derivaattafunktion merkit laskemalla yksi derivaattafunktion arvo jokaiselta osaväliltä ja laaditaan funktion $f$ kulkukaavio.

$$f'(x) = -12x^3 - 12x^2 + 72x$$

$$f'(-4) = -12 \cdot (-4)^3 - 12 \cdot (-2)^2 + 72 \cdot (-4) = 288 > 0$$

$$f'(-1) = -12 \cdot (-1)^3 - 12 \cdot (-1)^2 + 72 \cdot (-1) = -72 < 0$$

$$f'(1) = -12 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1^2 + 72 \cdot 1 = 48 > 0$$

$$f'(3) = -12 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 72 \cdot 3 = -216 < 0$$

| | $-3$ | | $0$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | + | | − | | + | − |
| $f$ | ↗ | | ↘ | | ↗ | ↘ |
| | | max | | min | | max |

Kulkukaavion perusteella funktion $f$ maksimikohdat ovat $x = -3$ ja $x = 2$ ja minimikohta on $x = 0$.

Vastaus maksimikohdat $x = -3$ ja $x = 2$, minimikohta $x = 0$

## 209

a) Funktion kulku päätellään derivaattafunktion $f'$ merkeistä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 6x^2 + 18x - 24$.

Derivaattafunktio $f'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$6x^2 + 18x - 24 = 0 \quad |:6$$
$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$
$$x = \frac{-3 + 5}{2} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-3 - 5}{2} = -4$$

Nollakohdat $-4$ ja $1$ jakavat lukusuoran kolmeen osaan. Päätellään derivaattafunktion merkit laskemalla yksi derivaattafunktion arvo jokaiselta osaväliltä ja laaditaan funktion $f$ kulkukaavio.

$$f'(x) = 6x^2 + 18x - 24$$
$$f'(-5) = 6 \cdot (-5)^2 + 18 \cdot (-5) - 24 = 36 > 0$$
$$f'(0) = 6 \cdot 0^2 + 18 \cdot 0 - 24 = -24 < 0$$
$$f'(2) = 6 \cdot 2^2 + 18 \cdot 2 - 24 = 36 > 0$$

| | $-4$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ $+$ |
| $f$ | ↗ | max | ↘ | min ↗ |

Kulkukaavion perusteella funktio $f$ on aidosti kasvava välillä $x \le -4$ ja välillä $x \ge 1$.

Funktio $f$ on aidosti vähenevä välillä $-4 \le x \le 1$.

b) Kulkukaavion perusteella funktiolla on maksimikohta $x = -4$ ja minimikohta $x = 1$.

Vastaus a) aidosti kasvava välillä $x \le -4$ ja välillä $x \ge 1$, aidosti vähenevä, kun $-4 \le x \le 1$
b) maksimikohta $x = -4$, minimikohta $x = 1$

**Huomaa:** Derivaattafunktion merkit voi päätellä myös havaitsemalla, että derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

**210**

a) Funktion $f(x) = x^4 + 2x^3$ kulku päätellään derivaattafunktion $f'$ merkeistä.

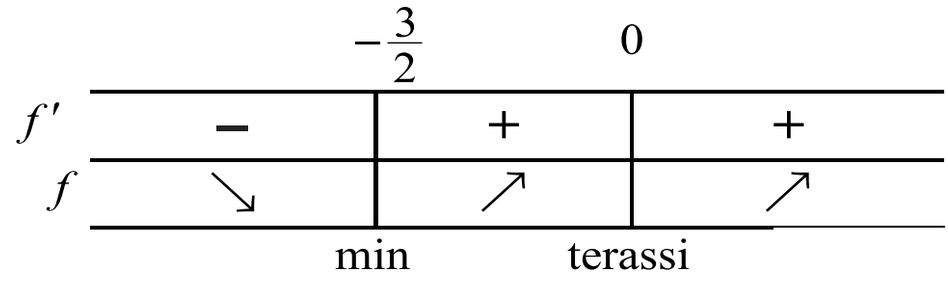
Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 4x^3 + 6x^2$.

Derivaattafunktio $f'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$4x^3 + 6x^2 = 0$$
$$x^2(4x + 6) = 0$$
$$x^2 = 0 \quad \text{tai} \quad 4x + 6 = 0$$
$$x = 0 \qquad\qquad x = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Nollakohdat jakavat lukusuoran kolmeen osaan. Päätellään derivaattafunktion merkit laskemalla yksi derivaattafunktion arvo jokaiselta osaväliltä ja laaditaan funktion $f$ kulkukaavio.

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2$$
$$f'(-2) = 4 \cdot (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 = -8 < 0$$
$$f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 = 2 > 0$$
$$f'(1) = 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 = 10 > 0$$




Funktion $f$ minimikohta $x = -\frac{3}{2}$ .

Funktiolla $f$ ei ole maksimikohtia.

b) Funktion $f$ minimiarvo on

$$f(-\frac{3}{2}) = \left(-\frac{3}{2}\right)^4 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{16}.$$

c) Koska funktion kulkusuunta ei vaihdu derivaatan nollakohdassa $x = 0$, on tämä terassikohta.

Vastaus a) minimikohta $x = -\frac{3}{2}$

b) minimiarvo $f(-\frac{3}{2}) = -\frac{27}{16}$

c) $x = 0$ on terassikohta

## 211

Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ kulku päätellään derivaattafunktion $f'$ merkeistä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 3x^2 - 12x$.

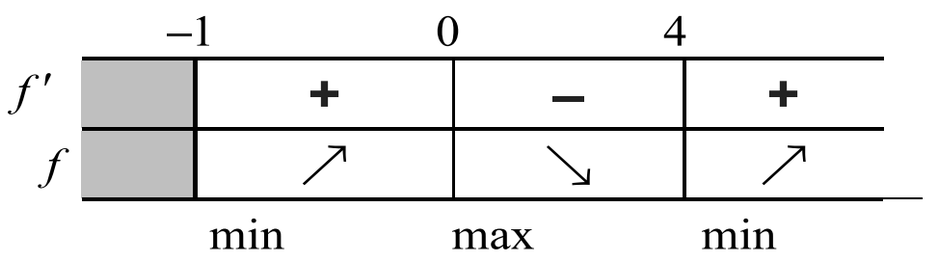
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$3x^2 - 12x = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = 0$ tai $x = 4$

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio, kun $x \geq -1$.
Derivaattafunktio on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

| $x$ | $f'(x)$ | merkki |
|---|---|---|
| –0,5 | 6,75 | + |
| 1 | –9 | – |
| 5 | 15 | + |



Funktion $f$ maksimiarvo on $x = 0$ ja maksimiarvo

$f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 5 = 5$.

Funktion $f$ minimikohdat ovat $x = -1$ ja $x = 4$ ja minimiarvot

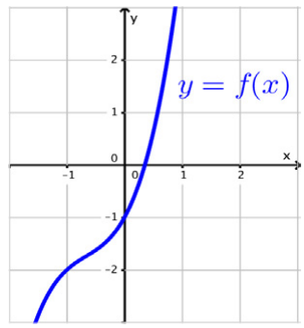
$f(-1) = (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 5 = -2$ ja
$f(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 5 = -24$.

Vastaus maksimiarvo $f(0) = 5$,
minimiarvot $f(-1) = -2$ ja $f(4) = -24$

## 212

Yhtälön $x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$ nollakohdat. Pitää siis osoittaa, että funktiolla $f$ on täsmälleen yksi nollakohta.

Funktion $f$ kuvaajan perusteella funktiolla $f$ näyttää olevan yksi nollakohta välillä $]0, 1[$.




**1)** Perustellaan ensin, että funktiolla $f$ on ainakin yksi nollakohta.

Funktio $f$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Koska funktion arvot $f(0) = -1$ ja $f(1) = 4$ ovat erimerkkiset, niin funktiolla $f$ on ainakin yksi nollakohta välillä $]0, 1[$.

**2)** Perustellaan seuraavaksi, että funktiolla $f$ on korkeintaan yksi nollakohta.

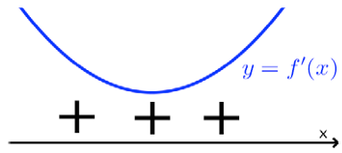
Tutkitaan funktion $f$ kulkua sen derivaattafunktion $f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$ avulla. Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$3x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{-8}}{6}$$

Koska $\sqrt{-8}$ ei ole määritelty, niin derivaattafunktiolla ei ole nollakohtia.

Derivaattafunktion $f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jolla ei ole nollakohtia.
Siis $f'(x) > 0$ kaikilla $x$.




Funktio $f$ on aidosti kasvava ja saa kaikki arvonsa täsmälleen yhden kerran. Siten funktiolla $f$ voi olla korkeintaan yksi nollakohta.

On siis osoitettu, että funktiolla $f$ on ainakin yksi nollakohta ja korkeintaan yksi nollakohta. Funktiolla $f$ on siis täsmälleen yksi nollakohta ja yhtälöllä $x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$ täsmälleen yksi ratkaisu. □

## 213

Yhtälön $x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$ nollakohdat. Pitää siis osoittaa, että $x = 1$ on funktion $f$ ainoa nollakohta.

**1)** Osoitetaan ensin, että $x = 1$ on funktion $f$ nollakohta.

$$f(1) = 1^3 - 1^2 + 2 \cdot 1 - 2 = 0$$

**2)** Osoitetaan seuraavaksi, että funktiolla $f$ on korkeintaan yksi nollakohta.

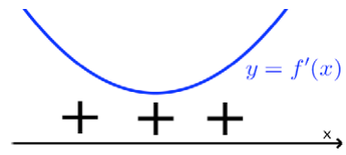
Tutkitaan funktion $f$ kulkua sen derivaattafunktion $f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$ avulla. Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$3x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{-20}}{6}$$

Koska $\sqrt{-20}$ ei ole määritelty, niin derivaattafunktiolla ei ole nollakohtia.

Derivaattafunktion $f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jolla ei ole nollakohtia. Siis $f'(x) > 0$ kaikilla $x$.



Funktio $f$ on aidosti kasvava kaikkialla ja saa kaikki arvonsa täsmälleen kerran. Siten funktiolla $f$ voi olla korkeintaan yksi nollakohta.

On siis osoitettu, että $x = 1$ on funktion $f$ nollakohta, ja että funktiolla $f$ on korkeintaan yksi nollakohta. Täten $x = 1$ on yhtälön $x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$ ainoa ratkaisu. □

## 214

Yhtälön $x^5 - 5x + a = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^5 - 5x + a$ nollakohdat. Tutkitaan funktion kulkua derivaattafunktion merkkien avulla.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 5x^4 - 5$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$5x^4 - 5 = 0$$
$$x^4 = 1$$
$$x = 1 \quad \text{tai} \quad x = -1$$

Derivaattafunktio $f'(x) = 5x^4 - 5$ on polynomifunktio, ja siten kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Koska välillä $]1, 2[$ ei ole derivaattafunktion nollakohtia, niin derivaattafunktion merkki on sama koko välillä $]1, 2[$. Määritetään derivaattafunktion merkki testipisteellä.

$$f'(1,5) = 5 \cdot 1,5^4 - 5 = 20,3125 > 0$$

Funktio $f$ on siis aidosti kasvava välillä $]1, 2[$.

Funktio $f$ on polynomifunktio, ja siten kaikkialla jatkuva. Funktiolla $f$ on välillä $]1, 2[$ ainakin yksi nollakohta, kun funktion arvot välin päätepisteissä on erimerkkiset. Koska funktio $f$ on aidosti kasvava välillä $]1, 2[$, niin pitää olla $f(1) < 0$ ja $f(2) > 0$.

| $f(1) < 0$ | ja | $f(2) > 0$ |
|---|---|---|
| $1^5 - 5 \cdot 1 + a < 0$ | | $2^5 - 5 \cdot 2 + a > 0$ |
| $-4 + a < 0$ | | $22 + a > 0$ |
| $a < 4$ | | $a > -22$ |

Siis $-22 < a < 4$.

Vastaus $-22 < a < 4$

## 215

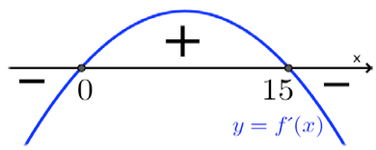
a) Tutkitaan, missä kohdissa funktion $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 15x^2 + 2$ derivaattafunktion $f'$ arvot ovat positiivisia ja missä negatiivisia.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = -2x^2 + 30x$

Derivaattafunktio $f'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$-2x^2 + 30x = 0$$
$$x(-2x + 30) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad -2x + 30 = 0$$
$$x = 15$$

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio.
Derivaattafunktion $f'(x) = -2x^2 + 30x$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat ovat $0$ ja $15$.




| | | 0 | | 15 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | − | + | | − |
| $f$ | | ↘ | ↗ | | ↘ |

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio $f$ on aidosti kasvava välillä $0 \le x \le 15$.

Funktio $f$ on aidosti vähenevä välillä $x \le 0$ ja välillä $x \ge 15$.

b) Funktio on aidosti vähenevä, kun $x > 15$. Siis mitä suurempi muuttujan arvo on, sitä pienempi on funktion arvo. Täten $f(15,0000001) > f(15,0000002)$.

Vastaus a) aidosti kasvava välillä $0 \le x \le 15$
aidosti vähenevä välillä $x \le 0$ ja välillä $x \ge 15$,
b) $f(15,0000001)$ on suurempi

## 216

Tehdään derivaattafunktion $f'$ kuvaajan avulla funktion $f$ kulkukaavio. Derivaattafunktion nollakohdat ovat $x = -2$, $x = 1$ ja $x = 3$.

| | | $-2$ | | $1$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | | $+$ | | $-$ | $+$ |
| $f$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $\nearrow$ |
| | | min | | max | | min | |

Kulkukaavion perusteella funktiolla $f$ on maksimikohta $x = 1$ ja minimikohdat $x = -2$ ja $x = 3$.

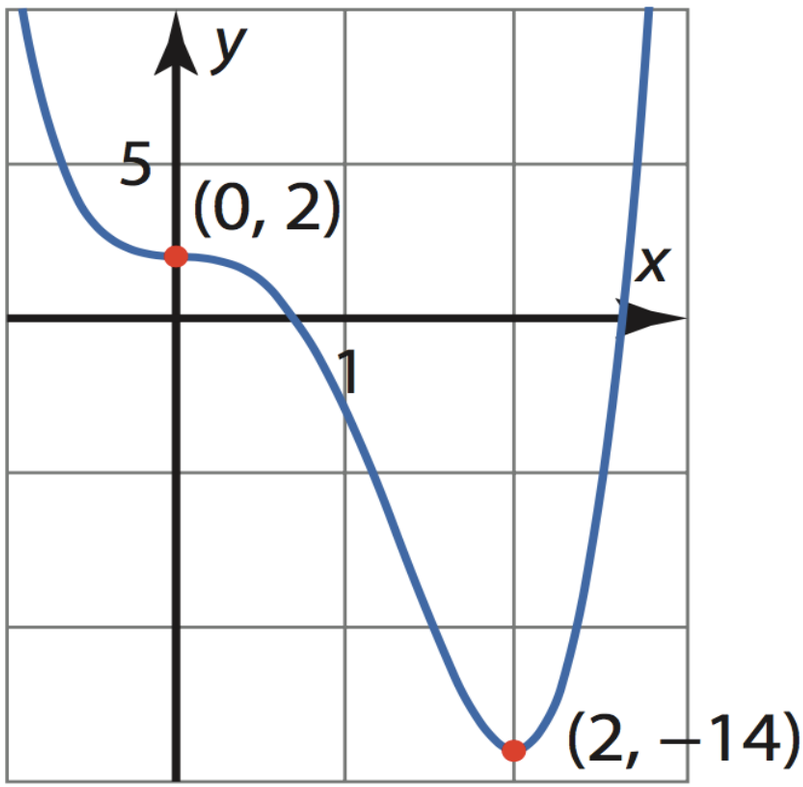
Vastaus minimikohta $x = 1$, minimikohdat $x = -2$ ja $x = 3$

**217**

Funktio $f$ on aidosti vähenevä, kun $x \leq 2$ ja aidosti kasvava, kun $x \geq 2$.

Funktiolla on terassipiste kohdassa $x = 0$.

Funktion kuvaaja kulkee pisteen $(0, 2)$ ja $(2, -14)$.



## 218

Funktion $f(x) = 5x^5 - 27x^3 - 2$ kulku päätellään derivaattafunktion $f'$ merkeistä.

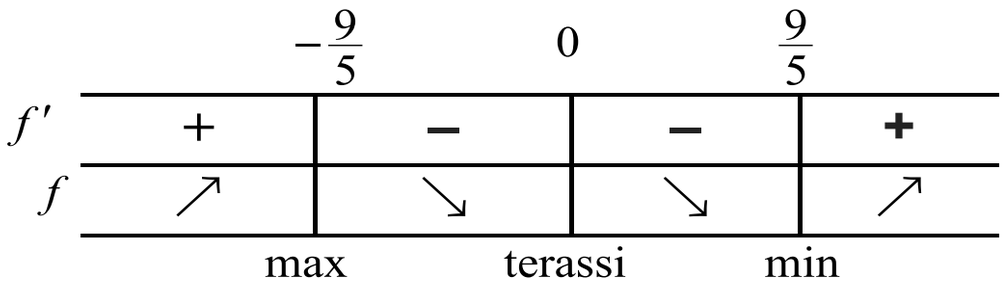
Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 25x^4 - 81x^2$.

Derivaattafunktio $f'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$25x^4 - 81x^2 = 0$$
$$x^2(25x^2 - 81) = 0$$
$$x^2 = 0 \quad \text{tai} \quad 25x^2 - 81 = 0$$
$$x = 0 \qquad\qquad x^2 = \frac{81}{25}$$
$$x = \frac{9}{5} \quad \text{tai} \quad x = -\frac{9}{5}$$

Nollakohdat jakavat lukusuoran neljään osaan. Päätellään derivaattafunktion merkit laskemalla yksi derivaattafunktion arvo jokaiselta osaväliltä ja laaditaan funktion $f$ kulkukaavio.

$$f'(x) = 25x^4 - 81x^2$$
$$f'(-2) = 25 \cdot (-2)^4 - 81 \cdot (-2)^2 = 75 > 0$$
$$f'(-1) = 25 \cdot (-1)^4 - 81 \cdot (-1)^2 = -56 < 0$$
$$f'(1) = 25 \cdot 1^4 - 81 \cdot 1^2 = -56 < 0$$
$$f'(2) = 25 \cdot 2^4 - 81 \cdot 2^2 = 76 > 0$$




Kulkukaavion perusteella funktiolla on maksimikohta $x = -\frac{9}{5}$ ja minimikohta $x = \frac{9}{5}$. Funktiolla on terassikohta $x = 0$.

Vastaus maksimikohta $x = -\frac{9}{5}$, minimikohta $x = \frac{9}{5}$, terassikohta $x = 0$

## 219

a) Funktion $f(x) = x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 1$ kulku päätellään derivaattafunktion $f'$ merkeistä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 - 28x$.

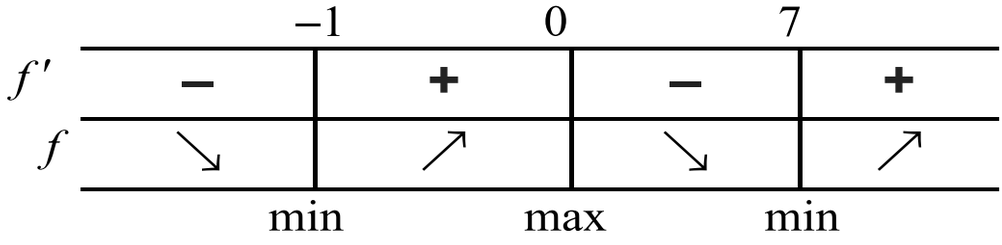
Derivaattafunktio $f'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$4x^3 - 24x^2 - 28x = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = -1,\ x = 0$ tai $x = 7$

Nollakohdat jakavat lukusuoran neljään osaan. Päätellään derivaattafunktion merkit laskemalla yksi derivaattafunktion arvo jokaiselta osaväliltä ja laaditaan funktion $f$ kulkukaavio.

| $x$ | $f'(x)$ | merkki |
|---|---|---|
| –2 | –72 | – |
| –0,5 | 7,5 | + |
| 1 | –48 | – |
| 8 | 288 | + |




Funktio $f$ on kasvava välillä $-1 \le x \le 0$ ja välillä $x \ge 7$.
Funktio on vähenevä välillä $x \le -1$ ja välillä $0 \le x \le 7$.

b) Funktion $f$ maksimikohta on $x = 0$ ja maksimiarvo

$f(0) = 0^4 - 8 \cdot 0^3 - 14 \cdot 0^2 + 1 = 1$.

Funktion $f$ minimikohdat ovat $x = -1$ ja $x = 7$ ja minimiarvot

$f(-1) = (-1)^4 - 8 \cdot (-1)^3 - 14 \cdot (-1)^2 + 1 = -4$ ja

$f(7) = 7^4 - 8 \cdot 7^3 - 14 \cdot 7^2 + 1 = -1028$.

Vastaus a) aidosti kasvava välillä $-1 \le x \le 0$ ja välillä $x \ge 7$,
aidosti vähenevä välillä $x \le -1$ ja välillä $0 \le x \le 7$
b) maksimiarvo $f(0) = 1$,
minimiarvot $f(-1) = -4$ ja $f(7) = -1028$

# 220

a) Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Funktion $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + a$ kulku päätellään derivaattafunktion $f'$ merkeistä.

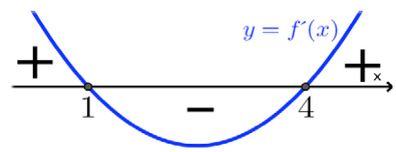
Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 6x^2 - 30x + 24$.

Derivaattafunktio $f'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$6x^2 - 30x + 24 = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = 1$ tai $x = 4$

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat ovat $x = 1$ ja $x = 4$.




| | | 1 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | + | | − | | + |
| $f$ | ↗ | | ↘ | | ↗ |
| | | max | | min | |

Funktion $f$ maksimikohta on $x = 1$. Siis $f(1) = 8$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakion $a$ arvo.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1^3 - 15 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 + a &= 8 \\ 11 + a &= 8 \\ a &= -3 \end{aligned}$$

b) Funktion $f$ minimikohta on $x = 4$ ja minimiarvo

$$f(4) = 2 \cdot 4^3 - 15 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 - 3 = -19$$

Vastaus a) $a = -3$
b) $f(4) = -19$

**221**

a) Tiedosta $f(0)=1$ saadaan yhtälö.

$$3\cdot 0^4 + a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c = 1$$
$$c = 1$$

Funktion $f(x)=3x^4+ax^3+bx^2+1$ derivaattafunktio on $f'(x)=12x^3+3ax^2+2bx$.

Funktion ääriarvokohdat ovat derivaattafunktion nollakohtia.

Koska $x=-1$ ja $x=2$ ovat funktion $f$ minimiarvoja, niin $f'(-1)=0$ ja $f'(2)=0$. Muodostetaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} f'(-1)=0 \\ f'(2)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12\cdot(-1)^3+3a\cdot(-1)^2+2b\cdot(-1)=0 \\ 12\cdot 2^3+3a\cdot 2^2+2b\cdot 2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a-2b=12 \\ 12a+4b=-96 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari laskimella.

Yhtälöparin ratkaisu on $a=-4$ ja $b=-12$

Funktioksi saadaan $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1$, jonka derivaattafunktio on $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$. Tarkistetaan, että funktion $f$ maksimikohdat ja minimikohdat ovat halutut

Derivaattafunktio $f'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$12x^3 - 12x^2 - 24x = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = -1$, $x = 0$ tai $x = 2$

Nollakohdat jakavat lukusuoran neljään osaan. Päätellään derivaattafunktion merkit laskemalla yksi derivaattafunktion arvo jokaiselta osaväliltä ja laaditaan funktion $f$ kulkukaavio.

| $x$ | $f'(x)$ | merkki |
|---|---|---|
| –2 | –96 | – |
| –0,5 | 7,5 | + |
| 1 | –24 | – |
| 3 | 144 | + |

| | | –1 | | 0 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | – | | + | | – | + |
| $f$ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | ↗ |
| | | min | | max | | min | |

Havaitaan, että funktiolla on maksimikohta $x = 0$ ja minimikohdat $x = -1$ ja $x = 2$, kuten tehtävässä vaadittiin.

b) Lasketaan funktion $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1$ minimiarvot.

$$f(-1) = 3 \cdot (-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 - 12 \cdot (-1)^2 + 1 = -4$$

$$f(2) = 3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 + 1 = -31$$

Vastaus a) $a = -4$, $b = -12$ ja $c = 1$
b) $f(-1) = -4$ ja $f(2) = -31$

# 222

Funktioiden kuvaajille on täsmälleen yksi leikkauspiste, kun yhtälöllä $f(x) = g(x)$ eli yhtälöllä $x^5 + x = 5 - x^3$ on täsmälleen yksi ratkaisu. Sievennetään yhtälön lauseke muotoon, jossa oikealla puolella on vain luku 0: $x^5 + x^3 + x - 5 = 0$.

Yhtälön $x^5 + x^3 + x - 5 = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $h(x) = x^5 + x^3 + x - 5$ nollakohdat. Pitää siis osoittaa, että funktiolla $h$ on täsmälleen yksi nollakohta.

**1)** Perustellaan ensin, että funktiolla $h$ on ainakin yksi nollakohta.

Funktio $h$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Koska funktion arvot $h(1) = -2$ ja $h(2) = 37$ ovat erimerkkiset, on funktiolla ainakin yksi nollakohta välillä $]1, 2[$.

**2)** Perustellaan seuraavaksi, että funktiolla $h$ on korkeintaan yksi nollakohta.

Tutkitaan funktion $h$ kulkua sen derivaattafunktion $h'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$ avulla.

Koska $5x^4 \geq 0$ kaikilla $x$ ja $3x^2 \geq 0$ kaikilla $x$, niin $5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ kaikilla $x$. Siis $h'(x) > 0$ kaikilla $x$.

Funktio $h$ on aidosti kasvava kaikkialla ja saa kaikki arvonsa täsmälleen yhden kerran. Siten funktiolla $h$ voi olla korkeintaan yksi nollakohta.

On siis osoitettu, että funktiolla $h$ on ainakin yksi nollakohta ja funktiolla $h$ on korkeintaan yksi nollakohta. Funktiolla $h$ on siis täsmälleen yksi nollakohta, joten alkuperäisellä yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu.

Funktioiden $f$ ja $g$ kuvaajilla on siis täsmälleen yksi leikkauspiste. □

## 223

Muokataan yhtälö muotoon, jossa oikealla puolella esiintyy vain luku 0.

$$x^4 + x = 1$$
$$x^4 + x - 1 = 0$$

Yhtälön $x^4 + x - 1 = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^4 + x - 1$ nollakohdat.

**1)** Perustellaan ensin, että funktiolla $f$ on ainakin kaksi nollakohtaa.

Funktio $f$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva.

Koska funktion arvot $f(-2) = 13$ ja $f(-1) = -1$ ovat erimerkkiset, on funktiolla ainakin yksi nollakohta välillä $]-2, -1[$.

Koska $f(0) = -1$ ja $f(1) = 1$ ovat erimerkkiset, on funktiolla on myös välillä $]0, 1[$ ainakin yksi nollakohta.

Funktiolla $f$ on siis ainakin kaksi nollakohtaa.

**2)** Perustellaan seuraavaksi, että funktiolla $f$ on korkeintaan kaksi nollakohtaa.

Tutkitaan funktion $f$ kulkua sen derivaattafunktion $f'(x) = 4x^3 + 1$ avulla. Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$4x^3 + 1 = 0$$

$$x^3 = -\frac{1}{4}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \quad (\approx -0,6)$$

Nollakohta jakaa lukusuoran kahteen osaan. Päätellään derivaattafunktion merkit laskemalla yksi derivaattafunktion arvo kummaltakin osaväliltä ja laaditaan funktion $f$ kulkukaavio.

$f'(-1) = -3 < 0$
$f'(1) = 5 > 0$

| | $-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ | |
|---|---|---|
| $f'$ | − | + |
| $f$ | ↘ | ↗ |

Funktio $f$ on aidosti vähenevä, kun $x \le -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ ja aidosti kasvava, kun $x \ge -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. Funktiolla $f$ voi olla siis korkeintaan yksi nollakohta ennen kohtaa $-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ ja korkeintaan yksi nollakohta kohdan $-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ jälkeen. Siis funktiolla $f$ voi olla korkeintaan kaksi nollakohtaa.

On siis osoitettu, että funktiolla $f$ on ainakin kaksi nollakohtaa ja funktiolla $f$ on korkeintaan kaksi nollakohtaa. Funktiolla $f$ on siis täsmälleen kaksi nollakohtaa, joten alkuperäisellä yhtälöllä on täsmälleen kaksi ratkaisua. □

Kohdan 1 perusteella yhtälön ratkaisut sijaitsevat väleillä $]-2, -1[$ ja $]0, 1[$.

## 224

Kerrotaan sulkeet auki ja muokataan yhtälö muotoon, jossa oikealla puolella esiintyy vain luku 0.

$$(x+1)^3 = 3x$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 3x$$

$$x^3 + 3x^2 + 1 = 0$$

Yhtälön $x^3 + 3x^2 + 1 = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ nollakohdat.

**1)** Osoitetaan ensin, että funktiolla $f$ on nollakohtia ainakin yksi.

Funktio $f$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Koska funktion arvot $f(0) = 1$ ja $f(-4) = -15$ ovat erimerkkiset, on funktiolla ainakin yksi nollakohta välillä $]-4, 0[$.

Funktiolla $f$ on siis ainakin yksi nollakohta.

**2)** Tutkitaan funktion $f$ nollakohtien enimmäismäärää.

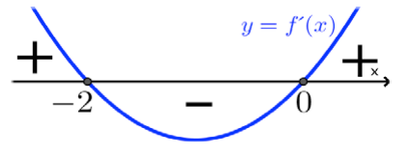
Tutkitaan funktion $f$ kulkua sen derivaattafunktion $f'(x) = 3x^2 + 6x$ avulla. Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$3x^2 + 6x = 0$$

$$3x(x+2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = -2$$

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio.
Derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat ovat $x = -2$ ja $x = 0$




| | −2 | | 0 | |
|---|---|---|---|---|
| $f'$ | + | | − | + |
| $f$ | ↗ | | ↘ | ↗ |
| | | max | | min |

Funktion maksimiarvo on $f(-2) = 7 > 0$ ja minimiarvo on $f(0) = 1 > 0$.

Koska funktion minimiarvo $f(0) > 0$, niin funktiolla ei voi kulkukaavion perusteella olla nollakohtia, kun $x \geq -2$.

Kun $x \leq -2$, niin funktio $f$ on aidosti kasvava, joten sillä voi olla korkeintaan yksi nollakohta, kun $x \leq -2$.

Funktiolla $f$ voi siis olla korkeintaan yksi nollakohta.

On siis osoitettu, että funktiolla $f$ on ainakin yksi nollakohta ja korkeintaan yksi nollakohta, joten funktiolla on täsmälleen yksi nollakohta. Siis yhtälöllä $(x-1)^3 = x$ on täsmälleen yksi ratkaisu.
□

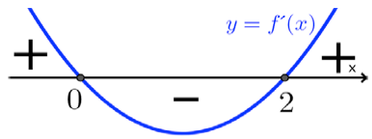
**225**

Yhtälön $x^3 - 3x^2 + a = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$ nollakohdat.

Tutkitaan funktion $f$ kulkua sen derivaattafunktion $f'(x) = 3x^2 - 6x$ avulla. Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$3x^2 + 6x = 0$$
$$3x(x-2) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 2$$

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = 2$.

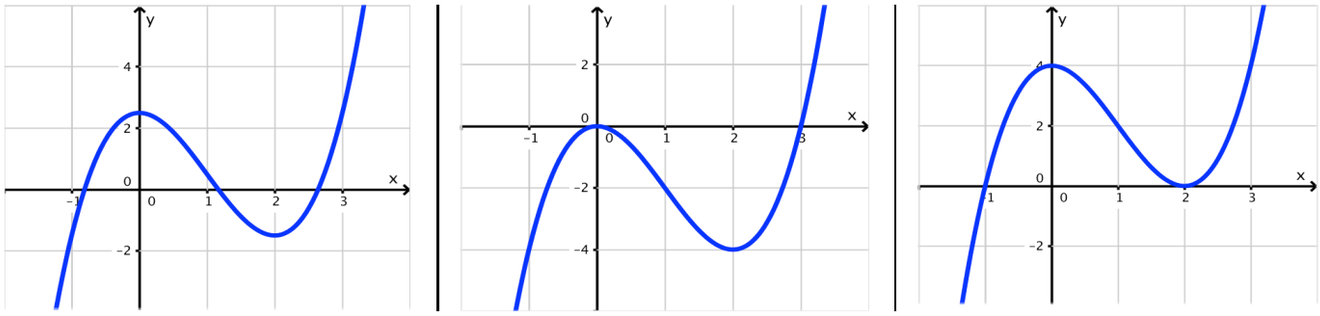



| | | 0 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | + | | − | | + |
| $f$ | ↗ | | ↘ | | ↗ |

Funktion $f$ maksimiarvo on $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + a = a$ ja minimiarvo $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + a = -4 + a$.

Tekijä • Pitkä matematiikka 6 • 29.5.2017

Jotta funktiolla $f$ voi olla ainakin kaksi nollakohtaa pitää ääriarvojen olla erimerkkiset tai toisen ääriarvoista nolla.



Funktio $f$ on välillä $[0, 2]$ aidosti vähenevä ja jatkuva.
Jos $f(0) > 0$ ja $f(2) < 0$, niin funktiolla $f$ on välillä $]0, 2[$ täsmälleen yksi nollakohta.

$$\begin{array}{r|r} f(0) > 0 & f(2) < 0 \\ a > 0 & -4 + a < + \\ & a < 4 \end{array}$$

Siis funktiolla $f$ on täsmälleen yksi nollakohta välillä $]0, 2[$, kun $0 < a < 4$.

Kun $0 < a < 4$, niin $f(10) = 10^3 - 3 \cdot 10^2 + a = 700 + a > 0$. Koska $f(2) < 0$, niin funktiolla $f$ on ainakin yksi nollakohta myös välillä $]2, 10[$.

Siis funktiolla $f$ on ainakin kaksi nollakohtaa, kun $0 < a < 4$.

Kun $a = 0$, niin $f(0) = 0$. Lisäksi $f(2) = -4$ ja $f(10) = 700$ ovat erimerkkiset, joten funktiolla on ainakin yksi nollakohta myös välillä $]2, 10[$.

Kun $a = 4$, niin $f(2) = 0$. Lisäksi $f(0) = 4$ ja $f(-2) = -16$ ovat erimerkkiset, joten funktiolla on ainakin yksi nollakohta myös välillä $]-2, 0[$.

Funktiolla $f$ on siis ainakin kaksi nollakohtaa, kun $0 \le a \le 4$. Täten alkuperäisellä yhtälöllä on ainakin kaksi ratkaisua, kun $0 \le a \le 4$.

Vastaus $0 \le a \le 4$

## 226

Tutkitaan funktion $f$ kulkua sen derivaattafunktion $f'(x) = 3ax^2 + 2ax + a$ avulla. Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat, kun $a \neq 0$.

$$3ax^2 + 2ax + a = 0 \qquad \big| : a \ (\neq 0)$$

$$3x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{6}$$

Koska $\sqrt{-8}$ ei ole määritelty, niin derivaattafunktiolla ei ole nollakohtia. Derivaattafunktio $f'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva ja sen merkki voi vaihtua vain nollakohdassa. Täten derivaattafunktion merkki on sama kaikilla muuttujan $x$ arvoilla.

Lasketaan derivaattafunktion arvo esimerkiksi kohdassa $1$.

$$f'(1) = a \cdot 1^3 + a \cdot 1^2 + a \cdot 1 = 3a$$

Kun $a > 0$, niin $f'(1) = 3a > 0$ ja täten $f'(x) > 0$ kaikilla $x$. Siis kun $a > 0$, niin funktio $f$ on aidosti kasvava.

Kun $a < 0$, niin $f'(1) = 3a < 0$ ja täten $f'(x) < 0$ kaikilla $x$. Siis kun $a < 0$, niin funktio $f$ on aidosti vähenevä. □

**227**

a) Funktiolla $f$ on maksimikohdat $x = 1$ ja $x = 8$.
Funktio $f$ on aidosti kasvava, kun $x \leq 1$ ja aidosti vähenevä, kun $x \geq 8$.

Kulkukaavion perusteella voidaan siis sanoa, että funktion $f$ suurin arvo on joko kohdassa $x = 1$ tai $x = 8$.

b) Funktiolla $f$ on maksimikohta $x = 8$. Mutta koska funktio $f$ on aidosti vähenevä, kun $x \leq 1$, niin funktion suurin arvo ei välttämättä ole kohdassa $x = 8$.

Vastaus a) kyllä, suurin arvo on kohdassa $x = 1$ tai $x = 8$
b) ei voida sanoa

## 228

Funktion $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 10$ kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 72x$.

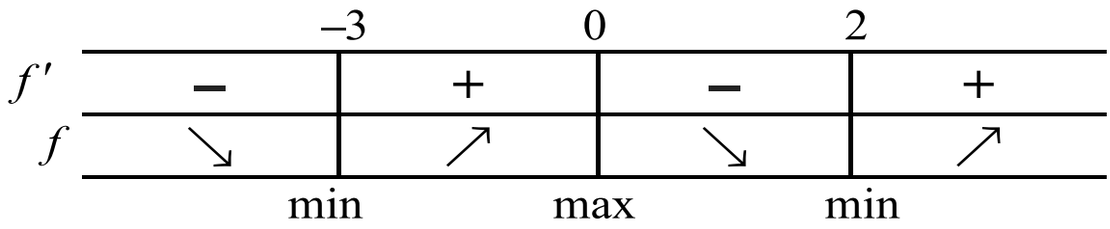
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$12x^3 + 12x^2 - 72x = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = -3$, $x = 0$ tai $x = 2$

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Derivaattafunktio $f'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

| $x$ | $f'(x)$ | merkki |
|---|---|---|
| –4 | –288 | – |
| –1 | 72 | + |
| 1 | –48 | – |
| 3 | 216 | + |



Kulkukaavion perusteella funktio saavuttaa pienimmän arvonsa joko kohdassa $x = -3$ tai $x = 2$. Lasketaan funktion arvot näissä kohdissa.

$f(-3) = 3 \cdot (-3)^4 + 4 \cdot (-3)^3 - 36 \cdot (-3)^2 + 10 = -179$ pienin

$f(2) = 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^3 - 36 \cdot 2^2 + 10 = -54$

Funktion pienin arvo on $-179$.

Kulkukaavion perusteella ainoa kohta, jossa funktio voisi saavuttaa suurimman arvonsa on $x = 0$. Lasketaan funktion arvo tässä kohdassa.

$f(0) = 3 \cdot 0^4 + 4 \cdot 0^3 - 36 \cdot 0^2 + 10 = 10$

Funktio $f$ on aidosti kasvava, kun $x \geq 2$. Koska esimerkiksi $f(3) = 37 > 10$ funktion suurin arvo ei voi olla $10$. Funktiolla ei siis ole suurinta arvoa.

Vastaus pienin arvo $-179$, ei suurinta arvoa

## 229

Funktion $f(x) = x^3 - 12x^2$ kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 3x^2 - 24x$.

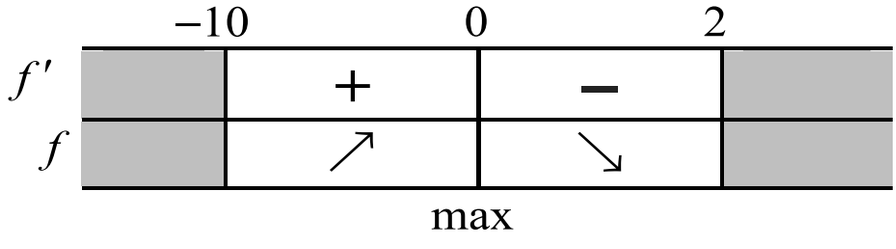
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$3x^2 - 24x = 0$$
$$x(3x - 24) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } 3x - 24 = 0$$
$$x = 8$$

Derivaattafunktion nollakohdista välille $]-10, 2[$ kuuluu vain $x = 0$.

Laaditaan funktion $f$ välille $]-10, 2[$ rajattu kulkukaavio. Derivaattafunktio $f'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

| $x$ | $f'(x)$ | merkki |
|---|---|---|
| –1 | 27 | + |
| 1 | –21 | – |



Kulkukaavion perusteella funktion suurin arvo saavutetaan kohdassa $x = 0$.

Suurin arvo on $f(0) = 0^3 - 12 \cdot 0^2 = 0$

Kulkukaavion perusteella funktiolla ei ole pienintä arvoa.

Vastaus suurin arvo 0, ei pienintä arvoa

## 230

Polynomifunktio $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ saavuttaa välillä $[0, 3]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välille $]0, 3[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$3x^2 - 12x + 9 = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = 1$ tai $x = 3$

Derivaattafunktion nollakohdista välille $]0, 3[$ kuuluu vain $x = 1$.

Lasketaan funktion $f$ arvo välin päätepisteissä $0$ ja $3$ sekä välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 = 0$ pienin

$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0$ pienin

$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4$ suurin

Lasketuista arvoista suurin on $4$ ja se saadaan, kun $x = 1$. Pienin arvoista on $0$ ja se saadaan, kun $x = 0$ tai $x = 3$.

Vastaus suurin arvo 4, kun $x = 1$,
pienin arvo 0, kun $x = 0$ tai $x = 3$

## 231

Polynomifunktio $f(x) = x^4 - 4x^3$ saavuttaa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa joko välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$4x^3 - 12x^2 = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = 0$ tai $x = 3$

a) Molemmat derivaatan nollakohdat kuuluvat välille ]–2, 4[. Lasketaan funktion $f$ arvo välin päätepisteissä ja välille derivaattafunktion nollakohdissa.

$f(-2) = (-2)^4 - 4 \cdot (-2)^3 = 48$ suurin

$f(4) = 4^4 - 4 \cdot 4^3 = 0$

$f(0) = 0^4 - 4 \cdot 0^3 = 0$

$f(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 = -27$ pienin

Lasketuista arvoista suurin on $f(-2) = 48$ ja pienin $f(3) = -27$.

b) Derivaatan nollakohdista välillä ]–2, 2[ kuuluu vain $x = 0$. Lasketaan funktion $f$ arvo välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$f(-2) = (-2)^4 - 4 \cdot (-2)^3 = 48$ suurin

$f(2) = 2^4 - 4 \cdot 2^3 = -16$ pienin

$f(0) = 0^4 - 4 \cdot 0^3 = 0$

Lasketuista arvoista suurin on $f(-2) = 48$
ja pienin $f(2) = -16$.

Vastaus a) suurin arvo $f(-2) = 48$, pienin arvo $f(3) = -27$
b) suurin arvo $f(-2) = 48$, pienin arvo $f(2) = -16$

## 232

Määritetään funktion suurin arvo välillä $[0, 24]$.

Polynomifunktio $f(t) = -0,0008t^3 - 0,0393t^2 + 1,3332t + 15,1940$ saavuttaa välillä $[0, 24]$ suurimman arvonsa joko välille $]0, 24[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on
$f'(t) = -0,0024t^2 - 0,0786t + 1,3332$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$-0,0024t^2 - 0,0786t + 1,3332 = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$t = -45,0741...$ tai $t = 12,3241...$

Derivaattafunktion nollakohdista välille $]0, 24[$ kuuluu
$t = 12,3241...$.

Lasketaan funktion $f$ arvo välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$f(0) = 15,1940$
$f(24) = 13,4948...$

$f(12,3241...) = 24,158...$ suurin

Lasketuista arvoista suurin on $24,158...$ °C $\approx 24$ °C.
Suurin arvo saadaan, kun $t = 12,3241...$ h.

Muutetaan ajanhetki $t = 12{,}3241\ldots$ h tunneiksi ja minuuteiksi.

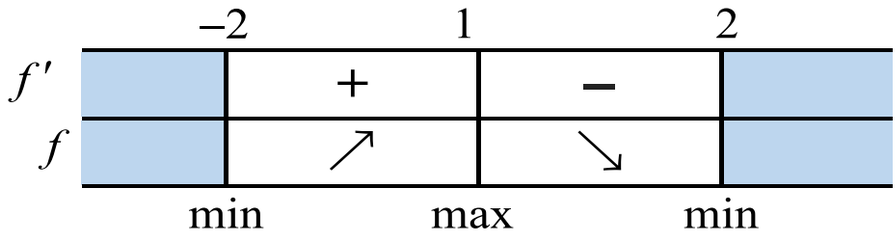
$$\begin{aligned} 12,3241...\ \text{h} &= 12\ \text{h} + 0,3241... \cdot 60\,\text{min} \\ &= 12\ \text{h}\ + 19,448...\,\text{min} = 12\ \text{h} + 19\ \text{min} \end{aligned}$$

Korkein lämpötila $24°$ saavutetaan kello 12.19

Vastaus $24°$, kello 12.19

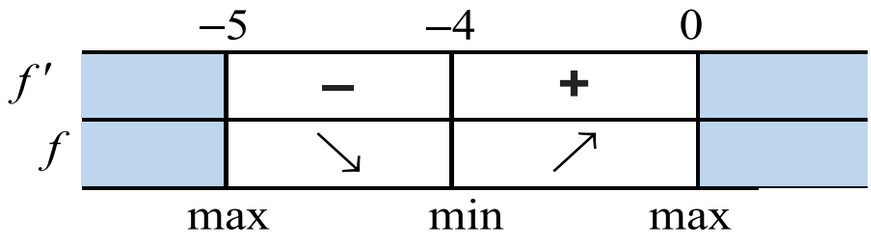
**233**

a)



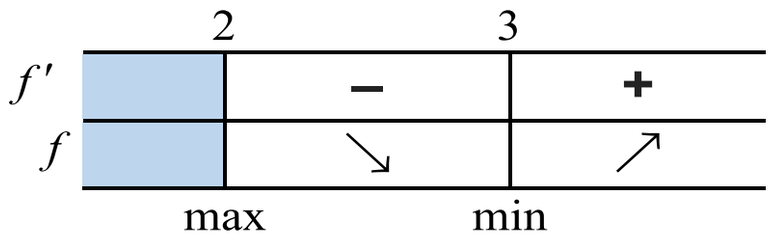

Funktio $f$ saa suurimman arvonsa kohdassa $x = 1$.
Funktio $f$ saa pienimmän arvonsa kohdassa $x = -2$ tai $x = 2$.

b)




Funktio $f$ saa suurimman arvonsa kohdassa $x = -5$ tai $x = 0$.
Funktio $f$ saa pienimmän arvonsa kohdassa $x = -4$.

c)




Funktiolla $f$ ei ole suurinta arvoa.
Funktio $f$ saa pienimmän arvonsa kohdassa $x = 3$.

**234**

Polynomifunktio $f(x) = x^3 - \frac{33}{2}x^2 + 72x + k$ saavuttaa välillä $[4, 10]$ pienimmän arvonsa välille $]4, 10[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 3x^2 - 33x + 72$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$3x^2 - 33x + 72 = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = 3$ tai $x = 8$

Derivaattafunktion nollakohdista välille $]4, 10[$ kuuluu $x = 8$.

Lasketaan funktion $f$ arvot välin päätepisteissä sekä välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$f(4) = k + 88$

$f(10) = k + 70$

$f(8) = k + 32$

Lasketuista arvoista pienin on $k + 32$. Koska pienimmän arvon tulee olla $8$, saadaan yhtälö, josta voidaan ratkaista vakion $k$ arvo.

$k + 32 = 8$

$k = -24$

Vastaus $k = -24$

## 235

Funktio $f(x) = -3x^4 + 16x^3 + 30x^2 - 900$ saa vain negatiivisia arvoja, jos sen suurinkin arvo on negatiivinen. Pitää siis osoittaa, että funktion $f$ suurin arvo on negatiivinen.

Funktion $f$ kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = -12x^3 + 48x^2 + 60x$ .

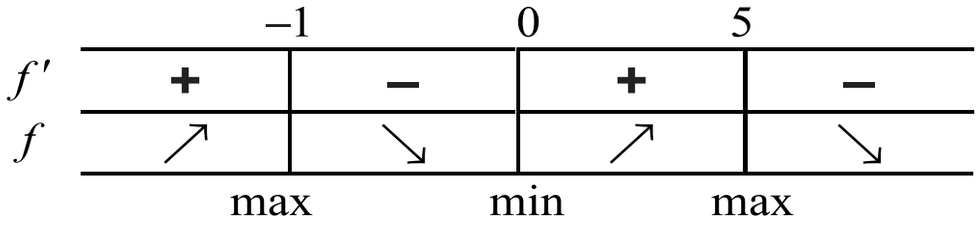
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$-12x^3 + 48x^2 + 60x = 0$

$x = -1,\ x = 0$ tai $x = 5$

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Derivaattafunktio $f'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

| $x$ | $f'(x)$ | merkki |
|---|---|---|
| –2 | 168 | + |
| –0,5 | –16,5 | – |
| 1 | 96 | + |
| 6 | –504 | – |



Kulkukaavion perusteella funktio saavuttaa suurimman arvonsa kohdassa $x = -1$ tai $x = 5$. Lasketaan funktion arvot näissä kohdissa.

$f(-1) = -889$
$f(5) = -25$ suurin

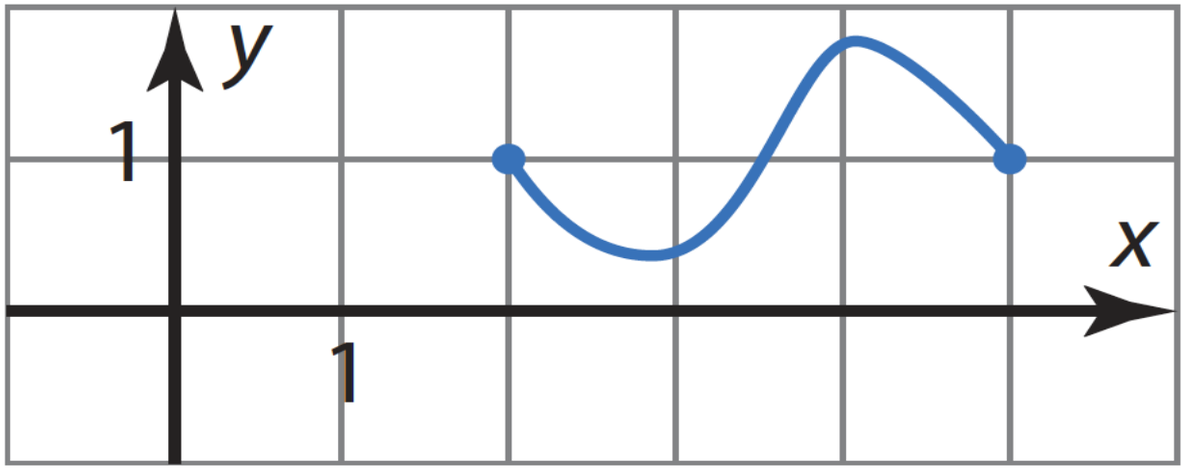
Funktion suurin arvo on $-25$.

On siis osoitettu, että funktio $f$ saa vain negatiivisia arvoja. □

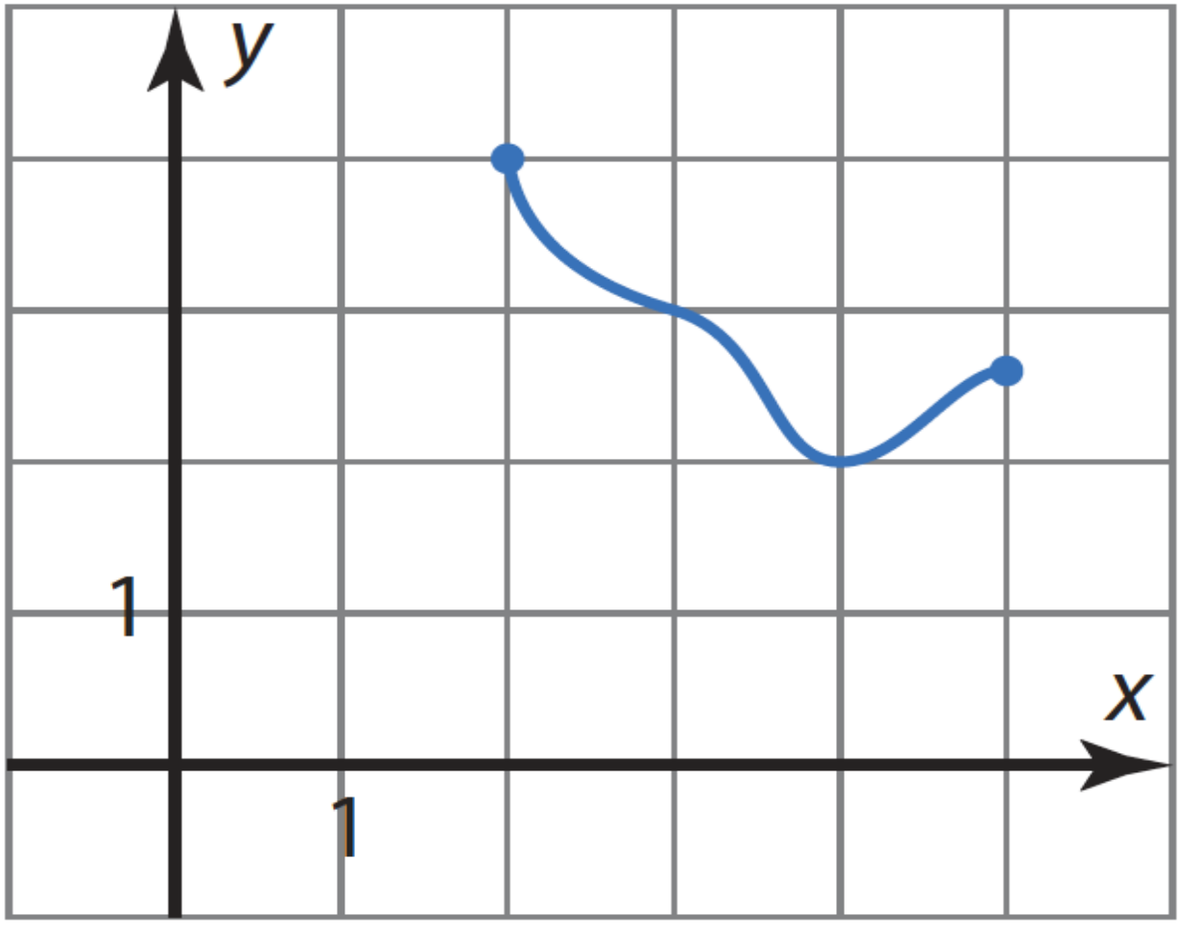
**236**

a)

Esimerkiksi alla oleva kuvaaja.




b) Esimerkiksi alla oleva kuvaaja.

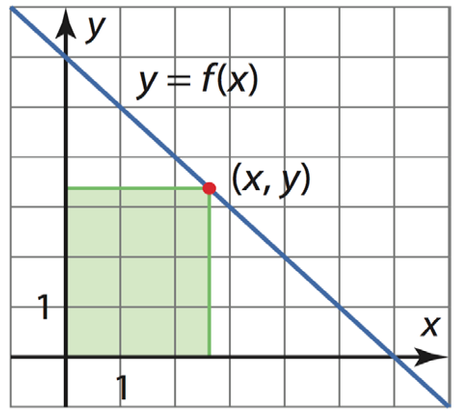


## 237

a) Suorakulmion pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo.

Kuvan suorakulmion kanta on pisteen $(x, y)$ $x$-koordinaatti ja korkeus pisteen $y$-koordinaatti.

Koska piste $(x, y)$ on funktion $f(x) = 6 - x$ kuvaajalla, niin $y = f(x) = 6 - x$.




Pinta-alan funktioksi $A$, kun muuttujana on $x$, saadaan

$$\begin{aligned} A(x) &= x \cdot y \\ &= x(6 - x) \\ &= 6x - x^2. \end{aligned}$$

Selvitetään funktion $A$ määrittelyjoukko. Koska piste $(x, y)$ on koordinaatiston ensimmäisessä neljänneksessä, niin pisteen molemmat koordinaatit ovat epänegatiivisia.

$$\begin{array}{l|r} x \geq 0 & y \geq 0 \\ & 6 - x \geq 0 \\ & 6 \geq x \\ & x \leq 6 \end{array}$$

Funktion $A$ määrittelyjoukko on siis $0 \leq x \leq 6$.

b) Polynomifunktio $A(x) = 6x - x^2$ saavuttaa välillä $[0, 6]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välille $]0, 6[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Funktion $A$ derivaattafunktio on $A'(x) = 6 - 2x$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta.

$$6 - 2x = 0$$
$$x = 3$$

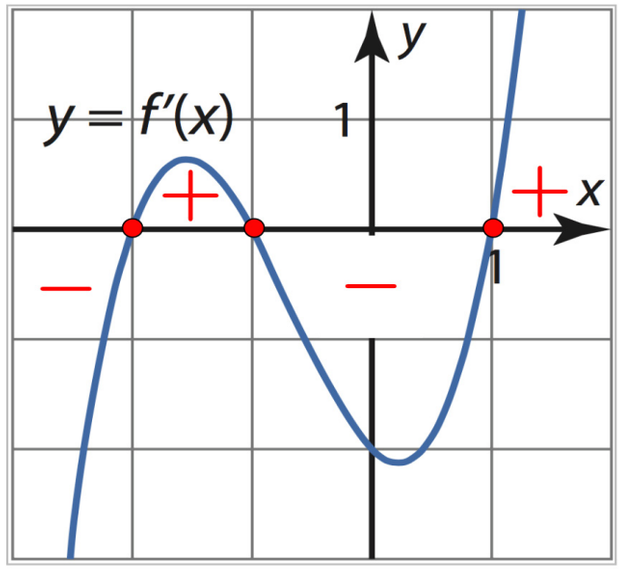
Lasketaan funktion $A$ arvo välin päätepisteissä $0$ ja $6$ sekä välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa $3$.

$$A(0) = 6 \cdot 0 - 0^2 = 0$$
$$A(6) = 6 \cdot 6 - 6^2 = 0$$
$$A(3) = 6 \cdot 3 - 3^2 = 9 \quad \text{suurin}$$

Pinta-alan suurin arvo on $9$.

Vastaus a) $A(x) = 6x - x^2$, kun $0 \le x \le 6$
b) 9

## 238




Derivaattafunktion $f'$ kuvaajan perusteella derivaattafunktion nollakohdat ovat $x = -2$, $x = -1$ ja $x = 1$.

Derivaattafunktion $f'$ arvot ovat negatiivisia, kun $x < -2$ tai $-1 < x < 1$.

Derivaattafunktion $f'$ arvot ovat positiivisia, kun $-2 < x < -1$ tai $x > 1$.

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio.

| | | −2 | | −1 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | | + | | − | + |
| $f(x)$ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | ↗ |

Kulkukaavion perusteella voidaan sanoa, että funktio saa pienimmän arvonsa kohdassa $x = -2$ tai $x = 1$.

Kulkukaavion perusteella ei voida sanoa missä kohdassa funktio $f$ saa mahdollisen suurimman arvonsa.

## 239

Funktion $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$ kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 4x^3 - 16x$.

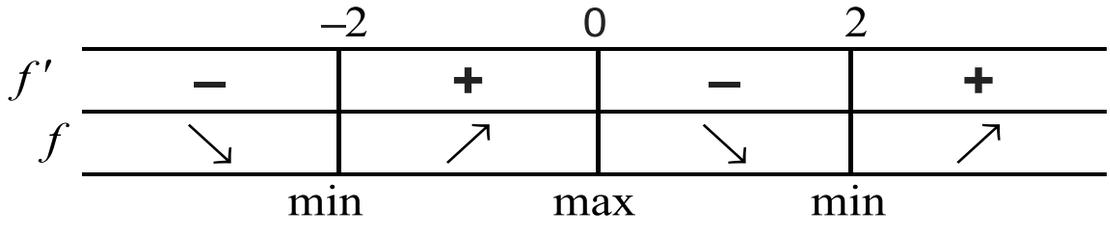
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$4x^3 - 16x = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = -2,\ x = 0$ tai $x = 2$

a) Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Derivaattafunktio $f'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

| $x$ | $f'(x)$ | merkki |
|---|---|---|
| –3 | –60 | – |
| –1 | 12 | + |
| 1 | –12 | – |
| 3 | 60 | + |



Funktio saa pienimmän arvonsa kohdassa $x = -2$ tai $x = 2$.
Lasketaan funktion arvot näissä kohdissa.

$$f(-2) = (-2)^4 - 8 \cdot (-2)^2 + 1 = -15$$
$$f(2) = 2^4 - 8 \cdot 2^2 + 1 = -15$$

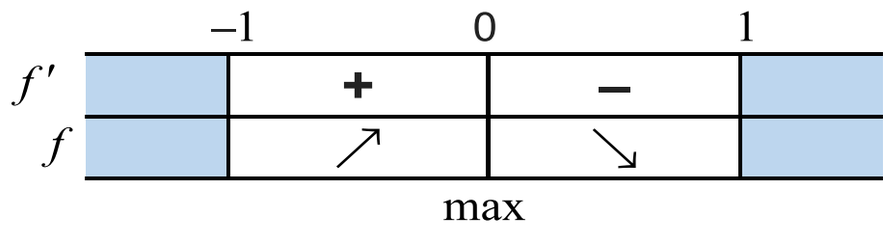
Funktion pienin arvo on $-15$.

Ainoa kohta, jossa funktio voisi saada suurimman arvonsa on $x = 0$. Lasketaan funktion arvo tässä kohdassa.

$$f(0) = 0^4 - 8 \cdot 0^2 + 1 = 1$$

Mutta esimerkiksi $f(3) = 3^4 - 8 \cdot 4^2 + 1 = 10 > 1$, joten funktion $f$ suurin arvo ei voi olla $1$. Siis funktiolla $f$ ei ole suurinta arvoa.

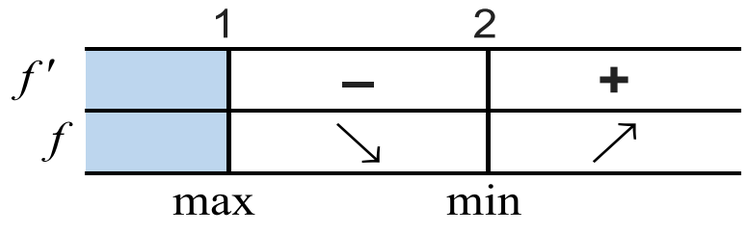
b) Rajataan funktion $f$ kulkukaavio välille $]-1, 1[$.




Funktio $f$ saa suurimman arvonsa kohdassa $x = 0$. Funktion suurin arvo on siis $f(0) = 1$.

Funktiolla $f$ ei ole pienintä arvoa.

c) Rajataan funktion $f$ kulkukaavio välille $[1, \infty[$.




Funktio saa pienimmän arvonsa kohdassa $x = 2$. Funktion pienin arvo on siis $f(2) = -15$.

Ainoa kohta, jossa funktio voisi saada suurimman arvonsa on $x = 1$.

Koska $f(1) = -6$ ja $f(3) = 10 > -6$, niin funktiolla $f$ ei ole suurinta arvoa.

Vastaus a) pienin arvo $-15$, ei suurinta arvoa
b) ei pienintä arvoa, suurin arvo $1$
c) pienin arvo $-15$, ei suurinta arvoa

## 240

Polynomifunktio $f(x) = 2x^3 - 65x^2 + 500x$ saavuttaa välillä $[-2, 20]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välille $]-2, 20[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 6x^2 - 130x + 500$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$6x^2 - 130x + 500 = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = 5$ tai $x = \frac{50}{3}$

Lasketaan funktion $f$ arvo välin päätepisteissä ja välille kuuluvissa derivaattafunktion nollakohdissa.

$f(-2) = 2 \cdot (-2)^3 - 65 \cdot (-2)^2 + 500 \cdot (-2) = -1276$ pienin

$f(20) = 2 \cdot 20^3 - 65 \cdot 20^2 + 500 \cdot 20 = 0$

$f(5) = 2 \cdot 5^3 - 65 \cdot 5^2 + 500 \cdot 5 = 1125$ suurin

$f(\frac{50}{3}) = 2 \cdot \left(\frac{50}{3}\right)^3 - 65 \cdot \left(\frac{50}{3}\right)^2 + 500 \cdot (\frac{50}{3}) = -\frac{12500}{27}$ $(\approx 463)$

Lasketuista arvoista suurin on $1125$ ja se saadaan, kun $x = 5$. Pienin arvoista on $-1276$ ja se saadaan, kun $x = -2$.

Vastaus suurin arvo $1125$ kohdassa $x = 5$,
pienin arvo $-1276$ kohdassa $x = -2$

# 241

Funktio $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Funktio $f$ siis saavuttaa kaikki arvot suurimman ja pienimmän arvon välillä. Määritetään funktion $f$ suurin ja pienin arvo.

Polynomifunktio $f$ saavuttaa välillä $[-2, 2]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välille $]-2, 2[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x$ .

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$4x^3 - 9x^2 + 2x = 0$

$x = 0,\ x = \frac{1}{4}$ tai $x = 2$

Derivaattafunktion nollakohdista välille $]-2, 2[$ kuuluu $x = 0$ ja $x = \frac{1}{4}$.

Lasketaan funktion $f$ arvot välin päätepisteissä ja välille kuuluvissa derivaattafunktion nollakohdissa.

$f(-2) = 44$ suurin

$f(2) = -4$ pienin

$f(0) = 0$

$f(\frac{1}{4}) = \frac{5}{256}$

Funktion $f$ pienin arvo on $-4$ ja suurin arvo $44$. Funktio $f$ saa siis kaikki arvot väliltä $[-4, 44]$. Funktion $f$ arvojoukko on [–4, 44].

Vastaus $[-4, 44]$

## 242

Epäyhtälö $x^6 - 5x + 7 > 0$ on aina tosi, jos funktio $f(x) = x^6 - 5x + 7$ saa vain positiivisia arvoja. Määritetään funktion $f$ pienin arvo.

Funktion $f$ kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 6x^5 - 5$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$6x^5 - 5 = 0$$
$$x^5 = \frac{5}{6}$$
$$x = \sqrt[5]{\frac{5}{6}} \quad (= 0{,}964...)$$

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Derivaattafunktio $f'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdassa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

| $x$ | $f'(x)$ | merkki |
|---|---|---|
| 0 | –5 | – |
| 1 | 1 | + |

| | $\sqrt[5]{\frac{5}{6}}$ | |
|---|---|---|
| $f'$ | – | + |
| $f$ | ↘ | ↗ |
| | min | |

Kulkukaavion perusteella funktio saavuttaa pienimmän arvonsa kohdassa $x = \sqrt[5]{\frac{5}{6}}$ . Lasketaan funktion arvo tässä kohdassa.

$$f(\sqrt[5]{\frac{5}{6}}) = \left(\sqrt[5]{\frac{5}{6}}\right)^6 - 5\sqrt[5]{\frac{5}{6}} + 7 = 2,98... > 0$$

Koska funktion $f$ pienin arvo on positiivinen, se saa vain positiivisia arvoja.

On siis osoitettu, että epäyhtälö $x^6 - 5x + 7 > 0$ on aina tosi. □

## 243

Muokataan epäyhtälö muotoon, jossa oikealla puolella on vain luku 0.

$$3x^2 + 12x \le 2x^3 + 20$$

$$-2x^3 + 3x^2 + 12x - 20 \le 0$$

Epäyhtälö $-2x^3 + 3x^2 + 12x - 20 \le 0$ on tosi, kun funktion $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 20$ arvot ovat epäpositiivisia.
Osoitetaan, että $f(x) \le 0$, kun $x > 1$.

Määritetään funktion $f$ suurin arvo, kun $x > 1$.

Funktion $f$ kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = -6x^2 + 6x + 12$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

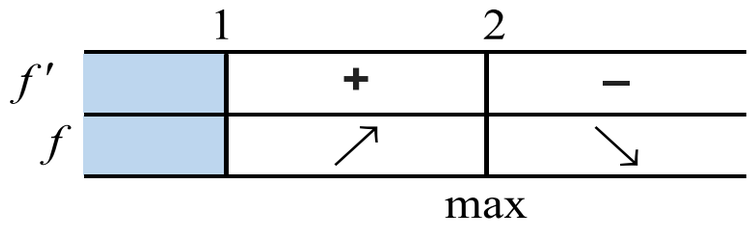
$$-6x^2 + 6x + 12 = 0$$

$x = -1$ tai $x = 2$

Derivaattafunktion nollakohdista $x = 2$ täyttää ehdon $x > 1$.

Laaditaan funktion $f$ välille $]-1, \infty[$ rajattu kulkukaavio. Derivaattafunktio $f'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

| $x$ | $f'(x)$ | merkki |
|---|---|---|
| 1,5 | 7,5 | + |
| 3 | –24 | – |




Kulkukaavion perusteella funktio saavuttaa suurimman arvonsa kohdassa $x = 2$. Lasketaan funktion arvo tässä kohdassa.

$$f(2) = -2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 20 = 0$$

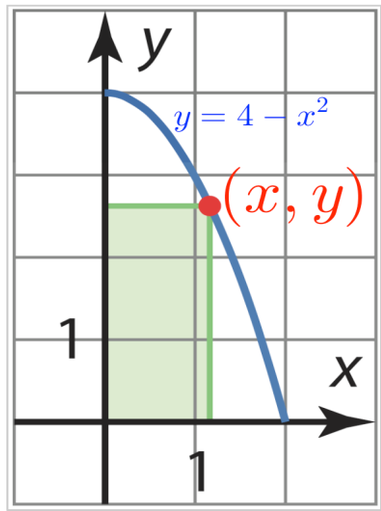
Kun $x > 1$, niin funktion $f$ suurin arvo on $0$.

On siis osoitettu, että $f(x) \leq 0$, kun $x > 1$. Täten alkuperäinen epäyhtälö on tosi, kun $x > 1$. □

## 244

Suorakulmion pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo.

Kuvan suorakulmion kanta on pisteen $(x, y)$ $x$-koordinaatti ja korkeus pisteen $y$-koordinaatti.




Koska piste $(x, y)$ on paraabelilla, niin $y = 4 - x^2$.

Pinta-alan funktioksi $A$, kun muuttujana on $x$, saadaan

$$\begin{aligned} A(x) &= x \cdot y \\ &= x(4 - x^2) \\ &= 4x - x^3. \end{aligned}$$

Selvitetään funktion $A$ määrittelyjoukko. Paraabeli leikkaa $x$-akselin pisteessä, jossa $y = 0$. Ratkaistaan $x$-akselin leikkauskohta.

$$\begin{aligned} y &= 4 - x^2 \\ 0 &= 4 - x^2 \\ x^2 &= 4 \\ x &= 2 \quad \text{tai} \quad x = -2 \end{aligned}$$

Koska $x \geq 0$, niin funktion $A$ määrittelyjoukko on $[0, 2]$.

Polynomifunktio $A(x) = 4x - x^3$ saavuttaa välillä $[0, 2]$ suurimman arvonsa välille $]0, 2[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Funktion $A$ derivaattafunktio on $A'(x) = 4 - 3x^2$.

Lasketaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$4 - 3x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{4}{3}$$

$$x = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Derivaattafunktion nollakohdista välille $]0, 2[$ kuuluu $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Lasketaan funktion $A$ arvot välin päätepisteissä sekä välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$$A(0) = 4 \cdot 0 - 0^3 = 0$$

$$A(2) = 4 \cdot 2 - 2^3 = 0$$

$$A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 4\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{2^3}{\left(\sqrt{3}\right)^3}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{8}{\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}}$$

$$\overset{3)}{=} \frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{8}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{24}{3\sqrt{3}} - \frac{8}{3\sqrt{3}}$$

$$\overset{\sqrt{3})}{=} \frac{16}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{16\sqrt{3}}{9}$$

Vastauksen voi antaa myös tässä muodossa.

Pinta-alan suurin arvo on $\frac{16\sqrt{3}}{9}$.

Vastaus $\frac{16\cdot\sqrt{3}}{9}$ $\left(=\frac{16}{3\sqrt{3}}\right)$

## 245

Tarkastellaan aluksi itseisarvomerkkien sisällä olevaa funktiota. Merkitään $g(x) = -x^2 + 6x - 5$ ja määritetään funktion $g$ suurin ja pienin arvo välillä $[2, 6]$.

Polynomifunktio $g$ saavuttaa välillä $[2, 6]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välille $]2, 6[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Funktion $g$ derivaattafunktio on $g(x) = -2x + 6$.

Määritetään derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} -2x + 6 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Lasketaan funktion $g$ arvot välin päätepisteissä sekä välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$g(2) = 3$ $\qquad$ $g(3) = 4$ suurin

$g(6) = -5$ pienin

Funktion $g$ suurin arvo on $4$ ja pienin arvo $-5$.

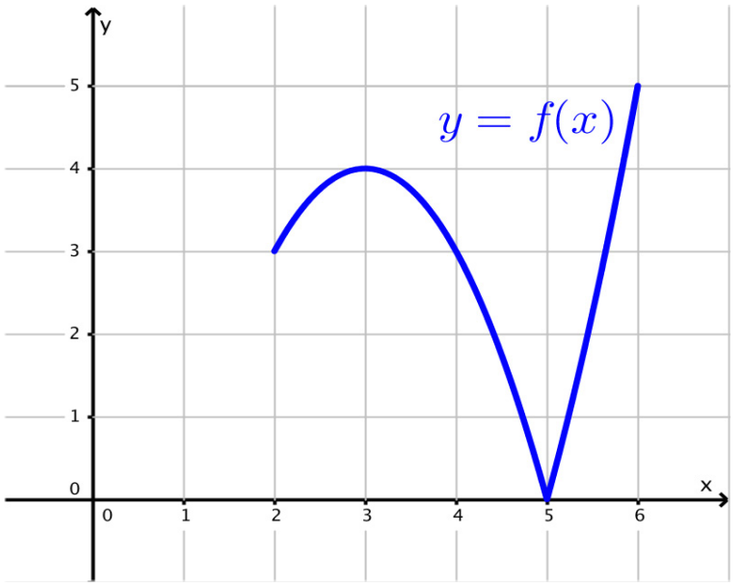
Koska funktio $g$ on jatkuva, niin se saa kaikki arvot suurimman ja pienimmän arvon välistä. Siis funktio $g$ saa kaikki arvot väliltä $[-5, 4]$.

Itseisarvofunktion $f(x) = |g(x)| = |-x^2 + 6x - 5|$ arvo on aina epänegatiivinen. Koska funktio $g$ saa arvon nolla, niin myös funktio $f$ saa arvon nolla. Täten funktion $f$ pienin arvo on $0$.

Koska funktion $g$ suurin arvo on $4$ ja pienin arvo on $-5$, niin funktion $f$ suurin arvo on $|-5| = 5$.

Vastaus suurin arvo $5$, pienin arvo $0$

## Graafinen tarkistus




**Huomaa:** Funktion $f$ suurin arvo saavutetaan, kun $x = 6$:
$f(6) = |g(6)| = |-5| = 5$.

Funktion $f$ pienin arvo saavutetaan, kun $x = 5$:
$f(5) = |g(5)| = |-5^2 + 6 \cdot 5 - 5| = 0$.

## 246

Selvitetään lukujonon $a_n = -n^3 + 29n^2 - 61n$ suurin luku tutkimalla missä kohdassa funktio $f(x) = -x^3 + 29x^2 - 61x$ saa suurimman arvonsa, kun $x \geq 1$.

Funktion $f$ kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = -3x^2 + 58x - 61$.

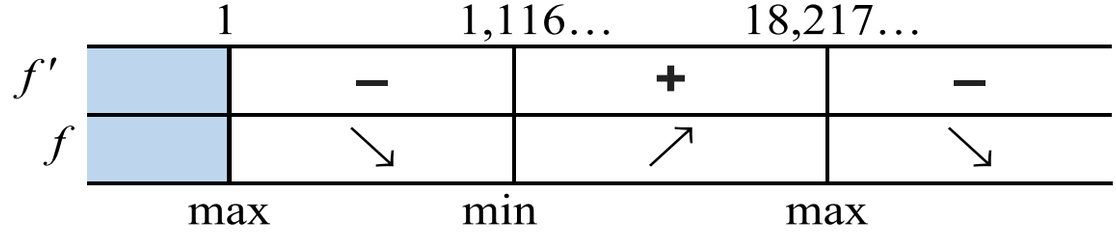
Lasketaan derivaattafunktion nollakohdat.

$-3x^2 + 58x - 61 = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = 1{,}116...$ tai $x = 18{,}217...$

Laaditaan funktion $f$ välille $[1, \infty[$ rajattu kulkukaavio. Derivaattafunktio $f'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

| $x$ | $f'(x)$ | merkki |
|---|---|---|
| 1,05 | –3,4075 | – |
| 2 | 43 | + |
| 20 | –101 | – |



Kulkukaavion perusteella funktio $f$ saavuttaa suurimman arvonsa kohdassa $x = 1$ tai kohdassa $x = 18,217...$ .

Lukujonon $a_n = -n^3 + 29n^2 - 61n$ , missä $n = 1, 2, 3, \ldots,$ suurin luku saadaan siis, kun $n = 1,$ $n = 18$ tai $n = 19.$

Lasketaan kyseiset lukujonon luvut.

$a_1 = -1^3 + 29 \cdot 1^2 - 61 \cdot 1 = -33$

$a_{18} = -18^3 + 29 \cdot 18^2 - 61 \cdot 18 = 2466$ suurin

$a_{19} = -19^3 + 29 \cdot 19^2 - 61 \cdot 19 = 2451$

Lukujonon $a_n$ suurin luku on $a_{18} = 2466$.

Vastaus $a_{18} = 2466$

**247**

a) Funktion $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x$ kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = -3x^2 + 18x - 15$.

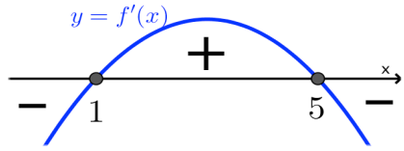
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$-3x^2 + 18x - 15 = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = 1$ tai $x = 5$

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Derivaattafunktio $f'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa.

Derivaattafunktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat ovat $x = 1$ ja $x = 5$.




| | | 1 | | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | − | + | | − |
| $f$ | | ↘ | ↗ | | ↘ |

Kulkukaavion perusteella funktio $f$ on kasvava välillä $1 \le x \le 5$.

b) Funktion arvot kasvavat nopeimmin, kun funktion muutosnopeus on positiivinen ja mahdollisimman suuri. Funktion $f$ muutosnopeuden kertoo derivaattafunktio $f'$.

Määritetään derivaattafunktion suurin arvo välillä $1 \le x \le 5$.

Polynomifunktio $f'(x) = -3x^2 + 18x - 15$ saavuttaa välillä $[1, 5]$ suurimman arvonsa välille $]1, 5[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Funktion $f'$ derivaattafunktio on $f''(x) = -6x + 18$.

Ratkaistaan funktion $f''$ nollakohdat.

$$-6x + 18 = 0$$
$$x = 3$$

Lasketaan funktion $f'$ arvot välin päätepisteissä sekä välille kuuluvassa derivaattafunktion $f''$ nollakohdassa.

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 18 \cdot 1 - 15 = 0$$
$$f'(5) = 3 \cdot 5^2 + 18 \cdot 5 - 15 = 0$$
$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 - 15 = 12 \quad \text{suurin}$$

Derivaattafunktion suurin arvo saavutetaan kohdassa $x = 3$. Funktion $f$ arvot kasvavat nopeimmin, kun $x = 3$.

Vastaus a) $1 \le x \le 5$ b) $x = 3$

## 248

Funktion $f(t) = -0,0006t^4 + 0,02t^3 + 0,88t + 22$ muutosnopeuden kertoo derivaattafunktio $f'(t) = -0,0024t^3 + 0,06t^2 - 0,04t + 0,88$.

Polynomifunktio $f'(t) = -0,0024t^3 + 0,06t^2 - 0,04t + 0,88$ saavuttaa välillä $[1, 31]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välille $]1, 31[$ kuuluvassa derivaattafunktion $f''$ nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Funktion $f'$ derivaattafunktio on
$f''(t) = -0,0072t^2 + 0,12t - 0,04$.

Ratkaistaan derivaattafunktion $f''$ nollakohdat.
$-0,0072t^2 + 0,12t - 0,04 = 0$
$t = 0,340...$ tai $t = 16,326...$

Derivaattafunktion $f''$ nollakohdista välille $]1, 31[$ kuuluu $t = 16{,}326\ldots$.

Lasketaan funktion $f'$ arvot välin päätepisteissä sekä välille kuuluvassa derivaattafunktion $f''$ nollakohdassa.

$f'(1) = 0,8976$
$f'(31) = -14,1984$ pienin
$f'(16,326...) = 5,775...$ suurin

a) Funktion $f$ arvot kasvavat nopeimmin, kun derivaattafunktion $f'$ arvo on positiivinen ja mahdollisimman suuri.

Funktion $f$ arvot kasvavat nopeimmin ajanhetkellä $t = 16{,}326\ldots$ .

Lumen paksuus kasvoi siis nopeimmin tammikuun 16. päivä.

b) Funktion $f$ arvot pienenevät nopeimmin, kun derivaattafunktion $f'$ arvo on negatiivinen ja mahdollisimman pieni.

Funktion $f$ arvot pienenivät nopeimmin ajanhetkellä $t = 31$ .

Lumen paksuus pieneni siis nopeimmin tammikuun 31. päivä.

Vastaus a) tammikuun 16. päivä
b) tammikuun 31. päivä

## 249

Koska piste $(x, y)$ on ympyrällä $x^2 + y^2 = 4$, niin pisteen koordinaatit toteuttavat ympyrän yhtälön. Tällöin saadaan $y^2 = 4 - x^2$.

Annettu lauseke voidaan nyt kirjoittaa muotoon, jossa on vain yksi muuttuja.

$x^2(4 - x - y^2)$ Sijoitetaan $y^2 = 4 - x^2$

$= x^2(4 - x - (4 - x^2))$

$= x^2(-x + x^2)$

$= x^4 - x^3$

Ympyrän $x^2 + y^2 = 4$ keskipiste on origo $(0, 0)$ ja säde on $\sqrt{4} = 2$.
Siis ympyrän kehäpisteen $(x, y)$ $x$-koordinaatti voi vaihdella välillä $-2 \le x \le 2$.

Pitää siis määrittää funktion $f(x) = x^4 - x^3$ suurin ja pienin arvo välillä $[-2, 2]$.

Polynomifunktio $f$ saavuttaa välillä $[-2, 2]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välille $]-2, 2[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 4x^3 - 3x^2$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$4x^3 - 3x^2 = 0$$
$$x^2(4x - 3) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{3}{4}$$

Lasketaan funktion $f$ arvot välin päätepisteissä sekä välille kuuluvissa derivaattafunktion nollakohdissa.

$f(-2) = 24$ suurin $\qquad$ $f(0) = 0$

$f(2) = 8$ $\qquad$ $f(\frac{3}{4}) = -\frac{27}{256}$ pienin

a) Funktion $f$ suurin arvo on $24$ ja se saavutetaan, kun $x = -2$.

Lasketaan $y$:n arvo, kun $x = -2$.

$$y^2 = 4 - x^2$$
$$y^2 = 4 - (-2)^2$$
$$y^2 = 0$$
$$y = 0$$

Lausekkeen suurin arvo on $24$ ja se saavutetaan pisteessä $(-2, 0)$.

b) Funktion $f$ pienin arvo on $-\frac{27}{256}$ ja se saavutetaan, kun $x = \frac{3}{4}$.

Lasketaan $y$:n arvo, kun $x = \frac{3}{4}$.

$$y^2 = 4 - x^2$$
$$y^2 = 4 - (\frac{3}{4})^2$$
$$y^2 = \frac{55}{16}$$
$$y = \sqrt{\frac{55}{16}} = \frac{\sqrt{55}}{4} \quad \text{tai} \quad y = -\sqrt{\frac{55}{16}} = -\frac{\sqrt{55}}{4}$$

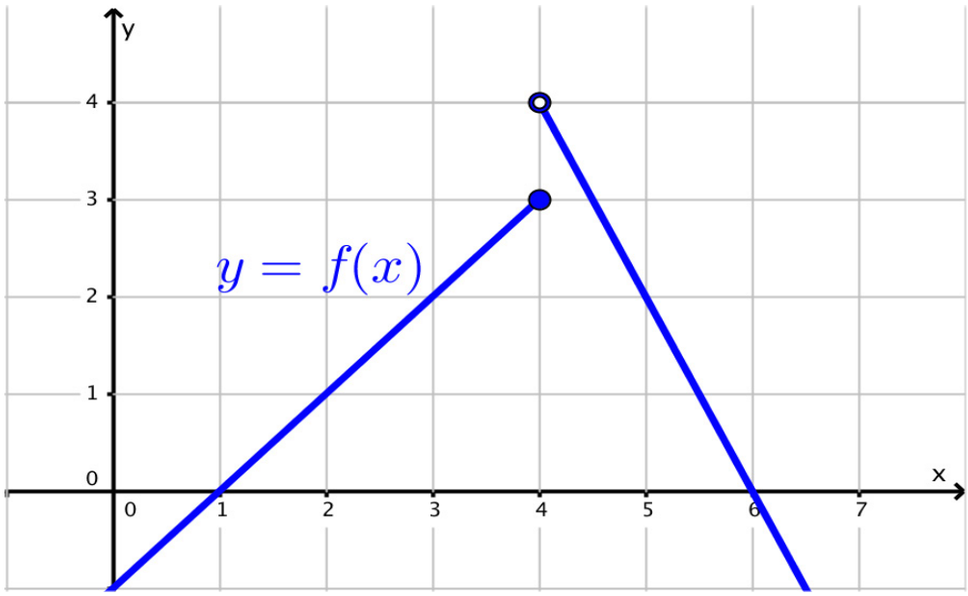
Lausekkeen pienin arvo on $-\frac{27}{256}$ ja se saavutetaan pisteissä $(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{55}}{4})$ ja $(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{55}}{4})$.

Vastaus a) suurin arvo $24$ pisteessä $(-2, 0)$

b) pienin arvo $-\frac{27}{256}$ pisteissä $(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{55}}{4})$ ja $(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{55}}{4})$

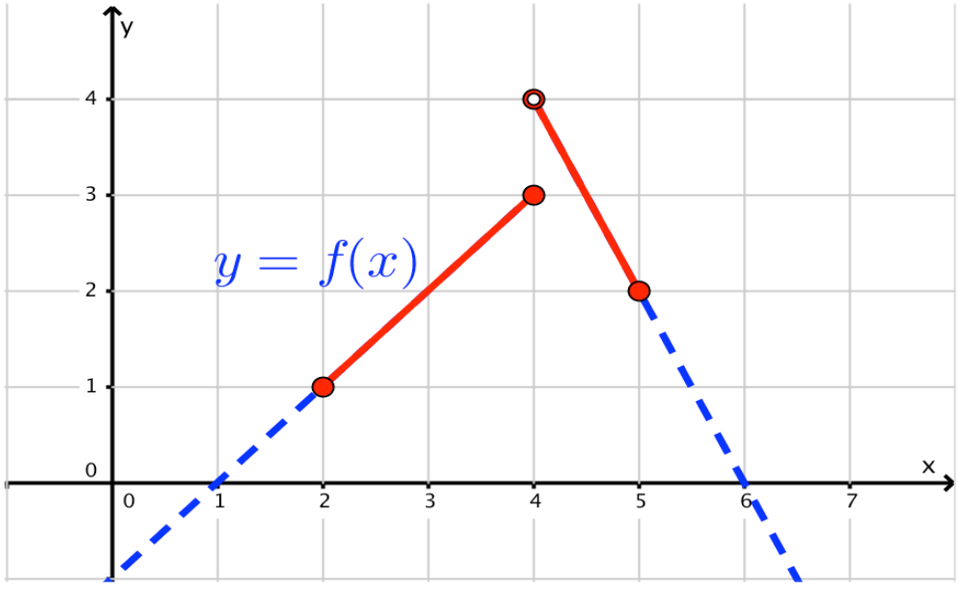
**250**

a) Piirretään funktion $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{kun } x \le 4 \\ -2x+12, & \text{kun } x > 4 \end{cases}$ kuvaaja.




b) Suljetulla välillä $[2, 5]$ funktion pienin arvo on $f(2) = 1$.

Suljetulla välillä $[2, 5]$ funktiolla ei ole suurinta arvoa, koska piste $(4, 5)$ ei kuulu funktion kuvaajaan.



c) Sivulla 109 esitetyn lauseen mukaan funktiolla $f$ on suljetulla välillä $[a, b]$ aina suurin ja pienin arvo, kun funktio $f$ on jatkuva.

Nyt funktio $f$ on epäjatkuva kohdassa $x = 4$. Koska funktio $f$ ei ole jatkuva suljetulla välillä $[2, 5]$, niin sillä ei aina ole suurinta ja pienintä arvoa.

Vastaus b) suurinta arvo ei ole, pienin arvo $f(2) = 1$
c) funktio ei ole jatkuva tutkittavalla välillä

**251**

a) Funktion kuvaajalle kohtaan $x = 2$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $k = f'(2)$. Derivoidaan funktio $f$ ja lasketaan kulmakerroin.

$$f'(x) = 4x^3 - 24x$$

$$k = f'(2) = 2^4 - 12 \cdot 2^2 = -16$$

b) Normaali on kohtisuorassa tangenttia vastaan, joten sen kulmakerroin voidaan ratkaista kohtisuoruusehdosta.

$$\begin{aligned} k_\text{t} \cdot k_\text{n} &= -1 \\ -16 \cdot k_\text{n} &= -1 \\ k_\text{n} &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Vastaus a) $-16$ b) $\frac{1}{16}$

**252**

a) Määritetään kuvaajan piste, johon tangentti piirretään.

$$y = f(1) = 1^2 - 3 = -2$$

Tangentti piirretään pisteeseen $(1, -2)$.

Tangentin kulmakerroin on $k = f'(1)$. Derivoidaan funktio $f$ ja lasketaan kulmakerroin.

$$f'(x) = 2x$$

$$k = f'(1) = 2$$

Tangentti kulkee pisteen $(1, -2)$ kautta ja sen kulmakerroin on 2. Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y - (-2) = 2(x - 1)$$
$$y + 2 = 2x - 2$$
$$y = 2x - 4$$

b) Normaali on kohtisuorassa tangenttia vastaan, joten sen kulmakerroin voidaan ratkaista kohtisuoruusehdosta.

$$k_{\mathrm{t}} \cdot k_{\mathrm{n}} = -1$$
$$2 \cdot k_{\mathrm{n}} = -1$$
$$k_{\mathrm{n}} = -\frac{1}{2}$$

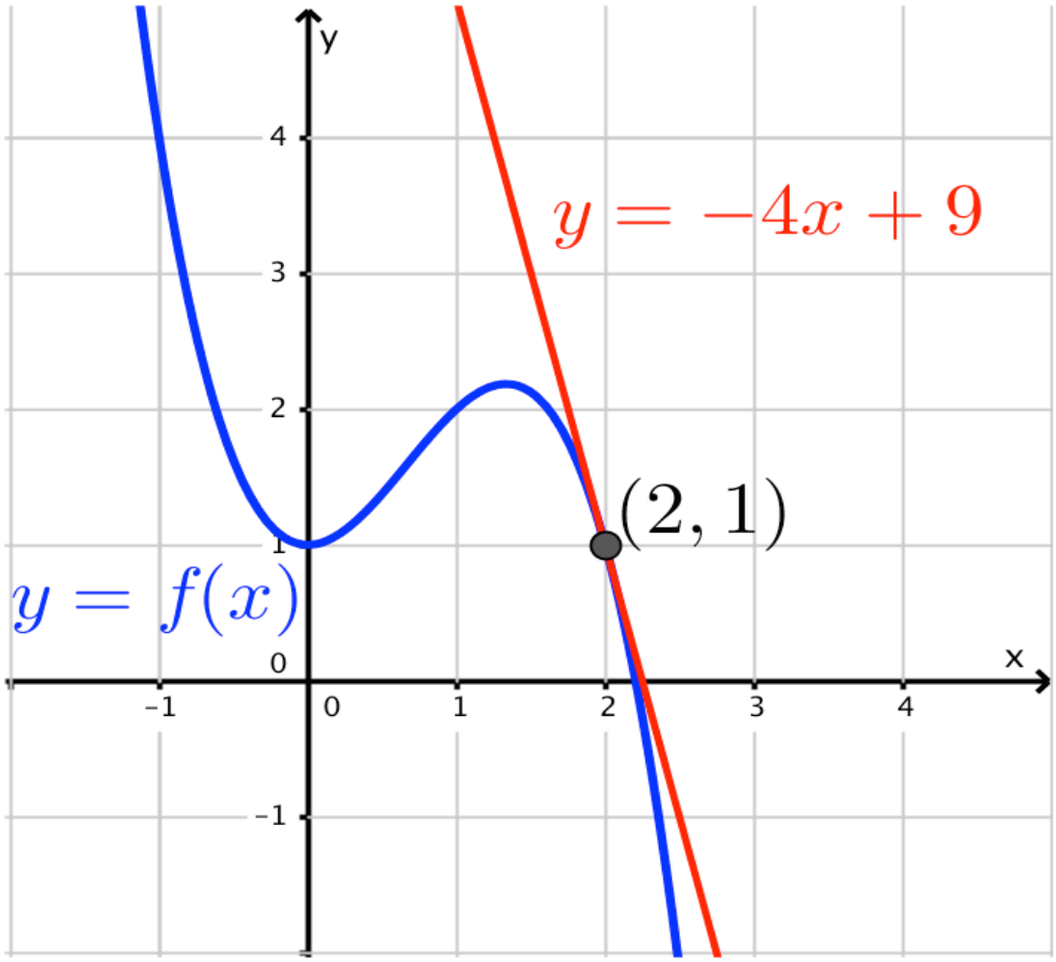
Normaali kulkee pisteen $(1, -2)$ kautta ja sen kulmakerroin on $-\frac{1}{2}$. Muodostetaan normaalin yhtälö.

$$y - (-2) = -\frac{1}{2}(x - 1)$$
$$y + 2 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$
$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

Vastaus a) $y = 2x - 4$ b) $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

**253**

a) Piirretään funktion $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 1$ kuvaaja sekä kuvaajalle tangentti kohtaan $x = 2$.




Geometriaohjelmalla tangentin yhtälöksi saadaan $y = -4x + 9$.

b) Määritetään kuvaajan piste, johon tangentti piirretään.

$$y = f(2) = -2^3 + 2 \cdot 2^2 + 1 = 1$$

Tangentti piirretään pisteeseen (2, 1).

Tangentin kulmakerroin on $k = f'(2)$. Derivoidaan funktio $f$ ja lasketaan kulmakerroin.

$$f'(x) = -3x^2 + 4x$$
$$k = f'(2) = -4$$

Tangentti kulkee pisteen (2, 1) kautta ja sen kulmakerroin on –4. Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y - 1 = -4(x - 2)$$
$$y - 1 = -4x + 8$$
$$y = -4x + 9$$

Vastaus $y = -4x + 9$

Tekijä • Pitkä matematiikka 6 • 29.5.2017

**254**

Määritetään kuvaajan piste, johon tangentti piirretään.

$$y = -(-1)^2 + 3 = 2$$

Tangentti piirretään pisteeseen $(-1, 2)$

Tangentin kulmakerroin on $k = y'(2)$. Derivoidaan ja lasketaan kulmakerroin.

$$y'(x) = -2x$$
$$k = y'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$

Tangentti kulkee pisteen $(-1, 2)$ kautta ja sen kulmakerroin on $2$.

$$y - 2 = 2(x - (-1))$$
$$y - 2 = 2x + 2$$
$$y = 2x + 4$$

Määritetään tangentin ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.

Tangentti leikkaa $y$-akselin pisteessä, jolle $x = 0$.

$$y = 2 \cdot 0 + 4 = 4$$

Leikkauspiste on $(0, 4)$.

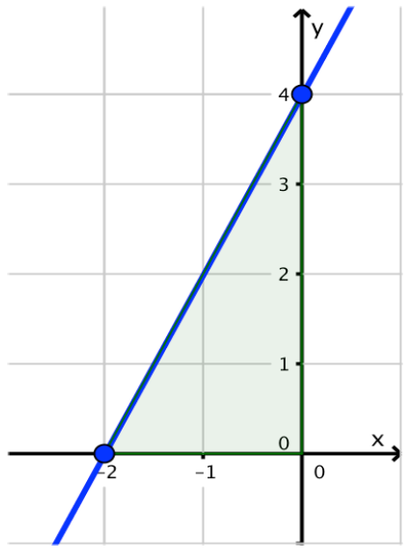
Tekijä • Pitkä matematiikka 6 • 29.5.2017

Tangentti leikkaa $x$-akselin pisteessä, jolle $y = 0$.

$$0 = 2x + 4$$
$$x = -2$$

Leikkauspiste on $(-2, 0)$.

Piirretään mallikuva.




Kolmion kanta on $|-2| = 2$
ja korkeus 4.

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$$

Vastaus 4

# 255

Kirjan 1. painoksessa on tehtävässä virhe. Ajan $t$ paikalla pitäisi olla vaakasuuntainen etäisyys heittopaikasta $x$.

Jirko kuvasi tennispallon heiton ja sovitti kuvasarjaan lentorataa kuvaavan käyrän $y = -0{,}16x^2 + 1{,}1x + 1$, missä $x$ on pallon vaakasuora etäisyys heiton lähtöpaikasta ja $y$ on pallon etäisyys maanpinnasta. Määritä asteen tarkkuudella, missä kulmassa
a) pallo nousee, kun sen vaakasuuntainen etäisyys heittopaikasta on 2 metriä
b) pallo osuu maahan.

**Ratkaisu**
Kaltevuuskulma on käyrälle tarkastelupisteeseen asetetun tangentin ja $x$-akselin välinen kulma. Selvitetään siis tarkastelupisteeseen piirretyn tangentin suuntakulma.

a) Merkitään $f(x) = -0{,}16x^2 + 1{,}1x + 1$.

Lasketaan käyrälle kohtaan $x = 2$ piirretyn tangentin kulmakerroin $k = f'(2)$.

$$f'(x) = -0{,}32x + 1{,}1$$
$$k = f'(2) = -0{,}32 \cdot 2 + 1{,}1 = 0{,}46$$

Määritetään tangentin suuntakulma.

$$\tan\alpha = 0{,}46$$
$$\alpha = \tan^{-1} 0{,}46 = 24{,}70...^\circ \approx 25^\circ$$

Tangentin suuntakulma on 25°, joten pallo nousee 25° kulmassa.

b) Ratkaistaan ensin, kuinka pitkälle pallo lentää vaakasuunnassa. Maahan osuessaan pallon etäisyys maan pinnasta on 0. Muodostetaan yhtälö.

$$y = -0{,}16x^2 + 1{,}1x + 1$$

$$0 = -0{,}16x^2 + 1{,}1x + 1$$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$$x = -0{,}812... \quad \text{tai} \quad x = 7{,}687...$$

Koska $x \geq 0$, niin pallo lentää vaakasuunnassa $x = 7{,}687\ldots$(m).

Lasketaan tangentin kulmakerroin, kun $x = 7{,}687\ldots$ .

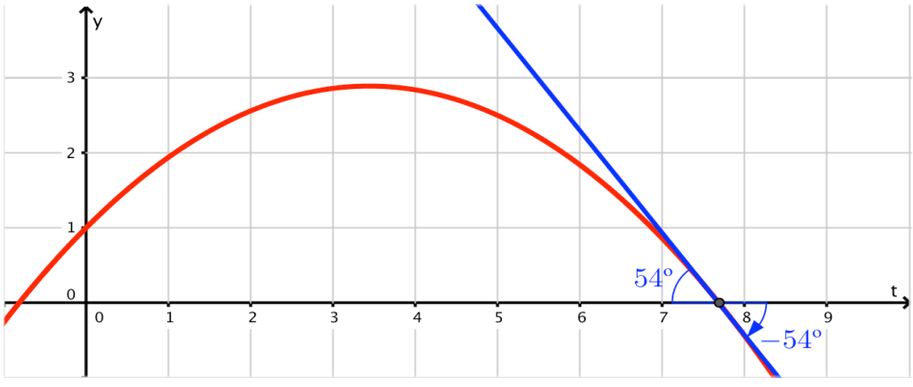
$$k = f'(7{,}687...) = -0{,}32 \cdot 7{,}687... + 1{,}1 = -1{,}360...$$

Määritetään tangentin suuntakulma.

$$\tan\alpha = -1{,}360...$$

$$\alpha = \tan^{-1}(-1{,}360...) = -53{,}676...° \approx -54°$$

Koska suuntakulma on $-54°$, niin pallo osuu maahan $54°$ kulmassa.




Vastaus a) 25° b) 54°

## 256

Määritetään käyrien leikkauspisteen $x$-koordinaatti.

$$x^2 - 2 = x^2 - 8x + 16$$
$$8x = 18$$
$$x = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

Määritetään käyrien derivaatat ja tangenttien kulmakertoimet kohdassa $x = \frac{9}{4}$.

$y_1(x) = x^2 - 2$

$y_1'(x) = 2x$

$k_1 = y_1'(\frac{9}{4}) = 2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$

$y_2(x) = x^2 - 8x + 16$

$y_2'(x) = 2x - 8$

$k_2 = y_2'(\frac{9}{4}) = 2 \cdot \frac{9}{4} - 8 = -\frac{7}{2}$

Lasketaan tangenttien suuntakulmat.

$\tan\alpha_1 = \frac{9}{2}$

$\alpha_1 = \tan^{-1}\frac{9}{2} = 77,47...°$

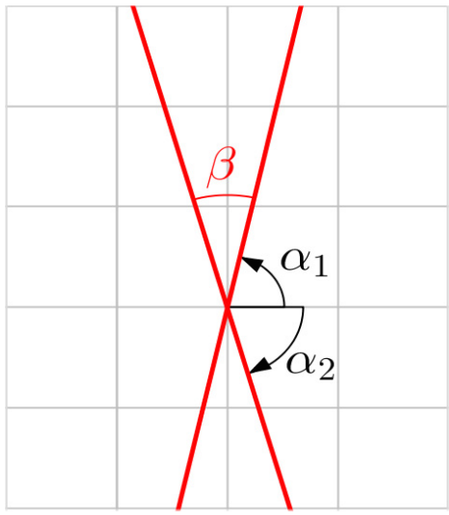
$\tan\alpha_2 = -\frac{7}{2}$

$\alpha_2 = \tan^{-1}(-\frac{7}{2}) = -74,05...°$

Tekijä • Pitkä matematiikka 6 • 29.5.2017

Piirretään mallikuva tangenteista ja lasketaan tangenttien välinen kulma.

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| = 77,47...^\circ + 74,05...^\circ = 151,52...^\circ$$




Koska suorien välinen kulma toteuttaa aina ehdon $0^\circ \le \beta \le 90^\circ$, niin tangenttien välinen kulma on

$$\beta = 180^\circ - 151,52...^\circ = 28,47...^\circ \approx 28^\circ.$$

Vastaus 28°

**257**

Lasketaan käyrien $y = x^2 - 5x + 2$ ja $y = x^2 - 7x + 8$ välinen kulma.

Määritetään käyrien leikkauspisteen $x$-koordinaatti.

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 2 &= x^2 - 7x + 8 \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Määritetään käyrien derivaatat ja tangenttien kulmakertoimet kohdassa $x = 3$.

| | |
|---|---|
| $y_1(x) = x^2 - 5x + 2$ | $y_2(x) = x^2 - 7x + 8$ |
| $y_1'(x) = 2x - 5$ | $y_2'(x) = 2x - 7$ |
| $k_1 = y_1'(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 1$ | $k_2 = y_2'(3) = 2 \cdot 3 - 7 = -1$ |

Koska $k_1 \cdot k_2 = 1 \cdot (-1) = -1$, niin suorien kohtisuoruusehdon mukaan tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

On siis osoitettu, että käyrät leikkaavat toisensa kohtisuorasti. □

**258**

Osoitetaan ensin, että molemmat käyrät kulkevat pisteen $(1,-1)$ kautta.

| | |
|---|---|
| $y = -x^3$ | $y = -x^2 - x + 1$ |
| $-1 = -1^3$ | $-1 = -1^2 - 1 + 1$ |
| $-1 = -1$ | $-1 = -1$ |
| tosi | tosi |

Pisteen $(1, -1)$ koordinaatit toteuttavat molempien käyrien yhtälöt, joten molemmat käyrät kulkevat pisteen $(1, -1)$ kautta.

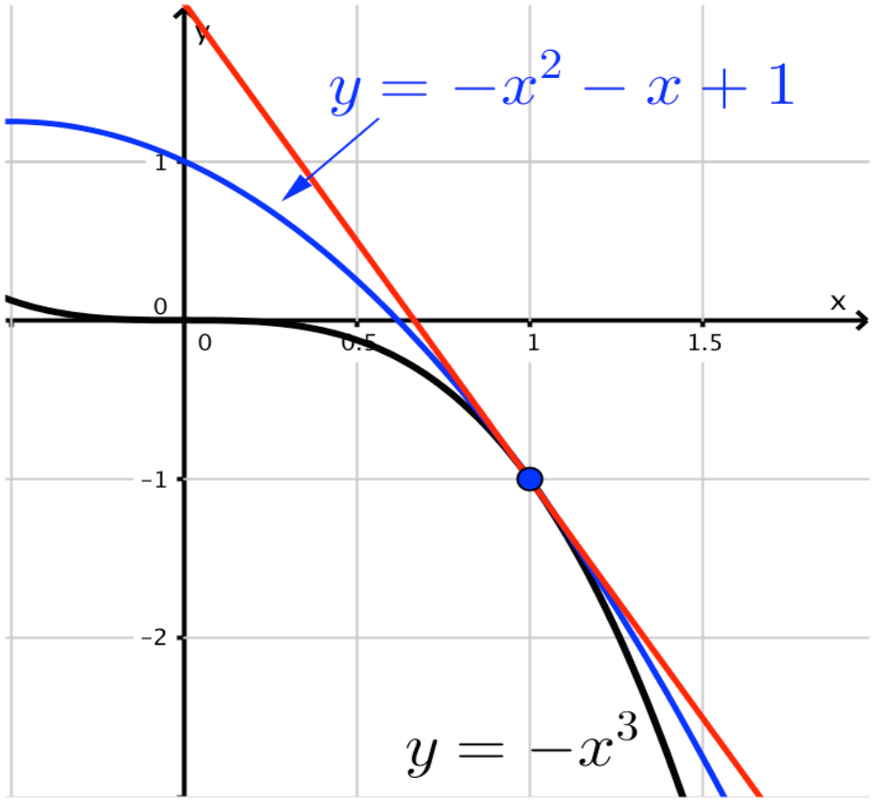
Osoitetaan seuraavaksi, että käyrille kohtaan $x = 1$ piirretyt tangentit yhtyvät. Määritetään käyrien derivaatat ja tangenttien kulmakertoimet kohdassa $x = 1$

| | |
|---|---|
| $y_1(x) = -x^3$ | $y_2(x) = -x^2 - x + 1$ |
| $y_1'(x) = -3x^2$ | $y_2'(x) = -2x - 1$ |
| $k_1 = y_1'(1) = -3 \cdot 1^2 = -3$ | $k_2 = y_2'(1) = -2 \cdot 1 - 1 = -3$ |

Koska kohtaan $x = 1$ piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet ovat yhtä suuret, niin tangentit yhtyvät ja käyrillä on yhteinen tangentti.

On siis osoitettu, että käyrät sivuavat toisiaan pisteessä $(1, -1)$. □

## Graafinen tarkistus



Tekijä • Pitkä matematiikka 6 • 29.5.2017

**259**

Lasketaan tangentin haluttu kulmakerroin suuntakulman avulla.

$$k = \tan\alpha = \tan 45^\circ = 1$$

Toisaalta tangentin kulmakerroin kohdassa $x$ on käyrän $y = x^2 - 2x - 3$ derivaatan arvo kohdassa $x$.

$$k = y'(x) = 2x - 2$$

Ratkaistaan missä kohdassa $x$ tangentin kulmakerroin saa arvon $1$.

$$\begin{aligned} 2x - 2 &= 1 \\ 2x &= 3 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Tangentin kulmakerroin on $1$, kun $x = \frac{3}{2}$. Lasketaan paraabelilla olevan pisteen $y$-koordinaatti.

$$y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} - 3 = -\frac{15}{4}$$

Paraabelin tangentin suuntakulma on $+45^\circ$ pisteessä $(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4})$.

Vastaus $(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4})$

**260**

a) Käyrälle $y = x^3 - 2x + 4$ kohtaan $x$ piirretyn tangentin kulmakerroin on

$k = y'(x) = 3x^2 - 2.$

Ratkaistaan missä kohdassa $x$ kulmakerroin on $1$.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2 &= 1 \\ 3x^2 &= 3 \\ x^2 &= 1 \\ x &= 1 \quad \text{tai} \quad x = -1 \end{aligned}$$

Tangentin kulmakerroin on $1$, kun $x = 1$ tai $x = -1$.

Lasketaan käyrän pisteen $y$-koordinaatit näissä kohdissa.

Kun $x = 1$, niin $y = 1^3 - 2 \cdot 1 + 4 = 3$.
Kun $x = -1$, niin $y = (-1)^3 - 2 \cdot (-1) + 4 = 5$.

Käyrän pisteisiin $(1, 3)$ ja $(-1, 5)$ piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet ovat $1$.

b) Määritetään pisteeseen (1, 3) piirretyn tangentin yhtälö.
Kulmakerroin on 1.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$
$$y - 3 = 1 \cdot (x - 1)$$
$$y = x + 2$$

Määritetään pisteeseen (–1, 5) piirretyn tangentin yhtälö.
Kulmakerroin on 1.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$
$$y - 5 = 1 \cdot (x - (-1))$$
$$y = x + 6$$

Vastaus a) (1, 3) ja (–1, 5) b) $y = x + 2$ ja $y = x + 6$

**261**

a) Määritetään kuvaajan piste, johon tangentti piirretään.

$$y = f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 - (-1) = -2$$

Tangentti piirretään pisteeseen $(-1, -2)$.

Tangentin kulmakerroin on $k = f'(-1)$. Derivoidaan funktio $f$ ja lasketaan kulmakerroin.

$$f'(x) = 6x^2 - 2x - 1$$
$$k = f'(-1) = 6 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 1 = 7$$

Tangentti kulkee pisteen $(-1, -2)$ kautta ja sen kulmakerroin on 7. Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y - (-2) = 7(x - (-1))$$
$$y + 2 = 7x + 7$$
$$y = 7x + 5$$

b) Normaali on kohtisuorassa tangenttia vastaan, joten sen kulmakerroin voidaan ratkaista kohtisuoruusehdosta.

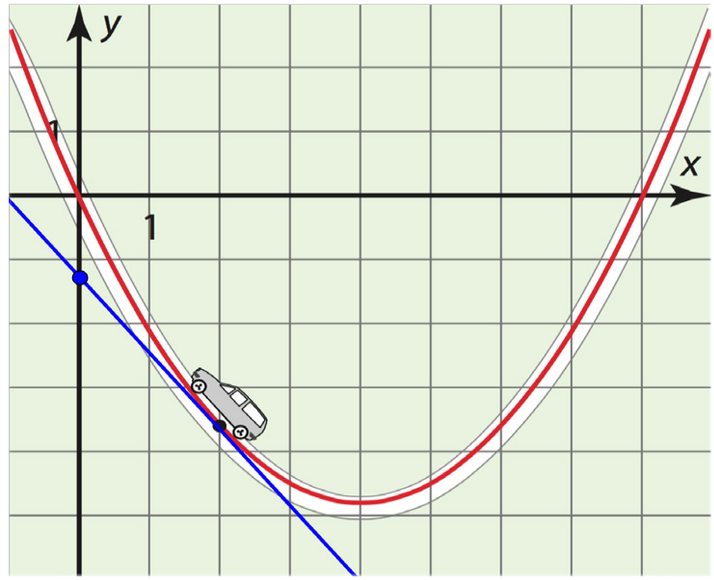
$$k_{\mathrm{t}} \cdot k_{\mathrm{n}} = -1$$
$$7 \cdot k_{\mathrm{n}} = -1$$
$$k_{\mathrm{n}} = -\frac{1}{7}$$

Normaali kulkee pisteen $(-1,-2)$ kautta ja sen kulmakerroin on $-\frac{1}{7}$. Muodostetaan normaalin yhtälö.

$$y-(-2) = -\frac{1}{7}(x-(-1))$$
$$y+2 = -\frac{1}{7}x - \frac{1}{7}$$
$$y = -\frac{1}{7}x - \frac{15}{7}$$

Vastaus a) $y = 7x + 5$ b) $y = -\frac{1}{7}x - \frac{15}{7}$

**262**




Muodostetaan käyrälle $y = 0,3x^2 - 2,4x$ kohtaan $x = 2$ piirretyn tangentin yhtälö sekä ratkaistaan tangentin ja $y$-akselin leikkauspiste.

Tangentin kulmakerroin $k = y'(2)$. Derivoidaan ja lasketaan kulmakerroin.

$$y'(x) = 0,6x - 2,4$$
$$k = y'(2) = 0,6 \cdot 2 - 2,4 = -1,2$$

Tangentti kulkee pisteen $(2;-3,6)$ kautta ja sen kulmakerroin on $-1,2$. Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y - (-3,6) = -1,2(x - 2)$$
$$y + 3,6 = -1,2x + 2,4$$
$$y = -1,2x - 1,2$$

Tangentin leikkaa $y$-akselin kohdassa $y = -1,2$ eli pisteessä $(0;-1,2)$. Auto osuus lumivalliin pisteessä $(0; -1,2)$.

Vastaus $(0; -1,2)$

**263**

Määritetään kuvaajan piste, johon tangentti ja normaali piirretään.

$$y(1) = -1^4 + 4 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 1$$

Tangentti ja normaali piirretään pisteeseen $(1, 1)$.

Määritetään tangentin kulmakerroin.

$$y'(x) = -4x^3 + 8x - 2$$

$$k = y'(1) = -4 \cdot 1^3 + 8 \cdot 1 - 2 = 2$$

Tangentti kulkee pisteen $(1, 1)$ kautta ja sen kulmakerroin on $2$.
Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y - 1 = 2(x - 1)$$
$$y - 1 = 2x - 2$$
$$y = 2x - 1$$

Normaali on kohtisuorassa tangenttia vastaan. Määritetään normaalin kulmakerroin kohtisuoruusehdon avulla.

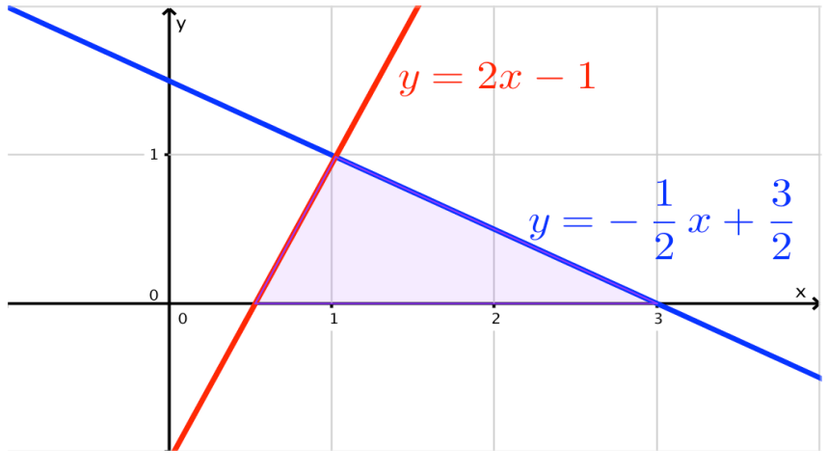
$$k_{\mathrm{t}} \cdot k_{\mathrm{n}} = -1$$
$$2 \cdot k_{\mathrm{n}} = -1$$
$$k_{\mathrm{n}} = -\frac{1}{2}$$

Normaali kulkee pisteen $(1, 1)$ kautta ja sen kulmakerroin on $-\frac{1}{2}$.
Muodostetaan normaalin yhtälö.

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$
$$y - 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Tekijä • Pitkä matematiikka 6 • 29.5.2017

Piirretään mallikuva.




Koska suorat leikkaavat pisteessä (1, 1), niin kolmion korkeus on 1.

Kolmion kanta saadaan suorien ja $x$-akselin leikkauskohtien avulla.

$$2x - 1 = 0 \qquad\qquad -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \quad |\cdot 2$$
$$x = \frac{1}{2} \qquad\qquad -x + 3 = 0$$
$$x = 3$$

Kolmion kanta on $3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 1 = \frac{5}{4}$$

Vastaus $\frac{5}{4}$

Tekijä • Pitkä matematiikka 6 • 29.5.2017

# 264

Määritetään kohtiin pisteisiin $A$ ja $B$ piirrettyjen tangenttien suuntakulmat.

Käyrälle $y = -0,01x^2 + 1,6x$ kohtaan $x$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $k = y'(x) = -0,02x + 1,6$.

Lasketaan tangentin kulmakerroin ja suuntakulma kohdissa $x = 0$ ja $x = 40$.

$k_A = y'(0) = -0,02 \cdot 0 + 1,6 = 1,6$

$\tan\alpha = 1,6$

$\alpha = \tan^{-1} 1,6 = 57,99...°$

$k_B = y'(40) = -0,02 \cdot 40 + 1,6 = 0,8$

$\tan\beta = 0,8$

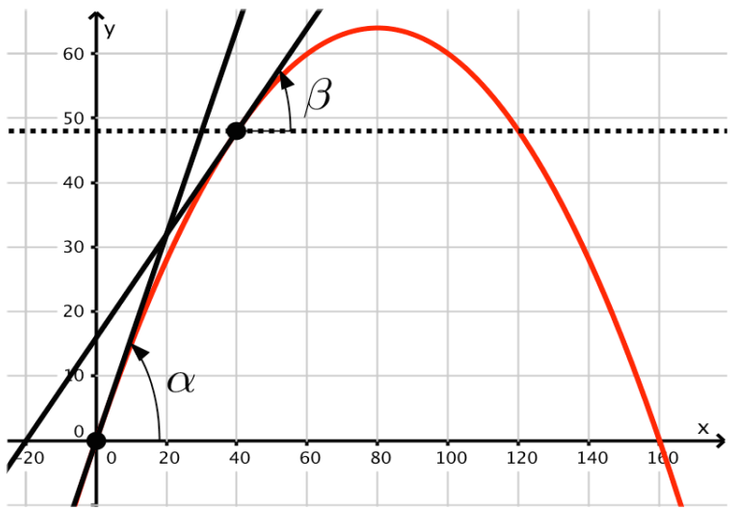
$\beta = \tan^{-1} 0,8 = 38,65...°$

Tie kääntyy pisteiden $A$ ja $B$ välillä

$\alpha - \beta$

$= 57,99...° - 38,65...°$.

$= 19,33...° \approx 19°$




Vastaus 19°

Tekijä • Pitkä matematiikka 6 • 29.5.2017

**265**

Määritetään käyrien $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ ja $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 3$ leikkauspisteiden $x$-koordinaatit.

$-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} = 2x^2 + 1$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = -2$ tai $x = 0$

**1)** Määritetään käyrien derivaatat ja tangenttien kulmakertoimet leikkauskohdassa $x = -2$.

$y_1'(x) = -x$

$k_1 = y_1'(-2) = 2$

$y_2'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$k_2 = y_2'(-2) = \frac{1}{2}$

Lasketaan tangenttien suuntakulmat.

$\tan\alpha_1 = 2$

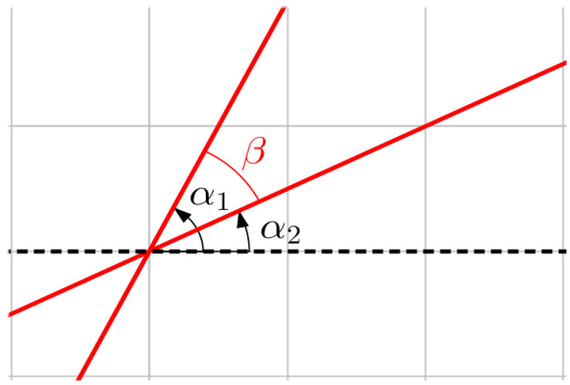
$\alpha_1 = \tan^{-1} 2 = 63,43...°$

$\tan\alpha_2 = \frac{1}{2}$

$\alpha_2 = \tan^{-1}\frac{1}{2} = 26,56...°$

Piirretään mallikuva tangenteista ja lasketaan tangenttien välinen kulma.

$$\begin{aligned}\beta &= \alpha_1 - \alpha_2 \\ &= 63,43...^\circ - 26,56...^\circ \\ &= 36,86...^\circ \approx 37^\circ\end{aligned}$$




**2)** Määritetään käyrien derivaatat ja tangenttien kulmakertoimet leikkauskohdassa $x = 0$.

$$y_1'(x) = -x$$
$$k_1 = y_1'(0) = 0$$

$$y_2'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$
$$k_2 = y_2'(0) = \frac{3}{2}$$

Lasketaan tangenttien suuntakulmat.

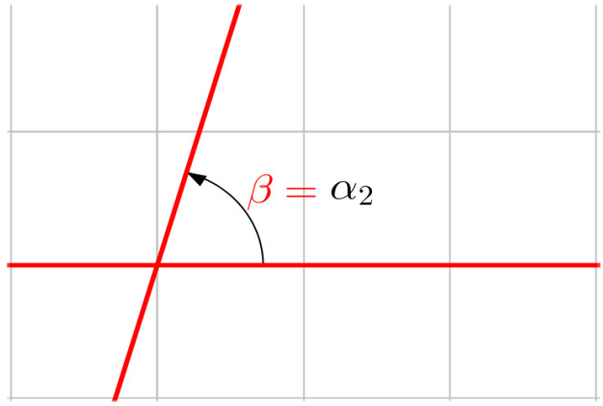
$$\tan\alpha_1 = 0$$
$$\alpha_1 = \tan^{-1} 0 = 0^\circ$$

$$\tan\alpha_2 = \frac{3}{2}$$
$$\alpha_2 = \tan^{-1}\frac{3}{2} = 56,30...^\circ$$

Tekijä • Pitkä matematiikka 6 • 29.5.2017

Piirretään mallikuva tangenteista ja lasketaan tangenttien välinen kulma.

$$\beta = \alpha_2$$
$$= 56,30...^\circ \approx 56^\circ$$




Vastaus 37° ja 56°

Tekijä • Pitkä matematiikka 6 • 29.5.2017

**266**

Määritetään käyrien $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$ ja $y = 2x^2 + 1$.
leikkauspisteiden $x$-koordinaatit.

$-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} = 2x^2 + 1$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = \frac{1}{3}$

Koska yhtälöllä on vain yksi ratkaisu, on käyrillä täsmälleen yksi leikkauspiste. Lasketaan leikkauspisteen $y$-koordinaatti.

$y = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = \frac{11}{9}$ $y$-koordinaatin voi laskea kummasta tahansa käyrästä.

Käyrien ainoa leikkauspiste on $(\frac{1}{3},\ \frac{11}{9})$.

Määritetään käyrien derivaatat ja tangenttien kulmakertoimet leikkauskohdassa $x = \frac{1}{3}$.

$y_1'(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$k_1 = y_1'(\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$

$y_2'(x) = 4x$

$k_2 = y_2'(\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$

Koska kohtaan leikkauspisteeseen $(\frac{1}{3},\ \frac{11}{9})$ piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet ovat yhtä suuret, niin tangentit yhtyvät ja käyrillä on yhteinen tangentti.

On siis osoitettu, että käyrät sivuavat toisiaan pisteessä $(\frac{1}{3},\ \frac{11}{9})$. □

**267**

Käyrät $y_1 = -4x^2 + ax$ ja $y_2 = 2x^2 + \frac{a}{4}$ sivuavat, jos niillä on leikkauspisteessä yhteinen tangentti. Sivuamiskohdassa käyrien derivaattojen on siis oltava yhtä suuret.

$$y_1'(x) = y_2'(x)$$
$$-8x + a = 4x$$
$$a = 12x$$

Koska sivuamiskohdassa käyrillä on yhteinen piste, niin niiden $y$-koordinaatit ovat sivuamiskohdassa yhtä suuret.

$$y_1 = y_2$$
$$-4x^2 + ax = 2x^2 + \frac{a}{4}$$
$$-6x^2 + ax - \frac{a}{4} = 0$$

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} a = 12x \\ -6x^2 + ax - \frac{a}{4} = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ ja $a = 0$ tai $x = \frac{1}{2}$ ja $a = 6$

Käyrät sivuavat toisiaan, kun $a = 0$ tai $a = 6$.

Vastaus $a = 0$ tai $a = 6$

## 268

Käyrät $y_1 = -x^2 + 3x$ ja $y_2 = -x^2 + 5x + a$ leikkaavat toisensa kohtisuorasti, jos niiden leikkauspisteeseen piirretyt tangentit leikkaavat kohtisuorasti. Sivuamispisteessä käyrien derivaattojen tulon on siis oltava $-1$.

$$y_1'(x) \cdot y_2'(x) = -1$$
$$(-2x + 3) \cdot (-2x + 5) = -1$$

Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$$x = 2$$

Käyrät leikkaavat toisensa siis kohtisuorasta kohdassa $x = 2$. Koska leikkauskohdassa käyrillä on yhteinen piste, niin niiden $y$-koordinaatit ovat yhtä suuret.

$$y_1(2) = y_2(2)$$
$$-2^2 + 3 \cdot 2 = -2^2 + 5 \cdot 2 + a$$
$$a = -4$$

Käyrät leikkaavat toisensa kohtisuorasti, kun $a = -4$.

Vastaus $a = -4$

**269**

Käyrälle $y = 2x^5 + 10x^3 - 38x$ kohtaan $x$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $k = y'(x) = 10x^4 + 30x^2 - 38$.

Ratkaistaan missä kohdassa $x$ kulmakerroin on 2.

$$k = 2$$

$10x^4 + 30x^2 - 38 = 2$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = -1$ tai $x = 1$

Tangentin kulmakerroin on 1, kun $x = -1$ tai $x = 1$.

Lasketaan käyrän pisteen $y$-koordinaatit näissä kohdissa.

Kun $x = -1$, niin $y = 2 \cdot (-1)^5 + 10 \cdot (-1)^3 - 38 \cdot (-1) = 26$.

Kun $x = 1$, niin $y = 2 \cdot 1^5 + 10 \cdot 1^3 - 38 \cdot 1 = -26$.

Tangentit piirretään pisteisiin $(-1, 26)$ ja $(1, -26)$.

**1)** Määritetään pisteeseen $(-1, 26)$ piirretyn tangentin yhtälö.
Kulmakerroin on 2.

$$y - 26 = 2(x - (-1))$$
$$y - 26 = 2x + 2$$
$$y = 2x + 28$$

**2)** Määritetään pisteeseen $(1, -26)$ piirretyn tangentin yhtälö. Kulmakerroin on $2$.

$$y-(-26)=2(x-1)$$
$$y+26=2x-2$$
$$y=2x-28$$

Vastaus $y=2x+28$ tai $y=2x-28$

**270**

Käyrälle samaan pisteeseen piirretty tangentti ja normaali ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Ratkaistaan etsittyyn pisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin kohtisuoruusehdon perusteella.

$k_n \cdot k_t = -1$ Sijoitetaan $k_n = -1$.

$-1 \cdot k_t = -1$

$k_t = 1$

Käyrälle $y = x^2 - 3x$ kohtaan $x$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $k = y'(x) = 2x - 3$.

Ratkaistaan missä kohdassa $x$ tangentin kulmakerroin on $1$.

$k_t = 1$

$2x - 3 = 1$

$x = 2$

Lasketaan käyrän pisteen $y$-koordinaatit tässä kohdassa:
kun $x = 2$, niin $y = 2^2 - 3 \cdot 2 = -2$.

Normaali kulkee pisteen $(2, -2)$ kautta ja sen kulmakerroin on $-1$.
Muodostetaan normaalin yhtälö.

$y - (-2) = -1(x - 2)$

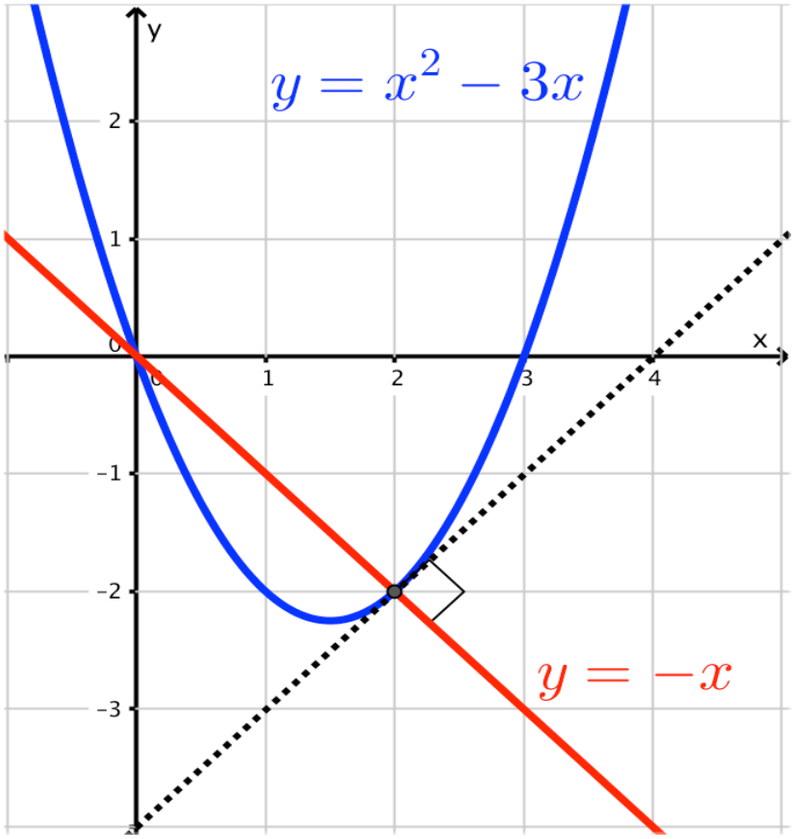
$y + 2 = -x + 2$

$y = -x$

Vastaus $y = -x$

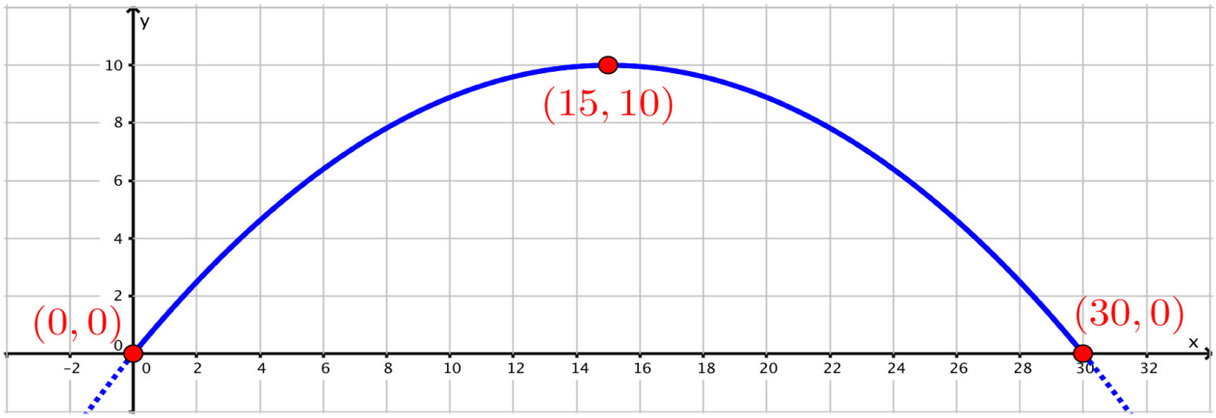
Tekijä • Pitkä matematiikka 6 • 29.5.2017

## Graafinen tarkistus



## 271

Kiven lentorata oli alaspäin aukeava paraabeli. Sijoitetaan paraabeli koordinaatistoon niin, että kiven lähtöpiste on origossa. Tällöin se osuu maahan pisteessä $(30,0)$. Paraabeli saavuttaa huippunsa nollakohtien $x = 0$ ja $x = 30$. Huippu on siis pisteessä $(15,10)$.




Määritetään ensin paraabelin yhtälö, joka on muotoa $y = ax^2 + bx + c$. Kun yhtälöön sijoitetaan pisteiden koordinaatit, saadaan yhtälöryhmä, josta voidaan ratkaista kertoimet $a$, $b$ ja $c$.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & (x, y) = (0,0) \\ 0 = a \cdot 30^2 + b \cdot 30 + c & (x, y) = (30,0) \\ 10 = a \cdot 15^2 + b \cdot 15 + c & (x, y) = (15,10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 0 \\ 30^2 a + 30b + c = 0 \\ 15^2 a + 15b + c = 10 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöryhmä laskimella.

$a = -\frac{2}{45}$, $b = \frac{4}{3}$ ja $c = 0$

Paraabelin yhtälö on $y = -\frac{2}{45}x^2 + \frac{4}{3}x$.

Tekijä • Pitkä matematiikka 6 • 29.5.2017

Lähtökulma saadaan selvillä määrittämällä tangentin suuntakulma kohdassa $x = 0$.

Määritetään käyrän $y = -\frac{2}{45}x^2 + \frac{4}{3}x$ derivaatta ja tangentin kulmakerroin kohdassa $x = 0$.

$$y'(x) = -\frac{4}{45}x + \frac{4}{3}$$

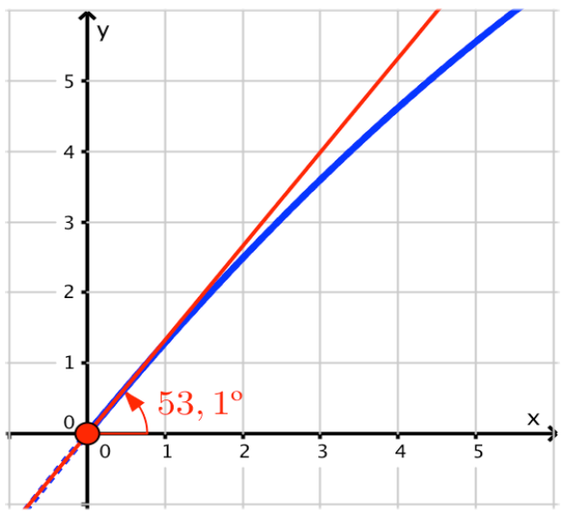
$$k = y'(0) = -\frac{4}{45} \cdot 0 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

Lasketaan tangentin suuntakulma.

$$\tan\alpha = \frac{4}{3}$$

$$\alpha = \tan^{-1}(\frac{4}{3}) = 53{,}130...° \approx 53{,}1°$$

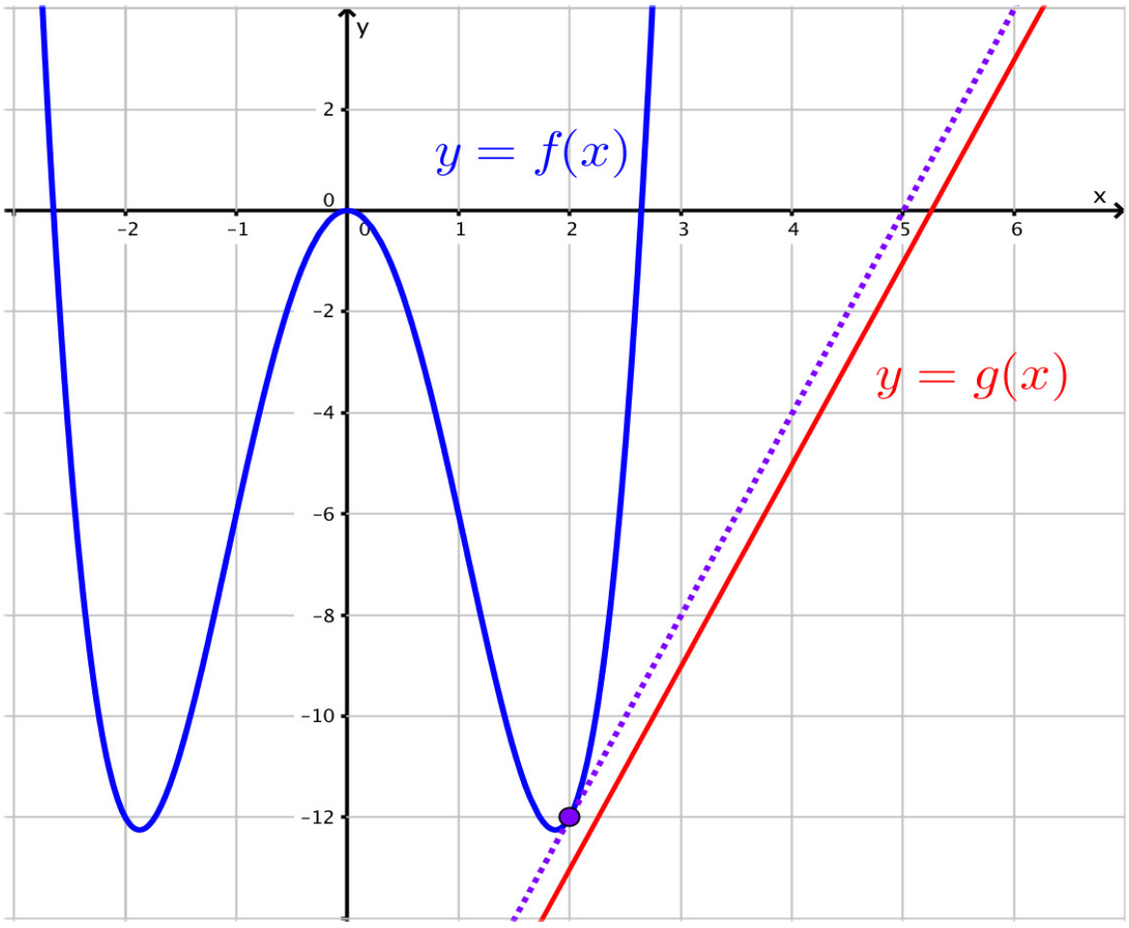
Koska tangentin suuntakulma on 53,1º, niin kiven lähtökulma on 53,1°




Vastaus 53,1°

**272**

a) Piirretään funktioiden kuvaajat.




Funktion $f$ kuvaajan pisteessä, joka on lähimpänä funktion $g$ kuvaajaa, on funktion $f$ kuvaajalle piirretty tangentti yhdensuuntainen suoran $y = g(x)$ kanssa.

Kuvan perusteella etsitylle pisteelle $(x, y)$ pätee $x > 0$.

b) Funktioiden kuvaajat ovat lähimpänä toisiaan, kun käyrälle $y = f(x)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on sama kuin suoran $y = g(x)$ kulmakerroin ja $x > 0$.

Suoran $y = g(x) = 4x - 21$ kulmakerroin on $4$.

Käyrälle $y = f(x) = x^4 - 7x^2$ kohtaan $x$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $k = f'(x) = 4x^3 - 14x$.

Ratkaistaan missä kohdassa käyrälle $y = f(x)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $4$.

$$f'(x) = 4$$

$4x^3 - 14x = 4$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$$x = \frac{-2-\sqrt{2}}{2} \approx -1,7, \quad x = \frac{-2+\sqrt{2}}{2} \approx -0,3 \quad \text{tai} \quad x = 2$$

Ratkaisuista vain $x = 2$ toteuttaa ehdon $x > 0$

Lasketaan käyrän $y = f(x)$ pisteen $y$-koordinaatti, kun $x = 2$.

$$y = f(2) = 2^4 - 7 \cdot 2^2 = -12$$

Funktion $f$ kuvaajan pisteistä lähimpänä funktion $g$ kuvaajaa on piste $(2, -12)$.

Vastaus a) $x > 0$ b) $(2, -12)$

## 273

a) $h'(x) = \mathrm{D}\left(\frac{x}{5-x}\right)$

$$= \frac{1\cdot(5-x)-x\cdot(-1)}{(5-x)^2}$$

$$= \frac{5-x+x}{(5-x)^2} = \frac{5}{(5-x)^2}$$

Funktio $h$ ja derivaattafunktio $h'$ ovat määriteltyjä, kun $5-x \neq 0$ eli $x \neq 5$.

b) $h'(x) = \mathrm{D}\left(\frac{3-x^2}{x+1}\right)$

$$= \frac{-2x(x+1)-(3-x^2)\cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-2x^2-2x-3+x^2}{(x+1)^2} = \frac{-x^2-2x-3}{(x+1)^2}$$

Funktio $h$ ja derivaattafunktio $h'$ ovat määriteltyjä, kun $x+1 \neq 0$ eli $x \neq -1$.

**Vastaus**

a) $h'(x) = \frac{5}{(5-x)^2}$, kun $x \neq 5$

b) $h'(x) = \frac{-x^2-2x-3}{(x+1)^2}$, kun $x \neq -1$

## 274

a) $f'(x) = \mathrm{D}\left(\frac{4x}{x^2-4}\right)$

$$= \frac{4(x^2-4)-4x\cdot 2x}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{4x^2-16-8x^2}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{-4x^2-16}{(x^2-4)^2}$$

Funktio $f$ ja derivaattafunktio $f'$ ovat määriteltyjä, kun $x^2-4\neq 0$ eli $x^2\neq 4$ eli $x\neq -2$ ja $x\neq 2$.

b) $f'(0) = \frac{-4\cdot 0^2-16}{(0^2-4)^2} = \frac{-16}{(-4)^2} = \frac{-16}{16} = -1$

**Vastaus**

a) $f'(x) = \frac{-4x^2-16}{(x^2-4)^2}$, kun $x\neq -2$ ja $x\neq 2$

b) $f'(0) = -1$

**275**

a) $t'(x) = \mathrm{D}x^{-8}$

$= -8 \cdot x^{-8-1}$

$= -8x^{-9}$

Funktio $t$ ja derivaattafunktio $t'$ ovat määriteltyjä, kun $x \neq 0$.

b) $s'(x) = \mathrm{D}\frac{5}{x^3}$

$= \mathrm{D}(5x^{-3})$

$= -3 \cdot 5x^{-3-1}$

$= -15x^{-4}$

$= \frac{-15}{x^4}$

Funktio $s$ ja derivaattafunktio $s'$ ovat määriteltyjä, kun $x \neq 0$.

c) $r'(x) = \mathrm{D}\left(\frac{-1}{6x^6}\right)$

$= \mathrm{D}\left(-\frac{1}{6}x^{-6}\right)$

$= -\frac{1}{6}\cdot(-6)x^{-6-1}$

$= x^{-7}$

$= \frac{1}{x^7}$

Funktio $r$ ja derivaattafunktio $r'$ ovat määriteltyjä, kun $x \neq 0$.

**Vastaus**

a) $t'(x) = -8x^{-9}$ , kun $x \neq 0$

b) $s'(x) = \frac{-15}{x^4}$ , kun $x \neq 0$

c) $r'(x) = \frac{1}{x^7}$ , kun $x \neq 0$

## 276

$$
\begin{aligned}
r'(x) &= \mathrm{D}\frac{2-x}{x^3} \\
&= \frac{-1 \cdot x^3 - (2-x) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} \\
&= \frac{-x^3 - 6x^2 + 3x^3}{x^6} \\
&= \frac{2x^3 - 6x^2}{x^6} \\
&= \frac{x^2(2x-6)}{x^6} \\
&= \frac{2x-6}{x^4}
\end{aligned}
$$

Funktio $r$ ja derivaattafunktio $r'$ ovat määriteltyjä, kun $x \neq 0$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
\frac{2x-6}{x^4} &= 0 \qquad \Big| \cdot x^4 \quad (\neq 0) \\
2x - 6 &= 0 \\
2x &= 6 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Saatu nollakohta toteuttaa määrittelyehdon.

**Vastaus**

$x = 3$

**277**

Määritetään funktion $f(x) = \dfrac{2}{x^3 - 4x^2}$ lausekkeen nimittäjän nollakohdat.

$$x^3 - 4x^2 = 0$$
$$x^2(x-4) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 4$$

Funktio $f$ on määritelty kun $x \neq 0$ ja $x \neq 4$.

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x^3 - 4x^2) - 2(3x^2 - 8x)}{(x^3 - 4x^2)^2}$$
$$= \frac{-6x^2 + 16x}{(x^3 - 4x^2)^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{-6x^2+16x}{(x^3-4x^2)^2}=0 \qquad \Big| \cdot (x^3-4x^2)^2 \quad (\neq 0)$$

$$-6x^2+16x=0$$

$$x\cdot(-6x+16)=0$$

$$x=0 \quad \text{tai} \quad -6x+16=0$$

$$x=\frac{-16}{-6}$$

$$x=\frac{8}{3}$$

Saaduista nollakohdista $x=\frac{8}{3}$ toteuttaa määrittelyehdon.

**Vastaus**

$x=\frac{8}{3}$

## 278

Koska $x^2+1\neq 0$ aina, niin funktio $s(x)=\dfrac{x-2}{x^2+1}$ on määritelty kaikilla $x\in\mathbf{R}$.

Määritetään kuvaajan piste, johon tangentti piirretään.

$$y=s(-1)=\frac{-1-2}{(-1)^2+1}=-\frac{3}{2}$$

Tangentti piirretään pisteeseen $(-1,-\frac{3}{2})$.

Kohtaan $x=-1$ piirretyn tangentin kulmakerroin $k=s'(-1)$.

Derivoidaan funktio $s$ ja lasketaan kulmakerroin.

$$\begin{aligned}s'(x)&=\frac{1\cdot(x^2+1)-(x-2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}\\&=\frac{x^2+1-2x^2+4x}{(x^2+1)^2}\\&=\frac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

$$k=s'(-1)=\frac{-(-1)^2+4\cdot(-1)+1}{((-1)^2+1)^2}=\frac{-1-4+1}{2^2}=\frac{-4}{4}=-1$$

Tangentti kulkee pisteen $(-1,-\frac{3}{2})$ kautta ja $k=-1$.

Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y-y_0=k(x-x_0)$$
$$y-(-\frac{3}{2})=-1\cdot(x-(-1))$$
$$y+\frac{3}{2}=-x-1$$
$$y=-x-\frac{5}{2} \qquad |\cdot 2$$
$$2y=-2x-5$$
$$2x+2y+5=0$$

**Vastaus**

$2x+2y+5=0$ (eli $y=-x-\frac{5}{2}$)

**279**

Funktio $f(x) = x^{-4}$ on määritelty kun $x \neq 0$.

Määritetään kuvaajan piste, johon normaali piirretään.

$$y = f(-1) = (-1)^{-4} = \frac{1}{(-1)^4} = 1$$

Normaali piirretään pisteeseen $(-1, 1)$.

Kohtaan $x = -1$ piirretyn tangentin kulmakerroin $k = f'(-1)$.
Derivoidaan funktio ja lasketaan kulmakerroin.

$$f'(x) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5}$$

$$k = f'(-1) = -4 \cdot (-1)^{-5} = \frac{-4}{(-1)^5} = 4$$

Käytetään kohtisuoruusehtoa ja lasketaan normaalin kulmakerroin.

$$k_t \cdot k_n = -1$$
$$4 \cdot k_n = -1$$
$$k_n = -\frac{1}{4}$$

Normaali kulkee pisteen $(-1,1)$ kautta ja sen kulmakerroin on $k = -\frac{1}{4}$.

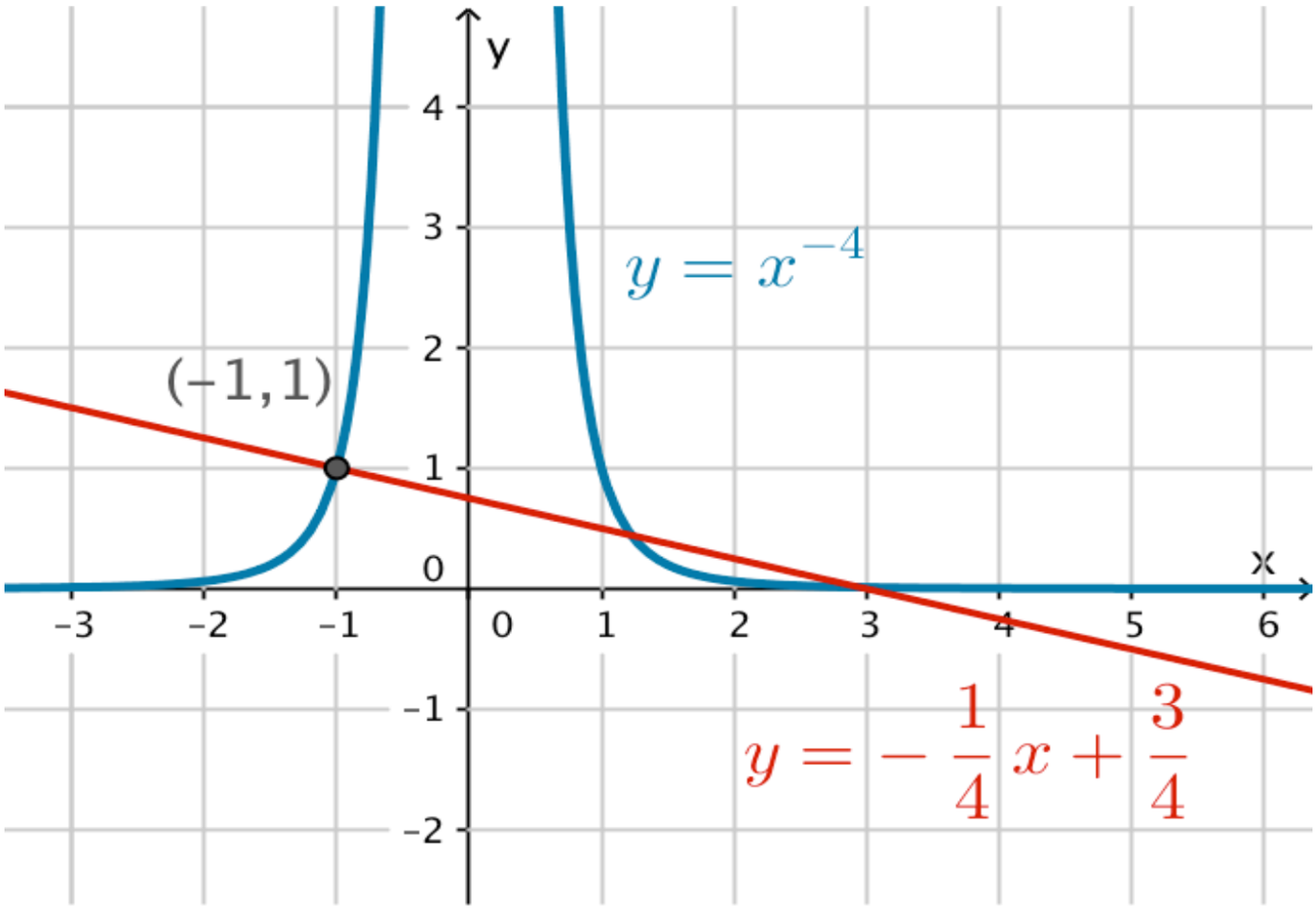
Muodostetaan normaalin yhtälö.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{4} \cdot (x - (-1))$$

$$y - 1 = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$




**Vastaus**

$x + 4y - 3 = 0$ (eli $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$)

## 280

a) Funktio $f(x) = \frac{6}{x+2}$ on määritelty, kun $x \neq -2$.

$$f(1) = \frac{6}{1+2} = \frac{6}{3} = 2$$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x+2) - 6 \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{-6}{(x+2)^2}$$

$$f'(1) = \frac{-6}{(1+2)^2} = \frac{-6}{9} = -\frac{2}{3}$$

b) Funktio $f(x) = \frac{x^3 - 7}{5}$ on määritelty kaikilla reaaliluvuilla $x$.

$$f(1) = \frac{1^3 - 7}{5} = -\frac{6}{5}$$

$$f'(x) = \mathrm{D}\left(\frac{x^3 - 7}{5}\right) = \mathrm{D}\frac{1}{5}(x^3 - 7) = \frac{1}{5}(3x^2 - 0) = \frac{3}{5}x^2$$

$$f'(1) = \frac{3}{5} \cdot 1^2 = \frac{3}{5}$$

**Vastaus**

a) $f(1) = 2$ ja $f'(1) = -\frac{2}{3}$ b) $f(1) = -\frac{6}{5}$ ja $f'(1) = \frac{3}{5}$

## 281

Funktio $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+2}$ on määritelty, kun $x \neq -2$.

Lasketaan funktion nollakohdat.

$$\frac{x^2-9}{x+2}=0 \qquad \big| \cdot (x+2) \ \ (\neq 0)$$
$$x^2-9=0$$
$$x^2=9$$
$$x=\pm\sqrt{9}$$
$$x=-3 \quad \text{tai} \quad x=3$$

Funktion kuvaaja leikkaa $x$-akselin pisteissä $(-3,0)$ ja $(3,0)$.

Määritetään tangentin kulmakerroin kohdissa $x=-3$ ja $x=3$.

$$k=f'(x)=\frac{2x(x+2)-(x^2-9)\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{2x^2+4x-x^2+9}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+9}{(x+2)^2}$$

$$k_1=f'(-3)=\frac{(-3)^2+4\cdot(-3)+9}{((-3)+2)^2}=6$$

$$k_2=f'(3)=\frac{3^2+4\cdot 3+9}{(3+2)^2}=\frac{30}{25}=\frac{6}{5}$$

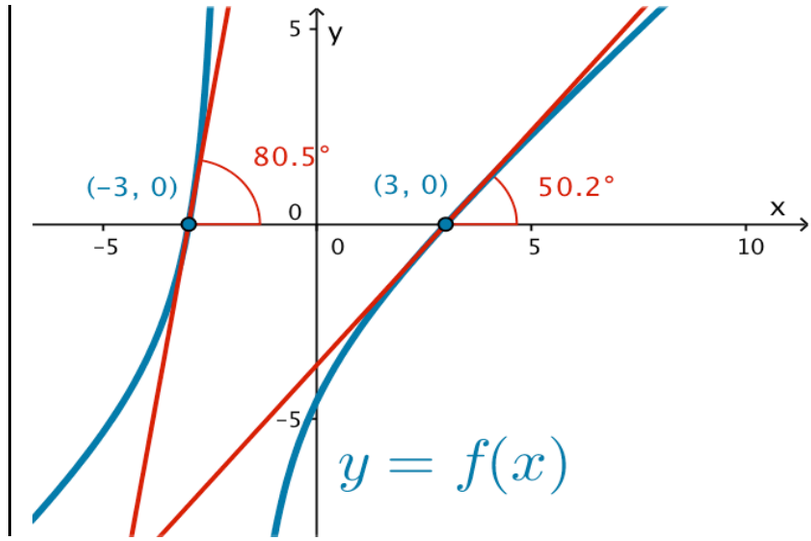
Tekijä • Pitkä matematiikka 6 • 29.5.2017

Käyrän ja $x$-akselin välinen kulma saadaan pääteltyä käyrän ja $x$-akselin leikkauspisteeseen piirretyn tangentin suuntakulman avulla.

Lasketaan tangenttien suuntakulmat.

$$\tan\alpha = k_1$$
$$\tan\alpha = 6$$
$$\alpha = 80,53...° \approx 80,5°$$

$$\tan\beta = k_2$$
$$\tan\beta = \frac{6}{5}$$
$$\beta = 50,19...° \approx 50,2°$$




**Vastaus**

Funktion $f$ kuvaaja leikkaa $x$-akselin

- pisteessä $(-3,0)$ $80,5°$ kulmassa ja
- pisteessä $(3,0)$ $50,2°$ asteen kulmassa.

## 282

Funktio $f(x)=\dfrac{-2x}{1+x^3}$ on määritelty, kun $1+x^3\neq 0$ eli $x\neq -1$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2(1+x^3)-(-2x)\cdot 3x^2}{(1+x^3)^2} \\ &= \frac{-2-2x^3+6x^3}{(1+x^3)^2} \\ &= \frac{4x^3-2}{(1+x^3)^2} \end{aligned}$$

Lasketaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} \frac{4x^3-2}{(1+x^3)^2} &= 0 \\ 4x^3-2 &= 0 \\ 4x^3 &= 2 \\ x^3 &= \frac{1}{2} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \\ x &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

Saatu nollakohta toteuttaa määrittelyehdon.

Derivaattafunktio on polynomifunktio ja siten jatkuva.
Se voi vaihtaa merkkiään ainoastaan nollakohdissa.

Lasketaan derivaattafunktion arvo molemmilta puolilta nollakohtaa.

$$f'(0) = \frac{4 \cdot 0^3 - 2}{(1 + 0^3)^2} = -2 < 0$$

$$f'(1) = \frac{4 \cdot 1^3 - 2}{(1 + 1^3)^2} = \frac{1}{2} > 0$$

Derivaattafunktion arvot ovat negatiivisia, kun $x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ja $x \neq -1$.

**Vastaus**

$x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ja $x \neq -1$

**283**

Funktio $f(x)=\dfrac{a+2x}{x^2-3}$ on määritelty, kun $x^2-3\neq 0$
eli $x^2\neq 3$ eli $x\neq -\sqrt{3}$ ja $x\neq \sqrt{3}$. Derivoidaan funktio.

$$f'(x)=\frac{2(x^2-3)-(a+2x)\cdot 2x}{(x^2-3)^2}$$
$$=\frac{2x^2-6-2ax-4x^2}{(x^2-3)^2}$$
$$=\frac{-2x^2-2ax-6}{(x^2-3)^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta.

$$\frac{-2x^2-2ax-6}{(x^2-3)^2}=0 \qquad \Big| \cdot (x^2-3)^2 \quad (\neq 0)$$
$$-2x^2-2ax-6=0$$
$$-x^2-ax-3=0$$

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-12}}{2}$$

Derivaattafunktiolla on täsmälleen yksi nollakohta, kun
diskriminantti $a^2-12=0$ ja nollakohta toteuttaa määrittelyehdon,
eli $x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-12}}{2}\neq\pm\sqrt{3}$.

Ratkaistaan $a$ diskriminanttiehdosta.

$$a^2 - 12 = 0$$
$$a^2 = 12$$
$$a = \pm\sqrt{12}$$
$$a = -2\sqrt{3} \quad \text{tai} \quad a = 2\sqrt{3}$$

Tarkistetaan määrittelyehto. Kun $a = \pm 2\sqrt{3}$, jolloin $a^2 - 12 = 0$, on nollakohtaehdokas

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 12}}{2} = \frac{-(\pm 2\sqrt{3}) + \sqrt{0}}{2} = \frac{\mp 2\sqrt{3}}{2} = \mp\sqrt{3}\,.$$

Koska kumpikaan vaihtoehto ei toteuta funktion $f$ määrittelyehtoa, ei luvun $a$ arvoa ole mahdollista valita niin, että derivaattafunktiolla $f'$ on vain yksi nollakohta.

**Vastaus**
Tällaista luvun $a$ arvoa ei ole olemassa.

## 284

a)

$$\begin{aligned} s'(x) &= \mathrm{D}\frac{2+x}{x^2} \\ &= \frac{1 \cdot x^2 - (2+x) \cdot 2x}{(x^2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 4x - 2x^2}{x^4} \\ &= \frac{-x^2 - 4x}{x^4} \\ &= \frac{-x - 4}{x^3} \end{aligned}$$

Funktio $s$ ja derivaattafunktio $s'$ ovat määriteltyjä, kun $x \neq 0$.

b) $s'(x) = \mathrm{D}\dfrac{3x}{x^2 - 5x + 4}$

$$= \frac{3(x^2 - 5x + 4) - 3x \cdot (2x - 5)}{(x^2 - 5x + 4)^2}$$

$$= \frac{3x^2 - 15x + 12 - 6x^2 + 15x}{(x^2 - 5x + 4)^2}$$

$$= \frac{12 - 3x^2}{(x^2 - 5x + 4)^2}$$

Funktio $s$ ja derivaattafunktio $s'$ ovat määriteltyjä, kun nimittäjä $x^2 - 5x + 4 \neq 0$.

Lasketaan funktion $s$ nimittäjän nollakohdat.

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{5 + 3}{2} = 4 \qquad \text{tai} \qquad x = \frac{5 - 3}{2} = 1$$

Määrittelyehto on siis $x \neq 4$ ja $x \neq 1$.

**Vastaus**

a) $s'(x) = \dfrac{-x - 4}{x^3}$, kun $x \neq 0$

b) $s'(x) = \dfrac{12 - 3x^2}{(x^2 - 5x + 4)^2}$, kun $x \neq 1$ ja $x \neq 4$

## 285

a) $u'(x) = \mathrm{D}\dfrac{5x^{12}}{6}$

$= \mathrm{D}\dfrac{5}{6}x^{12}$

$= \dfrac{5}{6} \cdot 12x^{12-1}$

$= \dfrac{60}{6}x^{11}$

$= 10x^{11}$

b) $v'(x) = \mathrm{D}\dfrac{6}{5x^{12}}$

$= \mathrm{D}\dfrac{6}{5}x^{-12}$

$= \dfrac{6}{5} \cdot (-12) \cdot x^{-12-1}$

$= \dfrac{-72}{5}x^{-13}$

$= -\dfrac{72}{5x^{13}}$

Funktio $v$ ja derivaattafunktio $v'$ ovat määriteltyjä, kun $x \neq 0$.

**Vastaus**

a) $u'(x) = 10x^{11}$ b) $v'(x) = -\dfrac{72}{5x^{13}}$, kun $x \neq 0$

## 286

a)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \mathrm{D}\frac{(3x-5)^2}{x^3} \\
&= \mathrm{D}\frac{(3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot(-5) + (-5)^2}{x^3} \\
&= \mathrm{D}\frac{9x^2 - 30x + 25}{x^3} \\
&= \frac{(18x-30)\cdot x^3 - (9x^2 - 30x + 25)\cdot 3x^2}{(x^3)^2} \\
&= \frac{18x^4 - 30x^3 - 27x^4 + 90x^3 - 75x^2}{x^6} \\
&= \frac{-9x^4 + 60x^3 - 75x^2}{x^6} \\
&= \frac{x^2(-9x^2 + 60x - 75)}{x^6} \\
&= \frac{-9x^2 + 60x - 75}{x^4}
\end{aligned}
$$

Funktio $f$ ja derivaattafunktio $f'$ ovat määriteltyjä, kun $x \neq 0$.

b) Funktio $f$ on aidosti vähenevä, jos derivaattafunktio $f'(x) \le 0$ kaikilla $x$ ja $f'(x) = 0$ vain yksittäisissä kohdissa.

$$f'(2) = \frac{-9 \cdot 2^2 + 60 \cdot 2 - 75}{2^4} = \frac{-36 + 120 - 75}{16} = \frac{9}{16} > 0$$

Funktio $f$ ei ole aidosti vähenevä, koska derivaatta saa myös positiivisia arvoja.

**Vastaus**

a) $f'(x) = \frac{-9x^2 + 60x - 75}{x^4}$, kun $x \neq 0$

b) ei ole aidosti vähenevä

## 287

$$g'(x) = \mathrm{D}\frac{x^2 - 3x}{x - 4}$$

$$= \frac{(2x - 3)(x - 4) - (x^2 - 3x) \cdot 1}{(x - 4)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 8x - 3x + 12 - x^2 + 3x}{(x - 4)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 8x + 12}{(x - 4)^2}$$

Funktio $g$ ja derivaattafunktio $g'$ ovat määriteltyjä, kun $x - 4 \neq 0$ eli $x \neq 4$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{x^2 - 8x + 12}{(x - 4)^2} = 0 \qquad \left| \cdot (x - 4)^2 \quad (\neq 0) \right.$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 4}{2}$$

$$x = \frac{8 + 4}{2} = 6 \qquad \text{tai} \qquad x = \frac{8 - 4}{2} = 2$$

**Vastaus**

$x = 2$ tai $x = 6$

## 288

Funktio $f(x)=\dfrac{a^2-4}{x-a}$ on määritelty kun $x-a\neq 0$ eli $x\neq a$.

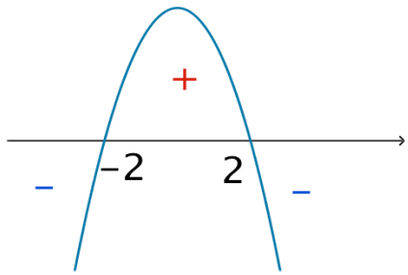
$$f'(x)=\frac{0\cdot(x-a)-(a^2-4)\cdot 1}{(x-a)^2}$$
$$=\frac{-a^2+4}{(x-a)^2}$$

Nimittäjä $(x-a)^2>0$, kun $x\neq a$, joten derivaattafunktio on positiivinen, kun osoittaja on positiivinen.

$$-a^2+4>0$$

Lasketaan, millä vakion $a$ arvoilla osoittaja on $0$.

$$-a^2+4=0$$
$$a^2=4$$
$$a=\pm\sqrt{4}$$
$$a=-2 \quad \text{tai} \quad a=2$$




Käyrä $y=-a^2+4$ on alaspäin aukeava paraabeli, joten se saa positiivisia arvoja, kun $-2<a<2$.

**Vastaus**

$-2<a<2$

**289**

a) Määritetään funktion $f(x) = \dfrac{5x}{2x^2 - 18}$ nimittäjän nollakohdat.

$$2x^2 - 18 = 0$$
$$2x^2 = 18$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm\sqrt{9}$$
$$x = -3 \quad \text{tai} \quad x = 3$$

Funktio $f$ on määritelty, kun $x = -3$ ja $x = 3$.

Lasketaan kuvaajan piste, johon tangentti ja normaali piirretään.

$$y = f(-2) = \frac{5 \cdot (-2)}{2 \cdot (-2)^2 - 18} = \frac{-10}{8 - 18} = \frac{-10}{-10} = 1$$

Tangentti ja normaali piirretään kuvaajan pisteeseen $(-2, 1)$.

Kohtaan $x = -2$ piirretyn tangentin kulmakerroin $k_1 = f'(-2)$.
Derivoidaan funktio ja lasketaan kulmakerroin.

$$f'(x) = \frac{(2x^2 - 18) \cdot 5 - 5x \cdot 4x}{(2x^2 - 18)^2}$$
$$= \frac{10x^2 - 90 - 20x^2}{(2x^2 - 18)^2}$$
$$= \frac{-10x^2 - 90}{(2x^2 - 18)^2}$$

$$k_T = f'(-2) = \frac{-10 \cdot (-2)^2 - 90}{(2 \cdot (-2)^2 - 18)^2} = -\frac{13}{10}$$

Tangentti kulkee pisteen $(-2, 1)$ kautta ja $k_T = -\frac{13}{10}$.
Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$\begin{aligned}
y - y_0 &= k(x - x_0) \\
y - 1 &= -\frac{13}{10} \cdot (x - (-2)) \\
y - 1 &= -\frac{13}{10}x - \frac{26}{10} \\
y &= -\frac{13}{10}x - \frac{26}{10} + 1 \\
y &= -\frac{13}{10}x - \frac{16}{10} \\
y &= -\frac{13}{10}x - \frac{8}{5} \qquad \Big| \cdot 10 \\
10y &= -13x - 16 \\
13x + 10y + 16 &= 0
\end{aligned}$$

b) Normaalin kulmakerroin $k_N$ saadaan kohtisuoruusehdosta.

$$k_T \cdot k_N = -1$$
$$-\frac{13}{10} \cdot k_N = -1$$
$$k_N = \frac{10}{13}$$

Normaali kulkee pisteen $(-2, 1)$ kautta ja $k_N = \frac{10}{13}$.

Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$
$$y - 1 = \frac{10}{13} \cdot (x - (-2))$$
$$y - 1 = \frac{10}{13}x + \frac{20}{13}$$
$$y = \frac{10}{13}x + \frac{20}{13} + 1$$
$$y = \frac{10}{13}x + \frac{33}{13} \qquad \big| \cdot 13$$
$$13y = 10x + 33$$
$$10x - 13y + 33 = 0$$

**Vastaus**

a) $13x + 10y + 16 = 0$ (eli $y = -\frac{13}{10}x - \frac{8}{5}$)

b) $10x - 13y + 33 = 0$ (eli $y = \frac{10}{13}x + \frac{33}{13}$)

## 290

Funktio $h(x) = -9x^{-3} + 2$ on määritelty, kun $x \neq 0$.
Jotta tangentti olisi annetun suoran suuntainen, tulee niillä olla sama kulmakerroin. Selvitetään suoran kulmakerroin.

$$\begin{aligned} x - 3y + 6 &= 0 \\ -3y &= -x - 6 \\ y &= \frac{1}{3}x + 2 \end{aligned}$$

Suoran kulmakerroin $k = \frac{1}{3}$.

Funktion $h(x) = -9x^{-3} + 2$, kun $x \neq 0$, kuvaajalle kohtaan $x = a$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $k = h'(a)$. Derivoidaan funktio $h$ ja lasketaan millä $a$:n arvoilla kulmakerroin on $\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \mathrm{D}(-9x^{-3} + 2) \\ &= -9 \cdot (-3) \cdot x^{-3-1} + 0 \\ &= 27x^{-4} \\ &= \frac{27}{x^4}, \text{ kun } x \neq 0 \end{aligned}$$

Funktion $h$ kuvaajalle kohtaan $x = a$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $k = \frac{1}{3}$.

$$h'(a) = k$$
$$\frac{27}{a^4} = \frac{1}{3}$$
$$a^4 = 27 \cdot 3 = 3^3 \cdot 3 = 3^4$$
$$a = \pm\sqrt[4]{3^4}$$
$$a = -3 \quad \text{tai} \quad a = 3$$

Kohtiin $x = -3$ ja $x = 3$ piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet ovat samat kuin annetun suoran kulmakerroin, joten ne ovet yhdensuuntaiset.

Lasketaan tangentin ja käyrän $y = h(x)$ sivuamispisteen $y$-koordinaatti kohdissa $x = -3$ ja $x = 3$.

$$y = h(-3) = -9 \cdot (-3)^{-3} + 2 = \frac{-9}{(-3)^3} + 2 = \frac{-9}{-27} + 2 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$

$$y = h(3) = -9 \cdot 3^{-3} + 2 = \frac{-9}{3^3} + 2 = \frac{-9}{27} + 2 = -\frac{1}{3} + 2 = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

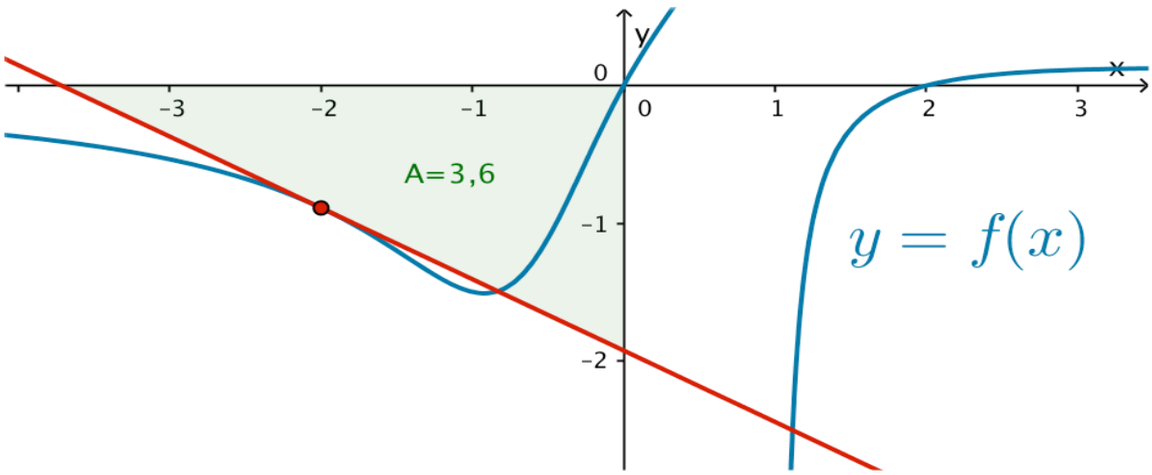
Tangentti on suoran suuntainen pisteissä $(-3,\ 2\frac{1}{3})$ ja $(3,\ 1\frac{2}{3})$.

**Vastaus**

$(-3,\ 2\frac{1}{3})$ ja $(3,\ 1\frac{2}{3})$ (eli $(-3,\ \frac{7}{3})$ ja $(3,\ \frac{5}{3})$)

## 291

a) Geometriaohjelmalla pinta-alaksi saadaan $A \approx 3,6$.




b) Lasketaan kuvaajan piste, johon tangentti piirretään.

$$y = f(-2) = \frac{2 \cdot (-2) - (-2)^2}{1 - (-2)^3} = \frac{-4 - 4}{1 + 8} = -\frac{8}{9}$$

Tangentti tangentti piirretään pisteeseen $(-2, -\frac{8}{9})$.

Kohtaan $x = -2$ piirretyn tangentin kulmakerroin $k = f'(-2)$.

Derivoidaan funktio ja lasketaan kulmakerroin.

$$f'(x) = \mathrm{D}\frac{2x - x^2}{1 - x^3} = \frac{(2 - 2x)(1 - x^3) - (2x - x^2) \cdot (-3x^2)}{(1 - x^3)^2}$$

$$= \frac{2 - 2x^3 - 2x + 2x^4 + 6x^3 - 3x^4}{(1 - x^3)^2}$$

$$= \frac{-x^4 + 4x^3 - 2x + 2}{(1 - x^3)^2}$$

$$k = f'(-2) = \frac{-(-2)^4 + 4\cdot(-2)^3 - 2\cdot(-2) + 2}{(1-(-2)^3)^2} = -\frac{14}{27}$$

Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$
$$y - (-\frac{8}{9}) = -\frac{14}{27}\cdot(x-(-2))$$
$$y + \frac{8}{9} = -\frac{14}{27}x - \frac{28}{27}$$
$$y = -\frac{14}{27}x - \frac{52}{27}$$

Kolmion korkeus on tangentin ja $y$-akselin leikkauspisteen $y$-koordinaatin etäisyys nollasta. $y$-akselilla $x = 0$.

$$y = -\frac{14}{27}\cdot 0 - \frac{52}{27} = -\frac{52}{27}$$

$$korkeus = \left|-\frac{52}{27} - 0\right| = \frac{52}{27}$$

Kolmion kanta on tangentin ja $x$-akselin leikkauspisteen $x$-koordinaatin etäisyys nollasta. $x$-akselilla $y = 0$.

$$-\frac{14}{27}x - \frac{52}{27} = 0$$

$$-\frac{14}{27}x = \frac{52}{27}$$

$$x = -\frac{1404}{378} = -\frac{26}{7}$$

$$kanta = \left| -\frac{26}{7} - 0 \right| = \frac{26}{7}$$

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{\frac{26}{7} \cdot \frac{52}{27}}{2} = \frac{676}{189} = 3\frac{109}{189}$$

**Vastaus**

a) $A \approx 3,6$

b) $A = 3\frac{109}{189}$ (eli $A = \frac{676}{189}$)

**292**

Funktio $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ on määritelty kun $x \neq 1$ ja
funktio $g(x)=\frac{x-14}{x-6}$ on määritelty, kun $x \neq 6$.

Määritetään käyrien leikkauspisteen $x$-koordinaatti.

$$f(x)=g(x)$$
$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-14}{x-6}$$
$$x=2$$

Määritetään käyrien derivaatat ja tangenttien kulmakertoimet kohdassa $x=2$.

$$f'(x)=\mathrm{D}\frac{x+1}{x-1}$$
$$=\frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$k_1=f'(2)=\frac{-2}{(2-1)^2}=-2$$

$$g'(x) = \frac{x-14}{x-6}$$
$$= \frac{1\cdot(x-6)-(x-14)\cdot 1}{(x-6)^2}$$
$$= \frac{x-6-x+14}{(x-6)^2}$$
$$= \frac{8}{(x-6)^2}$$

$$k_2 = f'(2) = \frac{8}{(2-6)^2} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

Kohtisuoruusehdon mukaan tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos niille pätee $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Tangenttien kulmakertoimista saadaan $k_1 \cdot k_2 = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$, joten käyrät leikkaavat toisensa kohtisuorasti. □

**293**

Määritetään funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^3 + 5}$ nimittäjän nollakohdat.

$$x^3 + 5 = 0$$
$$x^3 = -5$$
$$x = \sqrt[3]{-5} = -\sqrt[3]{5}$$

Funktio $f$ on määritelty kun $x \neq -\sqrt[3]{5}$.

$$f(-1) = \frac{(-1)^2 - 3}{(-1)^3 + 5} = \frac{1 - 3}{-1 + 5} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Derivoidaan funktio $f$.

$$f'(x) = \frac{2x(x^3 + 5) - (x^2 - 3) \cdot 3x^2}{(x^3 + 5)^2}$$
$$= \frac{2x^4 + 10x - 3x^4 + 9x^2}{(x^3 + 5)^2}$$
$$= \frac{-x^4 + 9x^2 + 10x}{(x^3 + 5)^2}$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo, kun $x = -1$.

$$f'(-1) = \frac{-(-1)^4 + 9 \cdot (-1)^2 + 10 \cdot (-1)}{((-1)^3 + 5)^2} = \frac{-1 + 9 - 10}{4^2} = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8}$$

Derivoidaan derivaattafunktio $f'$.

$$f''(x) = \frac{(-4x^3+18x+10)(x^3+5)^2-(-x^4+9x^2+10x)(2(x^3+5)\cdot 3x^2)}{((x^3+5)^2)^2}$$

$$= \frac{(-4x^3+18x+10)(x^3+5)^2-(-x^4+9x^2+10x)\cdot 6x^2\cdot(x^3+5)}{(x^3+5)^4}$$

$$= \frac{\left((-4x^3+18x+10)(x^3+5)-(-x^4+9x^2+10x)\cdot 6x^2\right)\cancel{(x^3+5)}}{(x^3+5)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{(-4x^3+18x+10)(x^3+5)-(-x^4+9x^2+10x)\cdot 6x^2}{(x^3+5)^3}$$

Lasketaan funktion $f''$ arvo, kun $x=-1$.

$$f''(-1)$$

$$= \frac{(-4(-1)^3+18(-1)+10)((-1)^3+5)-(-(-1)^4+9(-1)^2+10(-1))\cdot 6(-1)^2}{((-1)^3+5)^3}$$

$$= \frac{(4-18+10)(-1+5)-(-1+9-10)\cdot 6}{(-1+5)^3}$$

$$= \frac{-4\cdot 4-(-2)\cdot 6}{4^3}$$

$$= \frac{-4}{64} = -\frac{1}{16}$$

**Vastaus**

$f(-1) = -\frac{1}{2}$, $f'(-1) = -\frac{1}{8}$ ja $f''(-1) = -\frac{1}{16}$

## 294

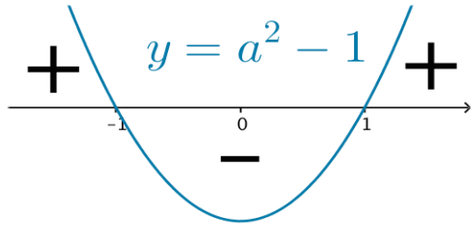
Funktio $g(x) = \frac{x+1}{x+a^2}$, kun $x > 0$, on aidosti kasvava, kun $g'(x) \geq 0$ kaikilla $x > 0$, yhtäsuuruus $g'(x) = 0$ saa olla voimassa yksittäisissä kohdissa.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1 \cdot (x+a^2) - (x+1) \cdot 1}{(x+a^2)^2} \\ &= \frac{x + a^2 - x - 1}{(x+a^2)^2} \\ &= \frac{a^2 - 1}{(x+a^2)^2} \end{aligned}$$

Koska $(x+a^2)^2 > 0$ aina, kun $x > 0$, niin derivaattafunktio $g'(x) \geq 0$ kun osoittaja $a^2 - 1 \geq 0$.

Määritetään osoittajan nollakohdat ja päätellään kuvaajan avulla, millä $a$:n arvoilla $a^2 - 1 \geq 0$.

$$\begin{aligned} a^2 - 1 &= 0 \\ a^2 &= 1 \\ a &= \pm 1 \end{aligned}$$




Siis $a^2 - 1 \geq 0$ kun $a \leq -1$ tai $a \geq 1$.

Yhtäsuuruus $g'(x) = 0$ on voimassa, kun $a = -1$ tai $a = 1$.

Kun $a = \pm 1$, niin funktio

$$g(x) = \frac{x+1}{x+(\pm 1)^2} = \frac{x+1}{x+1} = 1, \text{ missä } x > 0.$$

Tapauksessa $a = \pm 1$ funktio $g$ on vakiofunktio, joka ei ole aidosti kasvava.

Siis funktio $g$ on aidosti kasvava, kun $a < -1$ tai $a > 1$

**Vastaus**

$a < -1$ tai $a > 1$

**295**

a) Funktio $f(x) = \dfrac{1+x}{1-ax^2}$ on määritelty, kun $1 - ax^2 \neq 0$.

Mikäli vakio $a \leq 0$, nimittäjä on positiivinen kaikilla $x \in \mathrm{R}$.

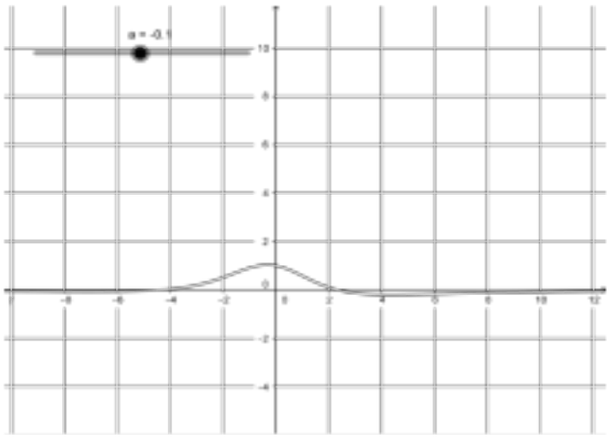
Määritetään nimittäjän nollakohdat tapauksessa $a > 0$.

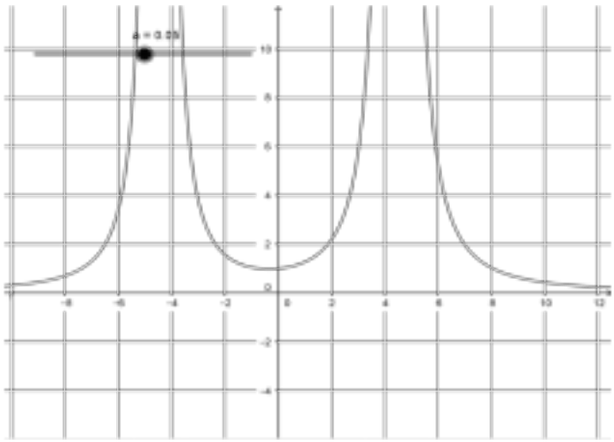
$$1 - ax^2 = 0$$
$$-ax^2 = -1$$
$$x^2 = \frac{1}{a}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{a}}, \text{ kun } a > 0$$

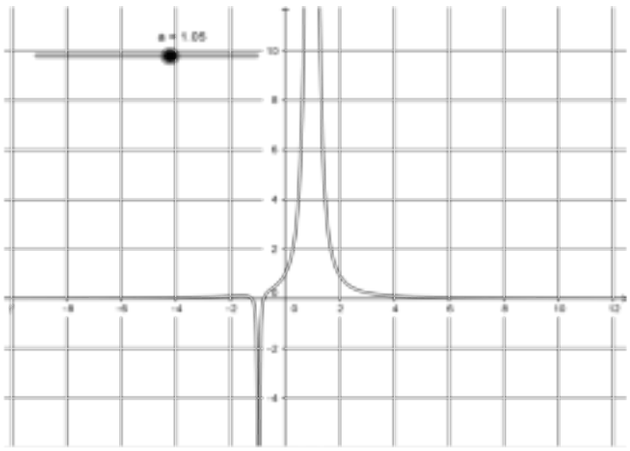
Funktio $f$ on määritelty kaikilla $x \in \mathrm{R}$, kun $a \leq 0$ ja kaikilla $x \neq \pm\sqrt{\dfrac{1}{a}}$, kun $a > 0$.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1 - ax^2) - (1 + x) \cdot (-2ax)}{(1 - ax^2)^2}$$
$$= \frac{1 - ax^2 + 2ax + 2ax^2}{(1 - ax^2)^2}$$
$$= \frac{ax^2 + 2ax + 1}{(ax^2 - 1)^2}$$

b) Geometriaohjelmalla voidaan tutkia derivaattafunktion kuvaajaa, kun luodaan vakiolle $a$ liukusäädin.







Huomataan, että derivaattafunktiolla ei ole nollakohtia, kun $0 \le a \le 1$.

c) Määritetään laskemalla derivaattafunktion nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{ax^2 + 2ax + 1}{(ax^2 - 1)^2} = 0 \qquad \Big| \cdot (ax^2 - 1)^2 \quad (\neq 0)$$

$$ax^2 + 2ax + 1 = 0$$

**1)** Mikäli vakio $a = 0$, yhtälö $f'(x) = 0$ saa muodon $1 = 0$, joka on epätosi. Derivaattafunktiolla ei siis ole nollakohtia, kun $a = 0$.

**2)** Mikäli vakio $a \neq 0$, yhtälö $f'(x) = 0$ on toisen asteen yhtälö, jolla ei ole ratkaisua, mikäli diskriminantti $\mathrm{D} = b^2 - 4ac = 4a^2 - 4a < 0$.

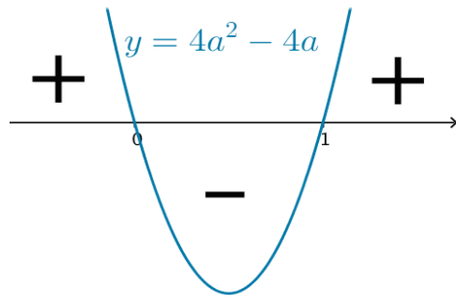
Määritetään diskriminantin nollakohdat ja päätellään kuvaajan avulla, millä vakion $a$ arvoilla $4a^2 - 4a < 0$.

$$4a^2 - 4a = 0$$

$$4a(a - 1) = 0$$

$$4a = 0 \quad \text{tai} \quad a - 1 = 0$$

$$a = 0 \qquad\qquad a = 1$$




Diskriminantti $4a^2 - 4a < 0$ kun $0 < a < 1$.

**3)** Mikäli vakio $a = 1$, yhtälö $f'(x) = 0$ saa muodon $x^2 + 2x + 1 = 0$. Ratkaistaan tämä yhtälö.

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 &= 0 \\ (x+1)^2 &= 0 \\ x + 1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Määrittelyehdon mukaan funktio $f$ on määritelty kaikilla $x \in \mathbf{R}$, kun $a \le 0$ ja kaikilla $x \neq \pm\sqrt{\frac{1}{a}}$, kun $a > 0$.

Erityisesti, kun $a = 1$, on oltava $x \neq \pm\sqrt{\frac{1}{1}}$ eli $x \neq \pm 1$.

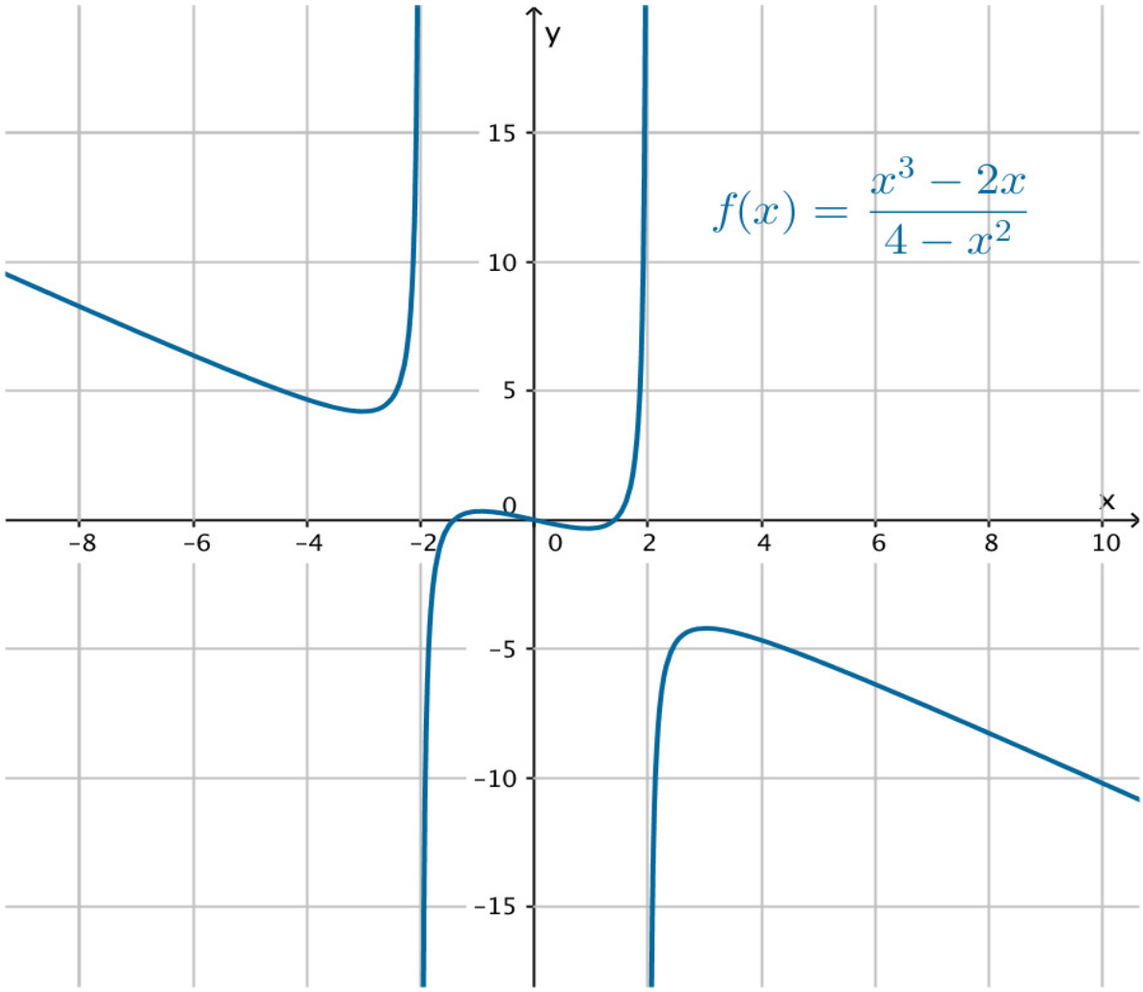
Siis tapauksessa $a = 1$ saatu derivaatan nollakohta $x = -1$ ei toteuta määrittelyehtoa.

Yhdistämällä kohtien 1, 2 ja 3 tulokset, havaitaan, että derivaattafunktiolla $f'$ ei ole nollakohtia, kun $0 \le a \le 1$.

**Vastaus**

a) $f'(x) = \dfrac{ax^2 + 2ax + 1}{(ax^2 - 1)^2}$ b) $0 \le a \le 1$

## 296




### Vastaus

a) Määritelty, kun $x \neq -2,0$ ja $x \neq 2,0$.

b) Minimikohdat $x \approx -3,0$ ja $x \approx 0,9$.
Maksimikohdat $x \approx -0,9$ ja $x \approx 3,0$.

c) Minimiarvot $4,2$ ja $-0,3$.
Maksimiarvot $0,3$ ja $-4,2$.

**297**

Funktio $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 9}{x + 2}$ on määritelty, kun $x + 2 \neq 0$ eli $x \neq -2$.

Derivoidaan funktio ja päätellään sen kulku derivaattafunktion merkeistä.

$$f'(x) = \frac{6x(x+2) - (3x^2 - 9) \cdot 1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{6x^2 + 12x - 3x^2 + 9}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{3x^2 + 12x + 9}{(x+2)^2}$$

Nimittäjä on määrittelyjoukossa positiivinen, joten osoittaja määrää derivaatan merkin. Määritetään osoittajan nollakohdat.

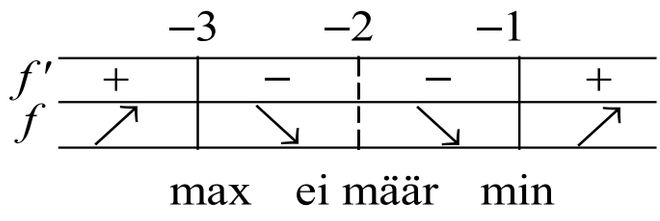
$$3x^2 + 12x + 9 = 0$$

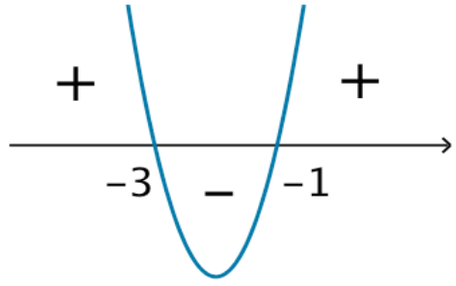
$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$$x = \frac{-4 + 2}{2} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-4 - 2}{2} = -3$$

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio.
Derivaattafunktion osoittajan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.




a) Kulkukaavion perusteella funktio $f$ on (aidosti) kasvava välillä $x \le -3$ ja välillä $x \ge -1$.

Funktio $f$ on (aidosti) vähenevä välillä $-3 \le x < -2$ ja välillä $-2 < x \le -1$.

b) Funktiolla on maksimikohta $x = -3$ ja minimikohta $x = -1$.

**Vastaus**

a) kasvava välillä $x \le -3$ ja välillä $x \ge -1$,
vähenevä välillä $-3 \le x < -2$ ja välillä $-2 < x \le -1$

b) maksimikohta $x = -3$ ja minimikohta $x = -1$

## 298

Koska $x^4 + 7 \neq 0$ aina, niin funktio $f(x) = \dfrac{21}{x^4 + 7}$ on määritelty kaikilla $x$.

Derivoidaan funktio ja päätellään sen kulku derivaattafunktion merkeistä.

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x^4 + 7) - 21 \cdot 4x^3}{(x^4 + 7)^2}$$

$$= \frac{-84x^3}{(x^4 + 7)^2}$$

Nimittäjä on aina positiivinen, joten osoittaja määrää derivaatan merkin. Osoittaja on polynomifunktio ja siten jatkuva. Sen merkki voi vaihtua ainoastaan nollakohdissa.

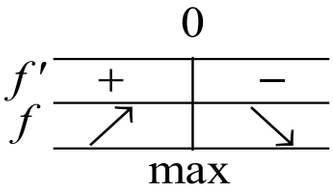
$$-84x^3 = 0$$

$$x = 0$$

$$-84 \cdot (-1)^3 = 84 > 0$$

$$-84 \cdot 1^3 = -84 < 0$$

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio.



a) Kulkukaavion perusteella funktio $f$ on (aidosti) kasvava, kun $x \leq 0$.

Funktio on (aidosti) vähenevä, kun $x \geq 0$.

b) Kulkukaavion perusteella funktiolla on maksimikohta $x = 0$.

Lasketaan maksimiarvo.

$$f(0) = \frac{21}{0^4 + 7} = 3$$

**Vastaus**

a) kasvava välillä $x \leq 0$, vähenevä välillä $x \geq 0$

b) maksimikohta $x = 0$, maksimiarvo $3$

## 299

Selvitetään funktion $f(x) = \dfrac{x^4}{8x - 4x^2}$ määrittelyehto.

$$8x - 4x^2 = 0$$
$$4x(2 - x) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 2$$

Funktio $f$ on määritelty, kun $x \neq 0$ ja $x \neq 2$.

Derivoidaan funktio ja päätellään funktion kulku derivaatan merkeistä.

$$f'(x) = \mathrm{D}\left(\frac{x^4}{8x - 4x^2}\right) = \frac{-x^2(x-3)}{2(x-2)^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{-x^2(x-3)}{2(x-2)^2} = 0 \qquad \Big| \cdot 2 \cdot (x-2)^2 \quad (\neq 0)$$
$$-x^2(x-3) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 3$$

Nollakohdista $x = 3$ toteuttaa määrittelyehdon.

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio.

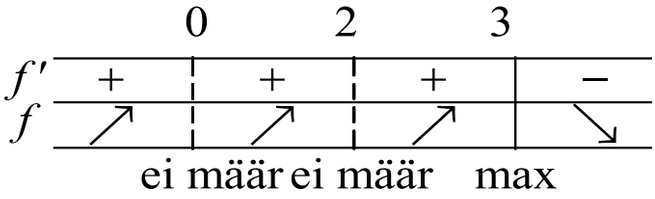
Derivaattafunktio on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdassa $3$ tai kohdissa $0$ ja $2$, joissa $f'$ ei ole määritelty.

$$f'(-1) = \frac{2}{9} > 0$$

$$f'(1) = 1 > 0$$

$$f'(2{,}5) = 12{,}5 > 0$$

$$f'(4) = -1 < 0$$




Kulkukaavion perusteella funktiolla ei ole minimikohtaa, mutta sillä on maksimikohta $x = 3$. Lasketaan maksimiarvo.

$$f(3) = \frac{3^4}{8 \cdot 3 - 4 \cdot 3^2} = -\frac{27}{4} = -6\frac{3}{4}$$

**Vastaus**

maksimikohta $x = 3$, maksimiarvo $-6\frac{3}{4}$ (eli $-\frac{27}{4}$)

# 300

Selvitetään funktion $f(x) = \dfrac{3x^3}{4 - x^2}$ määrittelyehto.

$4 - x^2 = 0$

$x = -2 \quad \text{tai} \quad x = 2$

Funktio on määritelty, kun $x \neq -2$ ja $x \neq 2$.

Derivoidaan funktio ja päätellään funktion kulku derivaatan merkeistä.

$$f'(x) = \mathrm{D}\frac{3x^3}{4 - x^2} = \frac{-3x^2 \cdot (x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{-3x^2 \cdot (x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2} = 0$$

$x = -2\sqrt{3} \quad \text{tai} \quad x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 2\sqrt{3}$

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio.
Derivaattafunktio on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa $x = -2\sqrt{3}$, $x = 0$ tai $x = 2\sqrt{3}$ tai kohdissa $-2$ ja $2$, joissa $f'$ ei ole määritelty.

$$f'(-4) = -\frac{4}{3} < 0$$

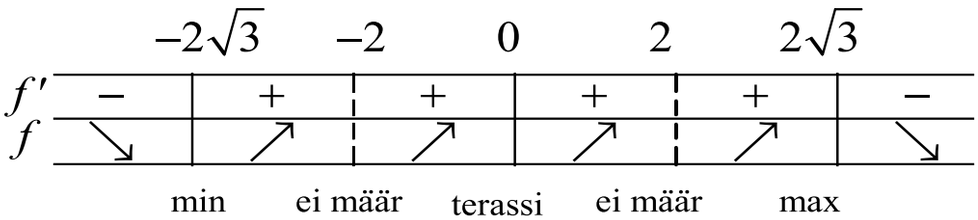
$$f'(-3) = \frac{81}{25} > 0$$

$$f'(-1) = \frac{11}{3} > 0$$

$$f'(1) = \frac{11}{3} > 0$$

$$f'(3) = \frac{82}{25} > 0$$

$$f'(4) = -\frac{4}{3} < 0$$




Kulkukaavion perusteella funktiolla on minimikohta $x = -2\sqrt{3}$ ja maksimikohta $x = 2\sqrt{3}$ .

**Vastaus**

minimikohta $x = -2\sqrt{3}$ ,
maksimikohta $x = 2\sqrt{3}$

# 301

Koska $x^2+1 \neq 0$, niin funktio $h(x)=\frac{x^7}{x^2+1}$ on määritelty kaikilla $x$.

Derivoidaan funktio ja päätellään funktion kulku derivaatan merkeistä.

$$h'(x)=D(\frac{x^7}{x^2+1})=\frac{x^6\cdot(5x^2+7)}{(x^2+1)^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{x^6\cdot(5x^2+7)}{(x^2+1)^2}=0$$

$$x=0$$

Laaditaan funktion $h$ kulkukaavio. Derivaattafunktio on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdassa $x=0$.

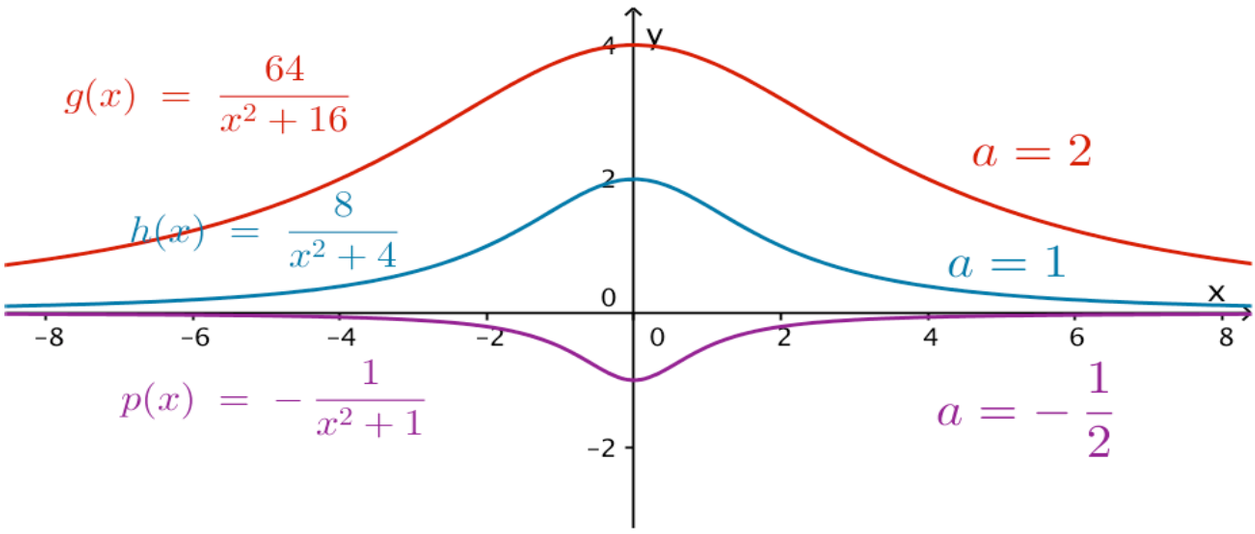
$h'(-1)=3>0$
$h'(1)=3>0$

| | 0 | |
|---|---|---|
| $f'$ | + | + |
| $f$ | ↗ | ↗ |
| | terassi | |

Kulkukaavion perusteella funktiolla ei ole ääriarvokohtia vaan se on aidosti kasvava kaikkialla. □

# 302

a)




b) Olkoon $a = 2$. Merkitään $f(x) = \dfrac{8 \cdot 2^3}{x^2 + 4 \cdot 2^2} = \dfrac{64}{x^2 + 16}$ .

Koska $x^2 + 16 \neq 0$, niin funktio $f$ on määritelty kaikilla $x$.

Derivoidaan funktio ja päätellään funktion kulku derivaatan merkeistä.

$$f'(x) = D\left(\frac{64}{x^2+16}\right) = \frac{-128x}{(x^2+16)^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

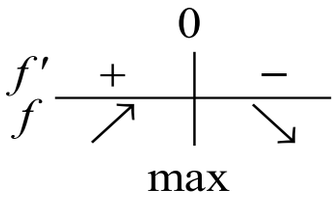
$$\frac{-128x}{(x^2+16)^2} = 0$$

$$x = 0$$

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Derivaattafunktio on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdassa $x = 0$.

$$f'(-1) = \frac{128}{289} > 0$$

$$f'(1) = -\frac{128}{289} < 0$$




Kulkukaavion perusteella funktiolla on maksimikohta $x = 0$. Lasketaan maksimiarvo.

$$f(0) = \frac{64}{0^2+16} = 4$$

**Vastaus**

b) maksimiarvo 4 kohdassa $x = 0$

## 303

Koska nimittäjä $x^2 + 1 \neq 0$, niin funktio $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$ on määritelty koko suljetulla välillä $[-2, 3]$. Funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Derivoidaan.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2x(1 + x^2) - (1 - x^2)2x}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{-2x - 2x^3 - 2x + 2x^3}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{-4x}{(1 + x^2)^2} \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} \frac{-4x}{(1 + x^2)^2} &= 0 \qquad \Big| \cdot (1 + x^2)^2 \quad (\neq 0) \\ -4x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Nollakohta kuuluu avoimelle välille $]-2, 3[$ .

Lasketaan funktion arvo välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa.

$$f(-2) = \frac{1-(-2)^2}{1+(-2)^2} = \frac{1-4}{1+4} = \frac{-3}{5}$$

$$f(0) = \frac{1-0^2}{1+0^2} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \text{suurin}$$

$$f(3) = \frac{1-3^2}{1+3^2} = \frac{1-9}{1+9} = \frac{-8}{10} = \frac{-4}{5} \qquad \text{pienin}$$

**Vastaus**

pienin arvo $-\frac{4}{5}$, suurin arvo 1

## 304

Koska nimittäjä $x^4 + 1 \neq 0$, niin funktio $g(x) = \dfrac{24x^2}{1+x^4}$ on määritelty koko suljetulla välillä $[-2, 2]$. Funktio $g$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin $[-2, 2]$ päätepisteessä tai välille $]-2, 2[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Derivoidaan.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{48x(1+x^4) - 24x^2 \cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} \\ &= \frac{48x + 48x^5 - 96x^5}{(1+x^4)^2} \\ &= \frac{48x - 48x^5}{(1+x^4)^2} \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{48x - 48x^5}{(1+x^4)^2} = 0 \qquad \Big| \cdot (1+x^4)^2 \quad (\neq 0)$$

$$48x - 48x^5 = 0$$

$$48x(1 - x^4) = 0$$

$48x = 0$ tai $1 - x^4 = 0$

$x = 0$ $\qquad x^4 = 1$

$\qquad x = \pm 1$

Nollakohdat kuuluvat tarkasteluvälille.

Lasketaan funktion arvo välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdissa.

$$g(-2) = \frac{24 \cdot (-2)^2}{1 + (-2)^4} = \frac{96}{17}$$

$$g(-1) = \frac{24 \cdot (-1)^2}{1 + (-1)^4} = \frac{24}{2} = 12 \qquad \text{suurin}$$

$$g(0) = \frac{24 \cdot 0^2}{1 + 0^4} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \text{pienin}$$

$$g(1) = \frac{24 \cdot (1)^2}{1 + (1)^4} = \frac{24}{2} = 12 \qquad \text{suurin}$$

$$g(2) = \frac{24 \cdot 2^2}{1 + 2^4} = \frac{96}{17}$$

**Vastaus**
pienin arvo 0, suurin arvo 12

## 305

Tutkitaan funktiota $f(t) = 5 - \dfrac{2-t}{t^2 - 6t + 10}$ välillä $[0, 6]$.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohdat.

$t^2 - 6t + 10 = 0$

Ei ratkaisua.

Funktio $f$ on määritelty kaikilla $t \in [0,\ 6]$.

Funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Derivoidaan laskimella.

$$f'(t) = \mathrm{D}(5 - \frac{2-t}{t^2 - 6t + 10}) = \frac{-t^2 + 4t - 2}{(t^2 - 6t + 10)^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{-t^2 + 4t - 2}{(t^2 - 6t + 10)^2} = 0$$

$x = -\sqrt{2} + 2 \approx 0,6$ tai $x = \sqrt{2} + 2 \approx 3,4$

Nollakohdat kuuluvat tarkasteluvälille.

Lasketaan funktion arvo välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdissa.

$f(0) = 4,8$

$f(-\sqrt{2} + 2) \approx 4,8$

$f(\sqrt{2} + 2) \approx 6,2$ suurin

$f(6) = 5,4$

Populaation yksilömäärä on suurimmillaan 3,4 vuoden kuluttua tarkastelujakson alusta. Tällöin yksilöitä on $6,2 \cdot 1000 = 6200$ kappaletta.

**Vastaus**

Määrä on suurimmillaan 6200 yksilöä 3,4 vuoden kuluttua tarkastelujakson alusta lukien.

# 306

Tutkitaan funktion $g(x) = \dfrac{8}{(x-3)^2+2}$ arvoja välillä $[0,5]$.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohdat.

$$(x-3)^2 + 2 = 0$$

Ei ratkaisua.

Funktio $g$ on määritelty kaikilla $x \in [0,5]$.
Rationaalifunktio $g$ on suljetulla välillä $[0,5]$ jatkuva ja saa myös kaikki arvot suurimman ja pienimmän arvonsa väliltä.

Funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Derivoidaan laskimella.

$$g'(x) = \mathrm{D}\frac{8}{(x-3)^2+2} = \frac{-16x+48}{(x^2-6x+11)^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{-16x+48}{(x^2-6x+11)^2} = 0$$

$$x = 3$$

Nollakohta kuuluu tarkasteluvälille.

Lasketaan funktion arvo välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa.

$g(0) = \frac{8}{11}$ pienin

$g(3) = 4$ suurin

$g(5) = \frac{4}{3}$

Funktion $g$ suurin arvo on $4$ ja pienin arvo $\frac{8}{11}$. Koska funktio $g$ on suljetulla välillä jatkuva, se saa kaikki arvot väliltä $[\frac{8}{11}, 4]$.

**Vastaus**

$[\frac{8}{11}, 4]$

**Huomaa!**

Koska funktion $g(x) = \frac{8}{(x-3)^2 + 2}$ lausekkeessa osoittaja on vakio, voitaisiin tutkia myös pelkästään nimittäjää.

- Funktio $g$ saa suurimman arvonsa kohdassa, jossa nimittäjä saa pienimmän arvonsa (kohdassa, jossa $x - 3$ on pienin eli $x = 3$).

- Funktio $g$ saa pienimmän arvonsa kohdassa, jossa nimittäjä saa suurimman arvonsa (kohdassa $x = 0$ tai $x = 5$).

# 307

Nimittäjä $x^2 + 2 > 0$ kaikilla $x$. Funktio $h(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2} + 3$ on siis määritelty kaikilla $x$.

Osoitetaan, että funktion pienin arvo on positiivinen.

Laaditaan funktion kulkukaavio ja päätellään funktion kulku derivaatan merkeistä.

Derivoidaan.

$$h'(x) = \mathrm{D}(\frac{x^2 - 4}{x^2 + 2} + 3) = \frac{12x}{(x^2 + 2)^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

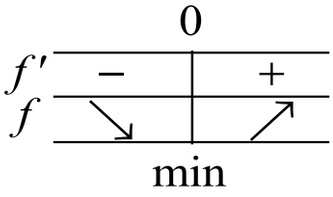
$$\frac{12x}{(x^2 + 2)^2} = 0$$

$$x = 0$$

Derivaattafunktio on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Se voi vaihtaa merkkiään ainoastaan nollakohdassa $x = 0$.

$$h'(-1) = -\frac{4}{3} < 0$$

$$h'(1) = \frac{4}{3} > 0$$

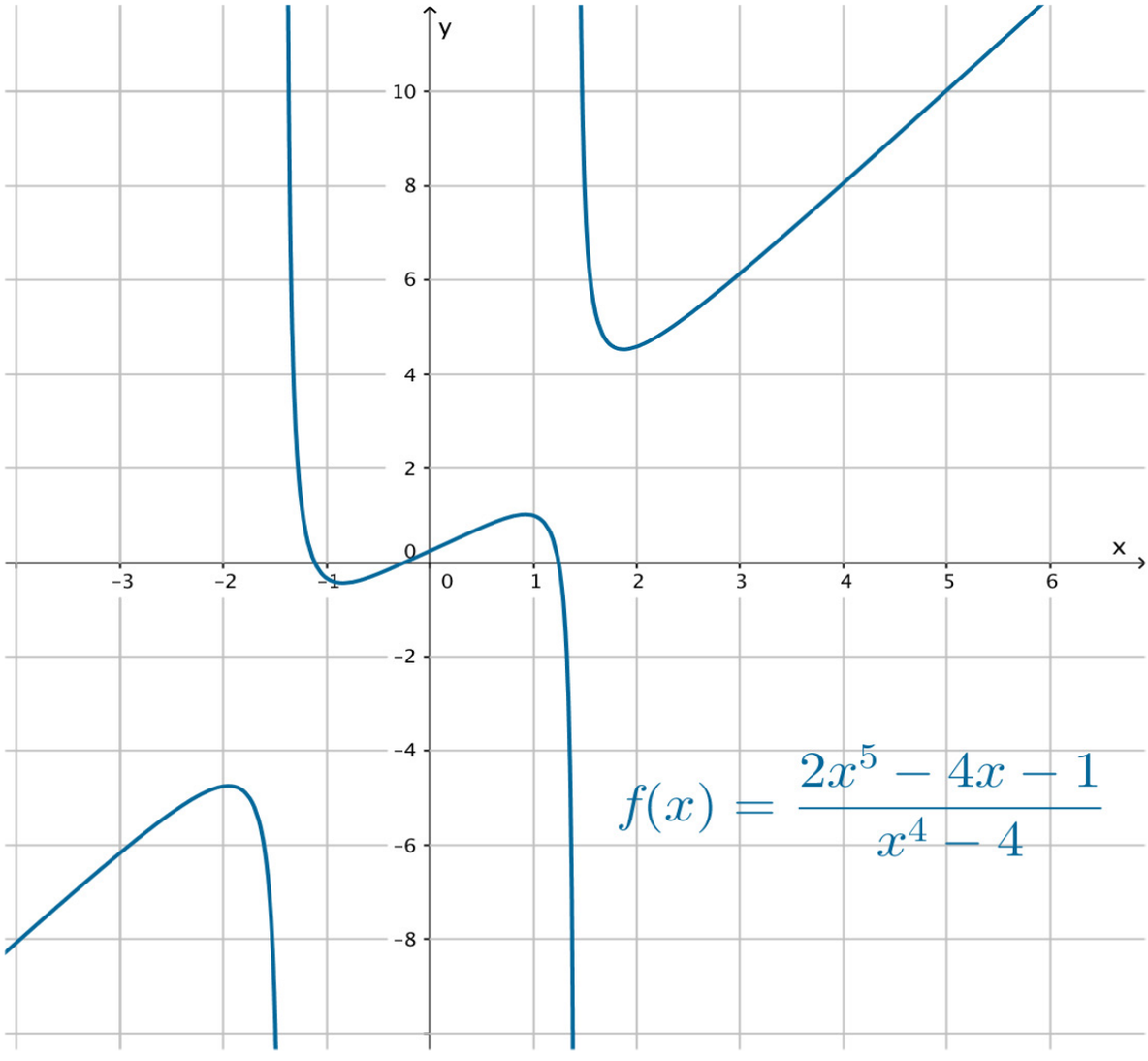



Kulkukaavion perusteella funktio saa pienimmän arvonsa kohdassa $x = 0$. Lasketaan funktion pienin arvo.

$$h(0) = \frac{0^2 - 4}{0^2 + 2} + 3 = 1 > 0$$

Funktion $h$ pienin arvo on positiivinen, joten $h$ saa vain positiivia arvoja. □

# 308




## Vastaus

a) Määrittelyehto on $x \neq -1,4$ ja $x \neq 1,4$.

b) Minimikohdat ovat $x \approx -0,8$ ja $x \approx 1,9$.
Maksimikohdat ovat $x \approx -2,0$ ja $x \approx 0,9$.

c) Minimiarvot ovat 4,5 ja –0,4.
Maksimiarvot ovat 1,0 ja –4,7.

d) Funktiolla $f$ ei ole suurinta eikä pienintä arvoa.

# 309

Funktio $f(x)=\frac{x^2-12}{x-4}$ on määritelty, kun $x-4\neq 0$ eli kaikilla $x\neq 4$.

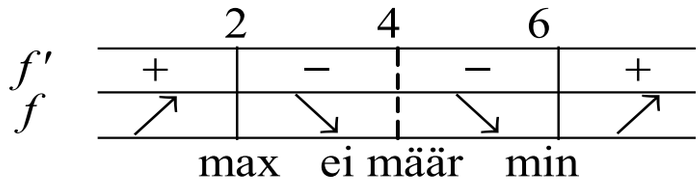
Derivoidaan funktio ja päätellään sen kulku derivaattafunktion merkeistä.

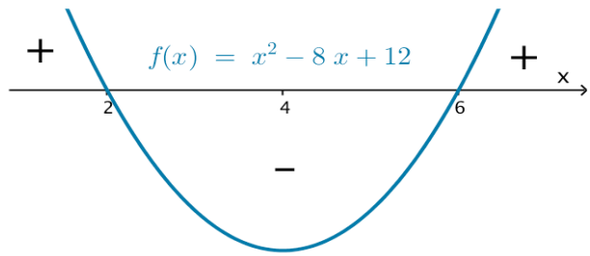
$$f'(x)=\frac{2x(x-4)-(x^2-12)\cdot 1}{(x-4)^2}$$
$$=\frac{2x^2-8x-x^2+12}{(x-4)^2}$$
$$=\frac{x^2-8x+12}{(x-4)^2}$$

Nimittäjä on määrittelyjoukossa positiivinen, joten osoittaja määrää derivaatan merkin. Määritetään osoittajan nollakohdat.

$$x^2-8x+12=0$$
$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 1\cdot 12}}{2\cdot 1}=\frac{8\pm 4}{2}$$
$$x=\frac{8+4}{2}=6 \quad \text{tai} \quad x=\frac{8-4}{2}=2$$

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio.




a) Kulkukaavion perusteella funktio $f$ on (aidosti) kasvava,
kun $x \le 2$ ja kun $x \ge 6$.
Funktio on (aidosti) vähenevä, kun $2 \le x < 4$ ja kun $4 < x \le 6$.

b) Kulkukaavion perusteella funktiolla on maksimikohta $x = 2$.

Lasketaan maksimiarvo, kun $x = 2$.

$$f(2) = \frac{2^2 - 12}{2 - 4} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Funktiolla on minimikohta $x = 6$.

Lasketaan minimiarvo, kun $x = 6$.

$$f(6) = \frac{6^2 - 12}{6 - 4} = \frac{24}{2} = 12$$

**Vastaus**

a) kasvava välillä $x \le 2$ ja välillä $x \ge 6$,
vähenevä, välillä $2 \le x < 4$ ja välillä $4 < x \le 6$

b) maksimikohta $x = 2$, maksimiarvo 4,
minimikohta $x = 6$, minimiarvo 12

## 310

Funktio $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$ on määritelty, kun $x \neq 0$.

Derivoidaan funktio ja päätellään funktion kulku derivaatan merkeistä.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}(x^{-1} - x^{-3}) \\ &= -x^{-1-1} - (-3) \cdot x^{-3-1} \\ &= -x^{-2} + 3x^{-4} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} -\frac{x^2)1}{x^2} + \frac{3}{x^4} &= 0 \\ -\frac{x^2}{x^4} + \frac{3}{x^4} &= 0 \\ \frac{-x^2+3}{x^4} &= 0 \qquad \Big| \cdot x^4 \quad (\neq 0) \\ -x^2 + 3 &= 0 \\ x^2 &= 3 \\ x &= -\sqrt{3} \quad \text{tai} \quad x = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Nollakohdat toteuttavat määrittelyehdon.

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio.

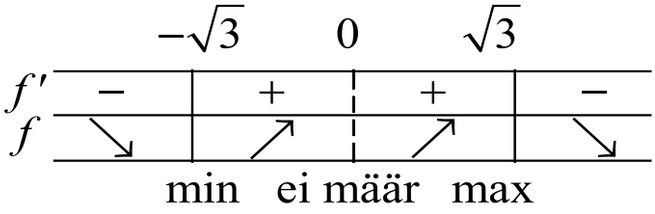
Derivaattafunktio on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa $x = -\sqrt{3}$ tai $x = \sqrt{3}$ tai kohdassa 0, jossa $f'$ ei ole määritelty.

$$f'(-2) = -\frac{1}{(-2)^2} + \frac{3}{(-2)^4} = -\frac{1}{16} < 0$$

$$f'(-1) = -\frac{1}{(-1)^2} + \frac{3}{(-1)^4} = 2 > 0$$

$$f'(1) = -\frac{1}{1^2} + \frac{3}{1^4} = 2 > 0$$

$$f'(2) = -\frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^4} = -\frac{1}{16} < 0$$




Kulkukaavion perusteella funktiolla on minimikohta $x = -\sqrt{3}$ ja maksimikohta $x = \sqrt{3}$.

**Vastaus**

minimikohta $x = -\sqrt{3}$, maksimikohta $x = \sqrt{3}$

## 311

Lasketaan funktion $g(x) = \dfrac{-x^3}{2x^2 - 4}$ nimittäjän nollakohdat.

$2x^2 - 4 = 0$

$x = -\sqrt{2}$ tai $x = \sqrt{2}$

Funktio $g$ on määritelty, kun $x \neq -\sqrt{2}$ ja $x \neq \sqrt{2}$.

Derivoidaan funktio ja päätellään funktion kulku derivaatan merkeistä.

$$g'(x) = \mathrm{D}\frac{-x^3}{2x^2 - 4} = \frac{-x^4 + 6x^2}{2 \cdot (x^2 - 2)^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

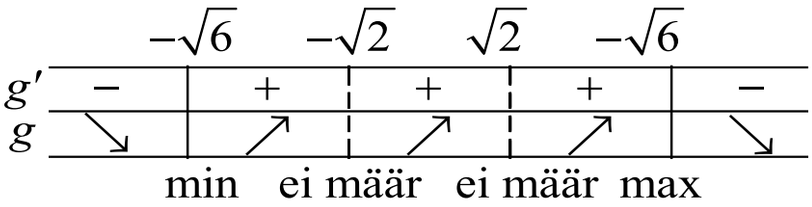
$$\frac{-x^4 + 6x^2}{2 \cdot (x^2 - 2)^2} = 0$$

$x = -\sqrt{6}$ tai $x = \sqrt{6}$

Nollakohdat toteuttavat määrittelyehdon.

Laaditaan funktion $g$ kulkukaavio. Derivaattafunktio on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa $x = -\sqrt{6}$ ja $x = \sqrt{6}$ tai kohdissa $x = -\sqrt{2}$ ja $x = \sqrt{2}$, joissa $g'$ ei ole määritelty.

$$g'(-3) = -\frac{27}{98} < 0$$
$$g'(-2) = 1 > 0$$
$$g'(0) = 0 > 0$$
$$g'(2) = 1 > 0$$
$$g'(3) = -\frac{27}{98} < 0$$




Kulkukaavion perusteella funktiolla on minimikohta $x = -\sqrt{6}$ ja maksimikohta $x = \sqrt{6}$.

**Vastaus**

määrittelyjoukko $\mathrm{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$,
minimikohta $x = -\sqrt{6}$,
maksimikohta $x = \sqrt{6}$

## 312

Selvitetään funktion $f(x) = \dfrac{x^5}{3 - x^2}$ määrittelyehto.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohdat.

$3 - x^2 = 0$

$x = -\sqrt{3}$ tai $x = \sqrt{3}$

Funktio on määritelty, kun $x \neq -\sqrt{3}$ ja $x \neq \sqrt{3}$.

Derivoidaan funktio ja päätellään funktion kulku derivaatan merkeistä.

$$f'(x) = \mathrm{D}\frac{x^5}{3 - x^2} = \frac{-3x^6 + 15x^4}{(x^2 - 3)^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

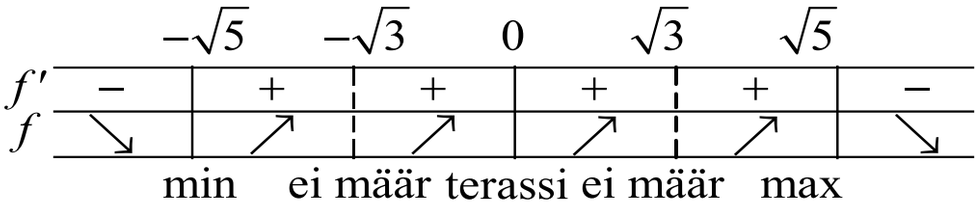
$$\frac{-3x^6 + 15x^4}{(x^2 - 3)^2} = 0$$

$x = 0$ tai $x = \pm\sqrt{5}$

Nollakohdat toteuttavat määrittelyehdon.

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Derivaattafunktio on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa tai kohdissa $x = \pm\sqrt{3}$, joissa $f'$ ei ole määritelty.

$f'(-3) = -27 < 0$
$f'(-2) = 48 > 0$
$f'(-1) = 3 > 0$
$f'(1) = 3 > 0$
$f'(2) = 48 > 0$
$f'(3) = -27 < 0$




Kulkukaavion perusteella funktiolla on maksimikohta $x = \sqrt{5}$ ja minimikohta $x = -\sqrt{5}$. Lasketaan maksimi- ja minimiarvo.

minimiarvo $f(-\sqrt{5}) = \dfrac{25 \cdot \sqrt{5}}{2}$

maksimiarvo $f(\sqrt{5}) = \dfrac{-25 \cdot \sqrt{5}}{2}$

**Vastaus**

minimikohta $x = -\sqrt{5}$, minimiarvo $\dfrac{25\sqrt{5}}{2}$,

maksimikohta $x = \sqrt{5}$, maksimiarvo $-\dfrac{25\sqrt{5}}{2}$

## 313

Koska $x^2+3\neq 0$ aina, niin funktio $f(x)=\dfrac{(x-a)^2}{x^2+3}$ on määritelty kaikilla $x$.
Derivoidaan funktio laskimella.

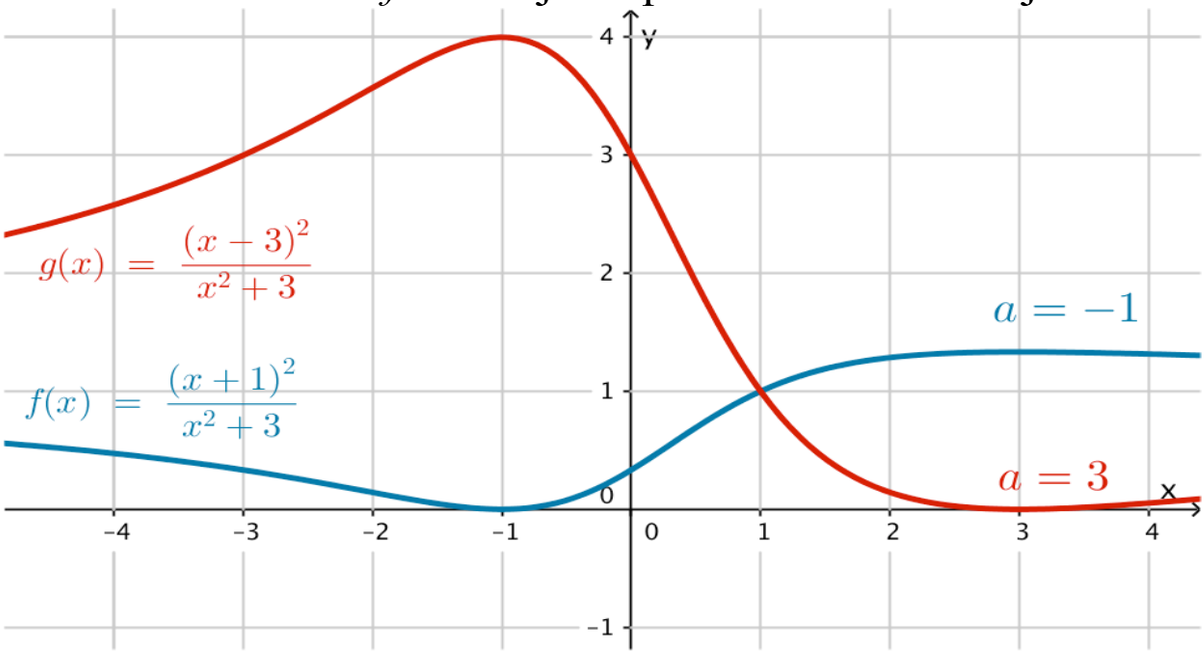
$$f'(x)=\frac{2(x-a)(ax+3)}{(x^2+3)^2}$$

Jotta $x=-1$ olisi funktion ääriarvokohta, pitää olla $f'(-1)=0$.

$$f'(-1)=\frac{2(-1-a)(a(-1)+3)}{((-1)^2+3)^2}=0$$

Laskimella saadaan ratkaisuksi $a=-1$ tai $a=3$.

Tutkitaan funktion $f$ kuvaajaa tapauksissa $a=-1$ ja $a=3$.



Kuvaajan perusteella funktio saa maksimiarvon kohdassa $x = -1$, kun $a = 3$.

Laaditaan funktion kulkukaavio, kun $a = 3$.

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{2(x-3)(3x+3)}{(x^2+3)^2} = 0$$

$$\frac{2(x-3)(3x+3)}{(x^2+3)^2} = 0$$

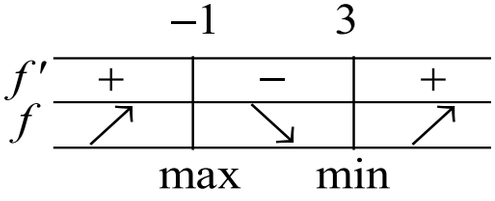
Laskimella saadaan ratkaisuksi $x = -1$ tai $x = 3$.

Derivaattafunktio on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Se voi vaihtaa merkkiään ainoastaan nollakohdissa.

$$f'(-2) = \frac{30}{49} > 0$$

$$f'(0) = -2 < 0$$

$$f'(4) = \frac{30}{361} > 0$$



Kulkukaaviosta nähdään, että funktiolla on maksimikohta $x = -1$ ja minimikohta $x = 3$.
Lasketaan maksimi- ja minimiarvo, kun $a = 3$.

maksimiarvo $f(-1) = \dfrac{(-1-3)^2}{(-1)^2+3} = \dfrac{16}{4} = 4$

minimiarvo $f(3) = \dfrac{(3-3)^2}{3^2+3} = \dfrac{0}{12} = 0$

**Vastaus**
$a = 3$, maksimiarvo 4,
funktiolla on myös minimi $f(3) = 0$

## 314

Funktio $f(x) = \dfrac{x^3 - 20x + 16}{-x}$ on määritelty koko tarkasteluvälillä $[1, 4]$.
Funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Derivoidaan.

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 20) \cdot (-x) - (x^3 - 20x + 16) \cdot (-1)}{(-x)^2}$$

$$= \frac{-3x^3 + 20x + x^3 - 20x + 16}{x^2}$$

$$= \frac{-2x^3 + 16}{x^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{-2x^3 + 16}{x^2} = 0 \qquad \Big| \cdot x^2 \quad (\neq 0)$$

$$-2x^3 + 16 = 0$$

$$2x^3 = 16$$

$$x^3 = 8$$

$$x = \sqrt[3]{8}$$

$$x = 2$$

Nollakohta kuuluu tarkasteluvälille.

Lasketaan funktion arvo välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa.

$$f(1) = \frac{1^3 - 20 \cdot 1 + 16}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$f(2) = \frac{2^3 - 20 \cdot 2 + 16}{-2} = \frac{-16}{-2} = 8 \qquad \text{suurin}$$

$$f(4) = \frac{4^3 - 20 \cdot 4 + 16}{-4} = \frac{0}{-4} = 0 \qquad \text{pienin}$$

**Vastaus**

pienin arvo $0$, suurin arvo 8

## 315

Funktio $g(x) = \frac{x - x^2}{3x + 1}$ on määritelty koko tarkasteluvälillä [0, 3].
Funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Derivoidaan.

$$g'(x) = \frac{(1 - 2x)(3x + 1) - (x - x^2) \cdot 3}{(3x + 1)^2}$$

$$= \frac{3x + 1 - 6x^2 - 2x - 3x + 3x^2}{(3x + 1)^2}$$

$$= \frac{-3x^2 - 2x + 1}{(3x + 1)^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{-3x^2 - 2x + 1}{(3x + 1)^2} = 0 \qquad \left| \cdot (3x + 1)^2 \quad (\neq 0) \right.$$

$$-3x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 1}}{2 \cdot (-3)} = \frac{2 \pm 4}{-6}$$

$$x = \frac{2 + 4}{-6} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2 - 4}{-6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

Nollakohdista $x = \frac{1}{3}$ kuuluu tarkasteluvälille.

Lasketaan funktion arvo välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa.

$$g(0) = \frac{0 - 0^2}{3 \cdot 0 + 1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$g(\tfrac{1}{3}) = \frac{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2}{3 \cdot \frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{9}}{\frac{3}{3} + 1} = \frac{\frac{2}{9}}{2} = \frac{1}{9} \qquad \text{suurin}$$

$$g(3) = \frac{3 - 3^2}{3 \cdot 3 + 1} = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5} \qquad \text{pienin}$$

**Vastaus**

pienin arvo $-\frac{3}{5}$, suurin arvo $\frac{1}{9}$

## 316

Tutkitaan funktion $f(x) = \dfrac{8x^2 + 2}{x^4 + 3}$ arvoja välillä $[-1, 2]$.

Nimittäjä $x^4 + 3 \geq 3$ kaikilla $x$, joten funktio on määritelty koko tarkasteluvälillä.

Rationaalifunktio $f$ on suljetulla välillä jatkuva ja se saa kaikki arvot suurimman ja pienimmän arvonsa väliltä.

Funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Derivoidaan.

$$f'(x) = \mathrm{D}\frac{8x^2 + 2}{x^4 + 3} = \frac{-8x(2x^4 + x^2 - 6)}{(x^4 + 3)^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{-8x(2x^4 + x^2 - 6)}{(x^4 + 3)^2} = 0$$

$$x = -\frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{tai} \quad x = 0$$

Nollakohdista $x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ ja $x = 0$ kuuluvat tarkasteluvälille.

Lasketaan funktion arvo välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdissa.

$f(-1) = \frac{5}{2}$

$f(0) = \frac{2}{3}$ pienin

$f(\frac{\sqrt{6}}{2}) = \frac{8}{3}$ suurin

$f(2) = \frac{34}{19}$

Funktion $f$ suurin arvo on $\frac{8}{3}$ ja pienin arvo $\frac{2}{3}$,

joten se saa kaikki arvot väliltä $[\frac{2}{3}, \frac{8}{3}]$.

**Vastaus**

arvojoukko $[\frac{2}{3}, \frac{8}{3}]$

**317**

Funktio $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}$ on määritelty, kun $x \neq 0$.

Derivoidaan funktio ja päätellään funktion kulku derivaatan merkeistä.

$$f'(x) = \mathrm{D}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}\right) = -\frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^5}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$-\frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^5} = 0$$

$x = -\sqrt{2}$ tai $x = \sqrt{2}$

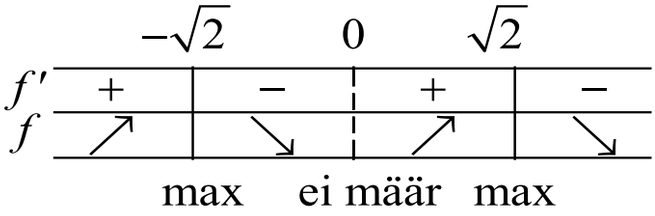
Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Derivaattafunktio on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa $x = -\sqrt{2}$ tai $x = \sqrt{2}$ tai kohdassa 0 jossa $f'$ ei ole määritelty.

$$f'(-2) = \frac{-(-2)^2 + 3}{(-2)^4} = \frac{1}{8} > 0$$

$$f'(-1) = -2 < 0$$

$$f'(1) = 2 > 0$$

$$f'(2) = -\frac{1}{8} < 0$$




Kulkukaavion perusteella funktio saa suurimman arvonsa kohdassa $x = -\sqrt{2}$ tai $x = \sqrt{2}$. Lasketaan funktion arvo näissä kohdissa.

$$f(-\sqrt{2}) = \frac{1}{4}$$

$$f(\sqrt{2}) = \frac{1}{4}$$

Kulkukaavion perusteella funktiolla ei ole minimikohtaa, joten sillä ei ole pienintä arvoa.

**Vastaus**

suurin arvo $\frac{1}{4}$, ei pienintä arvoa

# 318

Selvitetään funktion $h(x) = \dfrac{2x^2 + 12x + 21}{x^2 + 6x + 10}$ määrittelyehto.

Lasketaan nimittäjän nollakohdat.

$$x^2 + 6x + 10 = 0$$

Ei ratkaisua

Funktio on määritelty kaikilla $x$.

Derivoidaan funktio ja päätellään funktion kulku derivaatan merkeistä.

$$h'(x) = \mathrm{D}\frac{2x^2 + 12x + 21}{x^2 + 6x + 10} = \frac{-2x - 6}{(x^2 + 6x + 10)^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

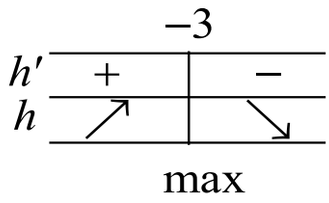
$$\frac{-2x - 6}{(x^2 + 6x + 10)^2} = 0$$

$$x = -3$$

Laaditaan funktion $h$ kulkukaavio. Derivaattafunktio on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdassa $x = -3$.

$$h'(-4) = \frac{1}{2} > 0$$

$$h'(-2) = -\frac{1}{2} < 0$$




Kulkukaavion perusteella funktio saa suurimman arvonsa kohdassa $x = -3$. Lasketaan funktion arvo tässä kohdassa.

$$h(-3) = 3$$

Kulkukaavion perusteella funktiolla ei ole minimikohtaa, joten sillä ei ole pienintä arvoa.

**Vastaus**
suurin arvo 3, ei pienintä arvoa

## 319

Selvitetään funktion $f(t) = 7 - \frac{4t-10}{t^2-4t+8}$ määrittelyehto. Lasketaan nimittäjän nollakohdat.

$t^2 - 4t + 8 = 0$
Ei ratkaisua

Funktio on määritelty kaikilla $t$.

Derivoidaan funktio.

$$f'(t) = \mathrm{D}(7 - \frac{4t-10}{t^2-4t+8}) = \frac{4t^2-20t+8}{(t^2-4t+8)^2}$$

Muutos on nopeinta kohdassa, jossa derivaattafunktion arvon itseisarvo $\left|f'(t)\right|$ on suurin. Funktio $f'$ saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa välin $[0,8]$ päätepisteessä tai välille kuuluvassa funktion $f'$ derivaattafunktion $f''$ nollakohdassa.

$$f''(t) = -\frac{8t^3-60t^2+48t+96}{(t^2-4t+8)^3}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion $f''$ nollakohdat.

$$-\frac{8t^3 - 60t^2 + 48t + 96}{(t^2 - 4t + 8)^3} = 0$$

$t = -0,89... \approx -0,9$ tai $t = 2,16... \approx 2,2$ tai $t = 6,22... \approx 6,2$

Nollakohdat $t \approx 2,2$ ja $t \approx 6,2$ ovat tarkasteluvälillä.

Lasketaan funktion $f'$ arvon itseisarvo välin $[0,8]$ päätepisteissä ja derivaattafunktion $f''$ nollakohdissa $t \approx 2,2$ ja $t \approx 6,2$.

$|f'(0)| = |0,125| = 0,125$

$|f'(2,16...)| = |-1,02...| \approx 1,0$ suurin

$|f'(6,22...)| = |0,08...| \approx 0,1$

$|f'(8)| = |0,065| = 0,065$

Muutos oli nopeinta 2,2 kuukauden kuluttua tutkimusjakson alusta. Koska $f'(2,2) < 0$, niin kuoriaisten määrä väheni nopeudella $1,0 \cdot 1000 = 1000$ yksilöä kuukaudessa.

**Vastaus**

Lantakuoriaisten määrä muuttui nopeimmin 2,2 kuukauden kuluttua tutkimusjakson alusta. Määrä väheni tällä hetkellä 1000 yksilöä kuukaudessa.

## 320

Funktio $g(x) = x^4 + \frac{4}{x^2} - 8x$ on määritelty, kun $x \neq 0$.

Derivoidaan funktio ja päätellään funktion kulku derivaatan merkeistä.

$$g'(x) = \mathrm{D}(x^4 + \frac{4}{x^2} - 8x) = 4x^3 - \frac{8}{x^3} - 8$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

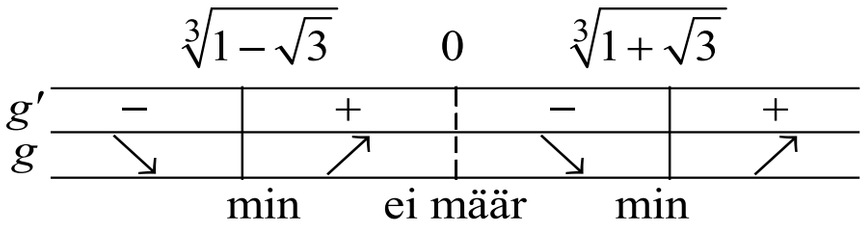
$$4x^3 - \frac{8}{x^3} - 8 = 0$$

$$x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{3}} \approx -0,9 \quad \text{tai} \quad x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{3}} \approx 1,4$$

Nollakohdat toteuttavat määrittelyehdon.

Laaditaan funktion $g$ kulkukaavio. Derivaattafunktio on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdassa tai kohdassa $x = 0$, joissa $g'$ ei ole määritelty.

$g'(-1) = -4 < 0$
$g'(-0,5) = 55,5 > 0$
$g'(1) = -12 < 0$
$g'(2) = 23 > 0$




Kulkukaavion perusteella funktiolla ei ole maksimikohtaa eikä suurinta arvoa. Minimikohdat ovat $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{3}}$ ja $x = \sqrt[3]{1+\sqrt{3}}$. Lasketaan funktion arvo minimikohdissa.

$g(\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}) = 12,7943...$
$g(\sqrt[3]{1+\sqrt{3}}) = -5,3176...$

Funktio $g$ saa pienimmän arvonsa kohdassa $x = \sqrt[3]{1+\sqrt{3}}$.

**Vastaus**

minimikohdat $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{3}}$ ja $x = \sqrt[3]{1+\sqrt{3}}$,
ei maksimikohtaa,
pienin arvo kohdassa $x = \sqrt[3]{1+\sqrt{3}}$, ei suurinta arvoa

# 321

Koska $x^2 + 1 \neq 0$ aina, niin funktio $g(x) = \dfrac{ax^2 + 4x + a}{x^2 + 1}$ on määritelty kaikilla $x$.

Nimittäjä on positiivinen kaikilla $x$, joten osoittaja määrää funktion merkin.

Jotta funktio saisi ainoastaan negatiivisia arvoja, on oltava

$ax^2 + 4x + a < 0$ kaikilla $x$.

**1)** Mikäli vakio $a = 0$, osoittaja saa muodon $4x$, joka saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja. Siis vakion $a$ arvo $0$ ei kelpaa.

**2)** Mikäli vakio $a \neq 0$, osoittaja on 2. asteen polynomi. Tutkitaan osoittajan nollakohtia.

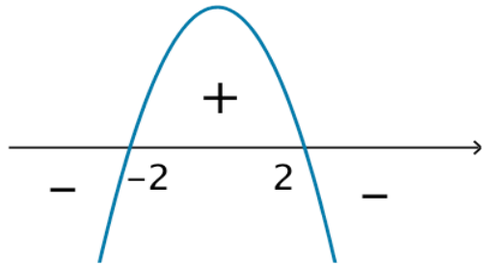
$$ax^2 + 4x + a = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot a \cdot a}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4a^2}}{2a}$$

Halutaan, että osoittajalla ei ole nollakohtia. Toisen asteen yhtälöllä ei ole nollakohtia, jos diskriminantti $16 - 4a^2$ on negatiivinen.

Tutkitaan, millä vakion $a$ arvoilla diskriminantti $16 - 4a^2$ on negatiivinen. Lasketaan diskriminantin nollakohdat.

$$\begin{aligned} 16-4a^2 &= 0 \\ -4a^2 &= -16 \\ a^2 &= 4 \\ a &= \pm 2 \end{aligned}$$




Siis $16-4a^2 < 0$, kun $a < -2$ tai $a > 2$.

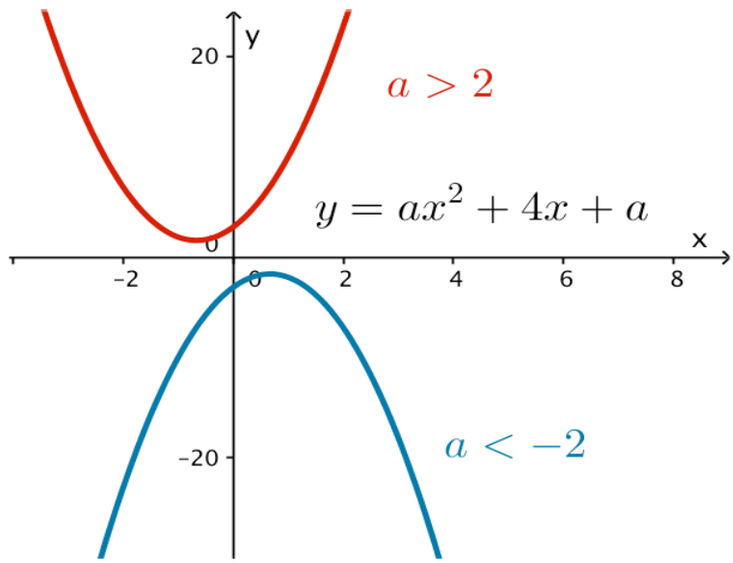
Jos $a > 2$ funktion $g(x) = \dfrac{ax^2+4x+a}{x^2+1}$ osoittajan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jolla ei ole nollakohtia, jolloin osoittaja saa vain positiivisia arvoja. Tällöin funktio $g$ saa vain positiivisia arvoja. Siis vakion $a$ arvot $a > 2$ eivät kelpaa.

Jos $a < -2$ osoittajan kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, jolla ei ole nollakohtia, jolloin osoittaja saa vain negatiivisia arvoja. Tällöin funktio $g$ saa vain negatiivisia arvoja.
Siis vakion $a$ arvot $a < -2$ kelpaavat.

**Vastaus**

$a < -2$

Graafinen tarkistus:



## 322

Funktio $f(x) = \frac{1-x^4}{x^2}$ on määritelty, kun $x \neq 0$.

Derivoidaan funktio ja päätellään funktion kulku derivaatan merkeistä.

$$f'(x) = \frac{-4x^3 \cdot x^2 - (1-x^4) \cdot 2x}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{-4x^5 - 2x + 2x^5}{x^4}$$

$$= \frac{-2x^5 - 2x}{x^4} = \frac{\cancel{x}(-2x^4 - 2)}{\overset{3}{x^{\cancel{4}}}}$$

$$= \frac{-2x^4 - 2}{x^3}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{-2x^4 - 2}{x^3} = 0$$

$$-2x^4 - 2 = 0$$

$$-2x^4 = 2$$

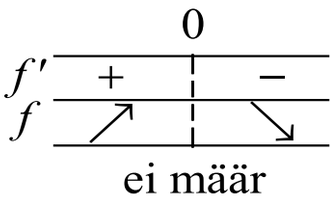
$$x^4 = -1$$

Ei ratkaisua

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Derivaattafunktio on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Sen merkki voi vaihtua vain kohdassa $0$, jossa $f'$ ei ole määritelty.

$$f'(-1) = \frac{-2 \cdot (-1)^4 - 2}{(-1)^3} = \frac{-4}{-1} = 4 > 0$$

$$f'(1) = \frac{-2 \cdot 1^4 - 2}{1^3} = \frac{-4}{1} = -4 < 0$$

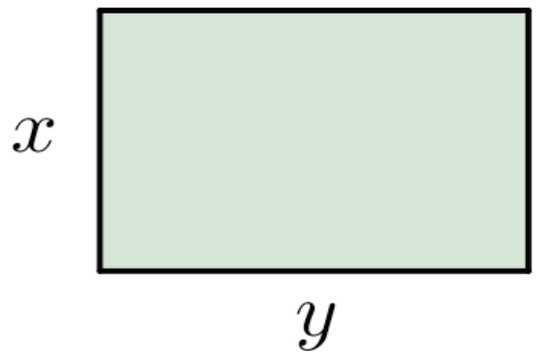



Kulkukaavion perusteella funktiolla ei ole ääriarvokohtia, joten sillä ei ole suurinta eikä pienintä arvoa.

**Vastaus**
ei suurinta eikä pienintä arvoa

**323**

Merkitään aitauksen kantaa kirjaimella $y$ ja korkeutta kirjaimella $x$.




Aitauksen piirin pituus on $2x + 2y$. Aitaa on yhteensä käytettävissä 180 metriä. Muodostetaan lauseke muuttujalle y.

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 180 \\ 2y &= 180 - 2x \\ y &= 90 - x \end{aligned}$$

Muodostetaan aitauksen pinta-alan lauseke.

$$A = xy = x(90 - x) = 90x - x^2$$

Aitojen pituuksien on oltava positiivisia. Saadaan määrittelyehto.

$$\begin{aligned} x > 0 \quad \text{ja} \quad y &> 0 \\ 90 - x &> 0 \\ x &< 90 \end{aligned}$$

Kun hyväksytään mukaan tapaukset $x = 0$ ja $x = 90$, saadaan määrittelyjoukoksi suljettu väli $[0, 90]$.

Aitauksen pinta-alaa kuvaa funktio $A(x) = 90x - x^2$, missä $x \in [0, 90]$. Funktio $A$ saa suurimman arvonsa joko välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$A'(x) = 90 - 2x$

Lasketaan derivaatan nollakohta.

$$90 - 2x = 0$$
$$x = 45$$

Nollakohta kuuluu määrittelyvälille. Lasketaan pinta-alafunktion $A$ arvo välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa.

$A(0) = 0$
$A(90) = 0$
$A(45) = 2025$ suurin

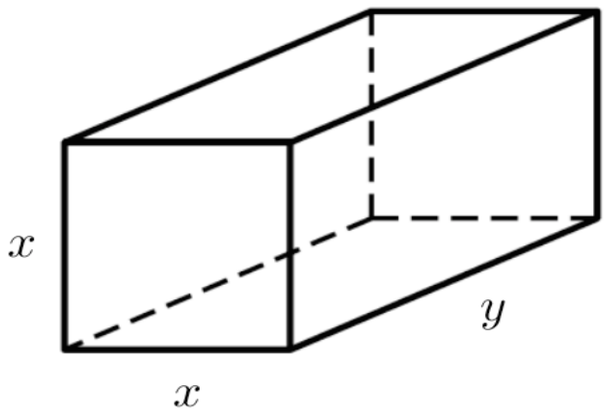
Aitaukselle saadaan suurin pinta-ala, kun $x = 45$ ja $y = 90 - 45 = 45$.

Aitaus on siis neliö, jonka sivun pituus on 45 metriä.

**Vastaus**
Aitaus on neliö, jonka sivun pituus on 45 metriä.

## 324

Merkitään päätyneliön sivun pituutta kirjaimella $x$ ja varjostimen korkeutta kirjaimella $y$.




Rautalankaa on käytettävissä 300 cm. Muodostetaan lauseke muuttujalle $y$.

$$8x + 4y = 300$$
$$4y = 300 - 8x$$
$$y = 75 - 2x$$

Muodostetaan varjostimen pinta-alan lauseke.

$$A = 2x^2 + 4xy = 2x^2 + 4x(75 - 2x)$$
$$= 2x^2 + 300x - 8x^2 = -6x^2 + 300x$$

Sivujen pituuksien on oltava positiivisia. Saadaan määrittelyehto.

$$x > 0 \quad \text{ja} \quad y > 0$$
$$75 - 2x > 0$$
$$x < 37{,}5$$

Kun hyväksytään mukaan arvot $x = 0$ ja $x = 37,5$, saadaan määrittelyjoukoksi suljettu väli $[0;37,5]$.

Laatikon pinta-alaa kuvaa funktio $A(x) = -6x^2 + 300x$, missä $x \in [0;37,5]$. Funktio $A$ saa suurimman arvonsa joko välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$$A'(x) = -12x + 300$$

Lasketaan derivaatan nollakohta.

$$-12x + 300 = 0$$
$$x = 25$$

Lasketaan funktion $A$ arvo välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa.

$$A(0) = 0$$
$$A(37,5) = 2812,5$$
$$A(25) = 3750 \quad \text{suurin}$$

Varjostimelle saadaan suurin pinta-ala, kun pohjaneliön sivun pituus on 25 cm.

Lasketaan varjostimen korkeus.

$$y = 75 - 2 \cdot 25 = 25$$

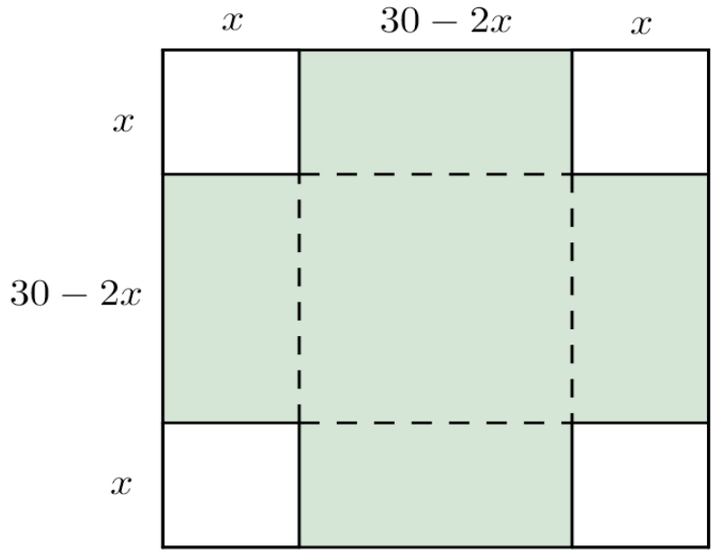
Varjostin on kuutio, jonka särmän pituus on 25 cm.

**Vastaus**

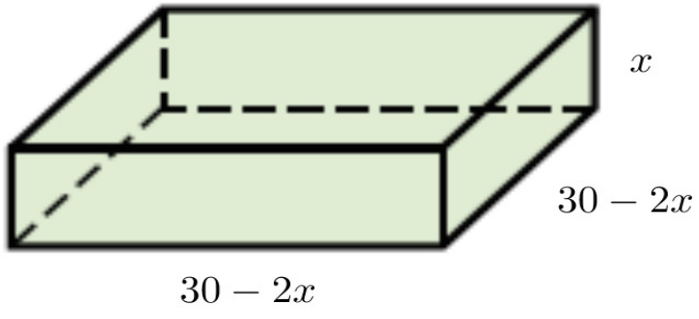
Varjostin on kuutio, jonka särmän pituus on 25 cm.

# 325

Merkitään poisleikattavan neliön sivun pituutta kirjaimella $x$.




Laatikon pohjan sivujen pituudeksi saadaan $30-2x$ ja korkeudeksi $x$.




Muodostetaan laatikon tilavuuden lauseke.

$$V = (30-2x)(30-2x)x = 4x^3 - 120x^2 + 900x$$

Sivujen pituuksien on oltava positiivisia. Saadaan määrittelyehto.

$x > 0$ ja $30 - 2x > 0$

$x < 15$

Kun hyväksytään mukaan tapaukset $x = 0$ ja $x = 15$, saadaan määrittelyjoukoksi suljettu väli $[0,15]$.

Laatikon tilavuutta kuvaa funktio $V(x) = 4x^3 - 120x^2 + 900x$, missä $x \in [0,15]$. Funktio $V$ saa suurimman arvonsa joko välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$V'(x) = 12x^2 - 240x + 900$

Lasketaan derivaatan nollakohta.

$12x^2 - 240x + 900 = 0$

$x = 5$ tai $x = 15$

Nollakohdista $x = 5$ kuuluu välille $]0, 15[$. Lasketaan funktion $V$ arvo välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa.

$V(0) = 0$

$V(15) = 0$

$V(5) = 2000$ suurin

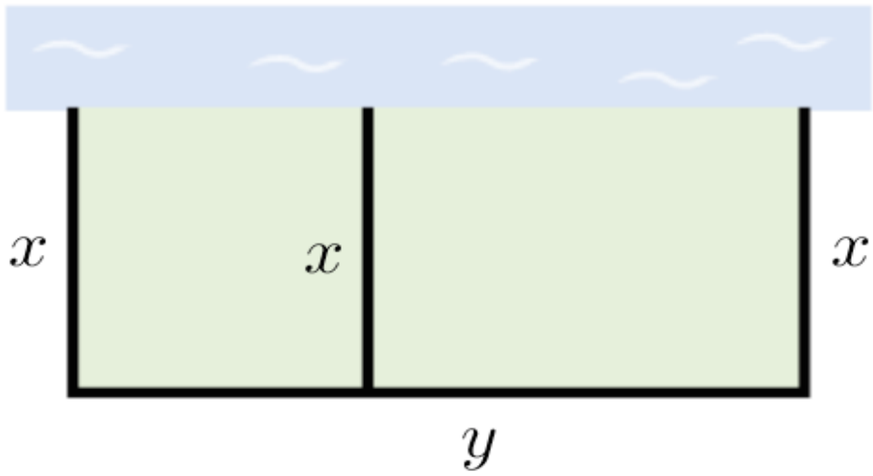
Laatikolle saadaan suurin tilavuus, kun $x = 5$ eli poisleikattavan neliön sivun pituus on 5,0 cm.

**Vastaus**

Neliön sivun pituus on 5,0 cm.

## 326

Merkitään rannan suuntaisen sivun pituutta kirjaimella $y$ ja rantaa vastaan kohtisuoran sivun pituutta kirjaimella $x$.




Aidan pituus on $3x + y$. Aitaa on yhteensä käytettävissä 144 metriä. Saadaan lauseke muuttujalle $y$.

$$3x + y = 144$$
$$y = 144 - 3x$$

Muodostetaan aitauksen pinta-alan lauseke.

$$A = xy = x(144 - 3x) = 144x - 3x^2$$

Aitojen pituuksien on oltava positiivisia. Saadaan määrittelyehto.

$$x > 0 \quad \text{ja} \quad y > 0$$
$$144 - 3x > 0$$
$$x < 48$$

Kun hyväksytään mukaan $x = 0$ ja $x = 48$, saadaan määrittelyjoukoksi suljettu väli $[0, 48]$.

Aitauksen pinta-alaa kuvaa funktio $A(x) = 144x - 3x^2$, missä $x \in [0, 48]$. Funktio $A$ saa suurimman arvonsa joko välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$A'(x) = 144 - 6x$

Lasketaan derivaatan nollakohta.

$144 - 6x = 0$

$x = 24$

Nollakohta kuuluu määrittelyvälille. Lasketaan funktion $A$ arvo välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa.

$A(0) = 0$
$A(48) = 0$
$A(24) = 1728$ suurin

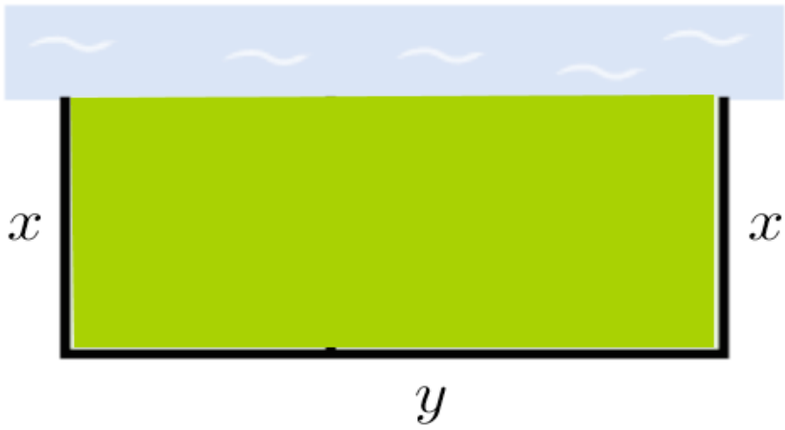
Aitaukselle saadaan suurin pinta-ala, kun $x = 24$ ja $y = 144 - 3 \cdot 24 = 72$.

Rantaa vastaan kohtisuoran sivun pituuden tulee olla 24,0 m ja rannan suuntaisen sivun 72,0 m.

**Vastaus**
rannan suuntainen sivu 72,0 m,
rantaa vastaan kohtisuora sivu 24,0 m

**327**

Merkitään joen suuntaisen sivun pituutta kirjaimella $y$ ja jokea vastaan kohtisuoran sivun pituutta kirjaimella $x$.




Aitauksen pinta-alan avulla saadaan lauseke muuttujalle $y$.

$$A = 2000$$
$$xy = 2000$$
$$y = \frac{2000}{x}$$

Muodostetaan lauseke aidan pituudelle.

$$P = 2x + y = 2x + \frac{2000}{x}$$

Aitojen pituuksien on oltava positiivisia.
Saadaan määrittelyehto $x > 0$ ja $y > 0$.

Aidan pituutta kuvaa funktio $P(x) = 2x + \frac{2000}{x}$, missä $x > 0$.

Tutkitaan funktion kulkua derivaatan merkkien avulla.

$$P'(x) = 2 - \frac{2000}{x^2}$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

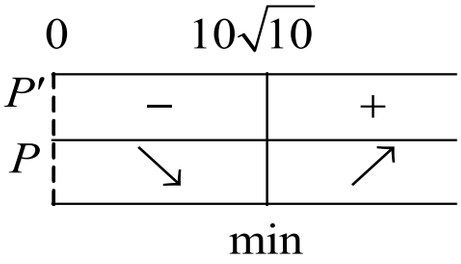
$$2 - \frac{2000}{x^2} = 0$$

$$x = -10\sqrt{10} \quad \text{tai} \quad x = 10\sqrt{10}$$

Nollakohdista $x = 10\sqrt{10}$ kuuluu määrittelyvälille. Laaditaan funktion kulkukaavio. Derivaattafunktio on rationaalifunktio, joten se on jatkuva määrittelyjoukossaan ja voi vaihtaa merkkiään ainoastaan nollakohdassa $x = 10\sqrt{10} \approx 31,6$.

$$P'(30) = -0,22... < 0$$

$$P'(32) = 0,046... > 0$$



Kulkukaavion perusteella aidan pituus on pienin kun

$x = 10 \cdot \sqrt{10} = 31,622... \approx 31,6$ ja

$$y = \frac{2000}{x} = \frac{2000}{10 \cdot \sqrt{10}} = 63,245... \approx 63,2$$

Joen suuntaisen sivun pituuden tulee olla 63,2 m ja jokea vastaan kohtisuoran sivun pituuden 31,6 m.

**Vastaus**
joen suuntainen sivu 63,2 m ja
jokea vastaan kohtisuora sivu 31,6 m

## 328

Merkitään 1 euron korotusten lukumäärää kirjaimella $x$.

Lipun uudeksi hinnaksi saadaan $7 + x$.

Kävijämäärä laskee $360x$, joten uusi kävijämäärä on $8200 - 360x$.

Muodostetaan myyntituloja kuvaava funktio.

$$M(x) = (7 + x)(8200 - 360x) = -360x^2 + 5680x + 57400$$

Tutkitaan funktion kulkua derivaattafunktion avulla.

$$M'(x) = -720x + 5680$$

Lasketaan derivaatan nollakohta.

$$-720x + 5680 = 0$$
$$x = 7,888... \approx 7,89$$

Funktion $M$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten se saa suurimman arvonsa paraabelin huipussa eli derivaatan nollakohdassa. Myyntitulo on siis suurin, kun hinnan korotus on 7,89 euroa.

Lipun hinta on tällöin $7\ € + 7,89\ € = 14,89\ €$
Myytyjen lippujen määrä on $8200 - 360 \cdot 7,89 = 5359,6 \approx 5360$

**Vastaus**
lipun hinta 14,89 € (≈ 14,90 €), lippuja myydään 5360 kpl

## 329

Merkitään 0,5 euron korotusten lukumäärää kirjaimella $x$.

Kanisterin uudeksi hinnaksi saadaan $8,90 + 0,5x$ .

Myytyjen kanisterien määrä laskee $35x$ kappaleella, joten uusi myyntimäärä on $760 - 35x$ .

Muodostetaan myyntituloja kuvaava funktio.

$$M(x) = (8,90 + 0,5x)(760 - 35x) = -17,5x^2 + 68,5x + 6764$$

Tutkitaan funktion kulkua derivaattafunktion avulla.

$$M'(x) = -35x + 68,5$$

Lasketaan derivaatan nollakohta.

$$-35x + 68,5 = 0$$
$$x = 1,9571... \approx 1,96$$

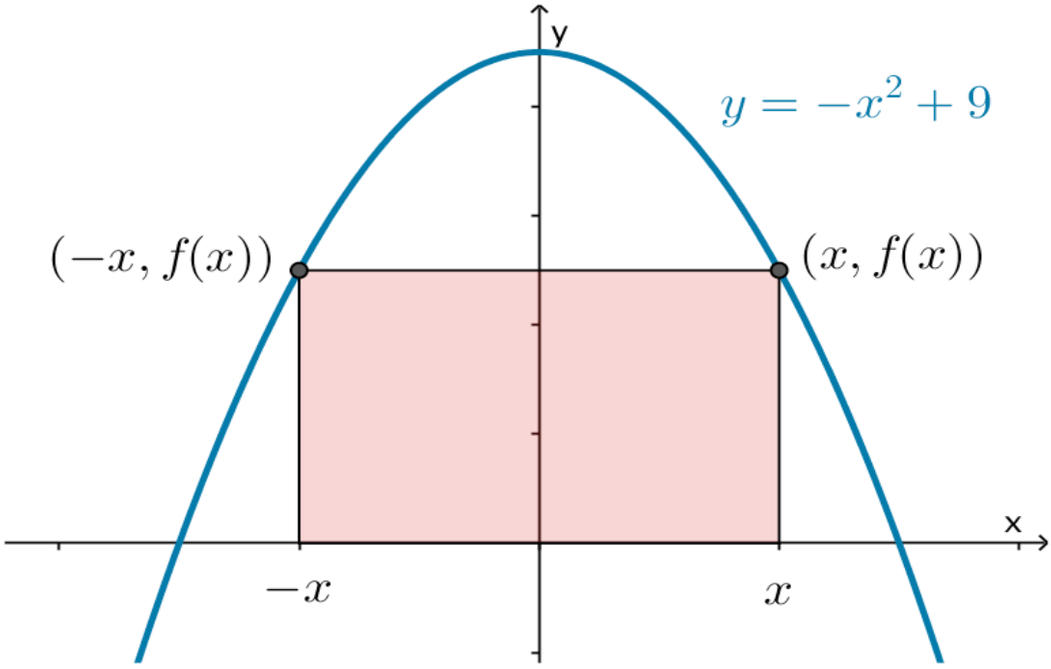
Funktion $M$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten se saa suurimman arvonsa paraabelin huipussa eli derivaatan nollakohdassa. Myyntitulo on siis suurin, kun $x = 1,96$.

Kanisterin hinta on tällöin $8,90\ € + 1,96 \cdot 0,50\ € = 9,88\ €$

**Vastaus**
9,88 € (≈ 9,90 €)

## 330

Piirretään mallikuva.




Merkitään $f(x) = -x^2 + 9$.

Funktion nollakohdat ovat

$-x^2 + 9 = 0$

$x = -3$ tai $x = 3$

Rajoitetaan $x$ positiiviselle $x$-akselille.

Koska suorakulmion kärjessä $y > 0$, määrittelyväliksi saadaan avoin väli $x \in ]0, 3[$.

Suorakulmion ja paraabelin leikkauspisteet ovat

$(-x, f(-x))$ ja $(x, f(x))$.

Suorakulmion kannan pituudeksi saadaan $2x$ ja suorakulmion korkeudeksi $f(x) = -x^2 + 9$, missä $x \in ]0, 3[$.

Muodostetaan funktio suorakulmion pinta-alalle.

$A(x) = 2x(-x^2 + 9) = -2x^3 + 18x$, missä $x \in ]0, 3[$

Tutkitaan pinta-alafunktion kulkua derivaattafunktion merkkien avulla.

$A'(x) = -6x^2 + 18$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

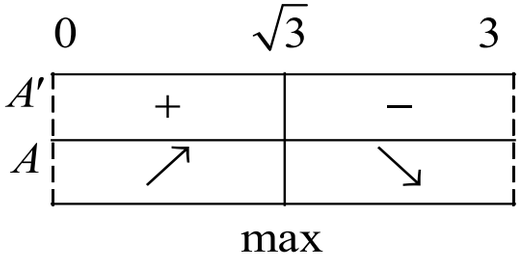
$-6x^2 + 18 = 0$

$x = -\sqrt{3}$ tai $x = \sqrt{3}$

Nollakohdista $x = \sqrt{3} \approx 1,7$ kuuluu määrittelyvälille.

Derivaattafunktio on polynomifunktio ja siten jatkuva. Se voi vaihtaa merkkiään ainoastaan nollakohdassa.

$A'(1) = 12 > 0$
$A'(2) = -6 < 0$




Kulkukaavion mukaan pinta-ala saa suurimman arvonsa, kun $x = \sqrt{3}$ .

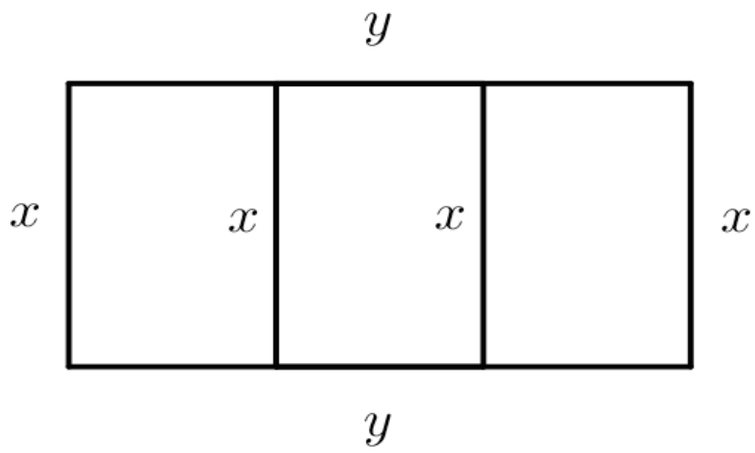
Lasketaan suorakulmion suurin pinta-ala.

$$A(\sqrt{3}) = -2(\sqrt{3})^3 + 18\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

**Vastaus**
$12\sqrt{3}$

## 331

Merkitään aitauksen pituutta kirjaimella $y$ ja leveyttä kirjaimella $x$.




Aitaa tarvitaan yhteensä $4x + 2y$ . Aitaa on yhteensä käytettävissä 92 metriä. Saadaan lauseke muuttujalle $y$.

$$4x + 2y = 92$$
$$2y = 92 - 4x$$
$$y = 46 - 2x$$

Muodostetaan aitauksen pinta-alan lauseke.

$$A = xy = x(46 - 2x) = 46x - 2x^2$$

Aitojen pituuksien on oltava positiivisia.
Muodostetaan määrittelyehto.

$$x > 0 \quad \text{ja} \quad y > 0$$
$$46 - 2x > 0$$
$$x < 23$$

Kun hyväksytään mukaan tapaukset $x = 0$ ja $x = 23$, saadaan määrittelyjoukoksi suljettu väli $[0, 23]$.

Aitauksen pinta-alaa kuvaa funktio $A(x) = 46x - 2x^2$, missä $x \in [0, 23]$. Funktio $A$ saa suurimman arvonsa joko välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$A'(x) = 46 - 4x$

Lasketaan derivaatan nollakohta.

$46 - 4x = 0$

$x = 11,5$

Nollakohta kuuluu määrittelyvälille. Lasketaan funktion $A$ arvo välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa.

$A(0) = 0$
$A(23) = 0$
$A(11,5) = 264,5$ suurin

Aitaukselle saadaan suurin pinta-ala, kun $x = 11,5$ ja $y = 46 - 2x = 46 - 2 \cdot 11,5 = 23,0$.

Aitauksen pituuden tulee olla 23,0 m ja leveyden 11,5 m, väliseinät rakennetaan leveyssuuntaan.

**Vastaus**
pituus 23,0 m, leveys 11,5 m, väliseinät leveyssuunnassa

## 332

Merkitään $0{,}75$ euron korotusten lukumäärää kirjaimella $x$.
Suklaarasian uudeksi hinnaksi saadaan $8{,}50 + 0{,}75x$.
Myytyjen rasioiden määrä laskee $23x$, joten uusi myyntimäärä on $690 - 23x$.

Muodostetaan myyntituloja kuvaava funktio.

$$M(x) = (8{,}50 + 0{,}75x)(690 - 23x) = -17{,}25x^2 + 322x + 5865$$

Tutkitaan funktion kulkua derivaattafunktion avulla.

$$M'(x) = -34{,}5x + 322$$

Lasketaan derivaatan nollakohta.

$$-34{,}5x + 322 = 0$$
$$x = 9{,}33...$$

Funktion $M$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten myyntitulo $M$ saa suurimman arvonsa paraabelin huipussa eli derivaatan nollakohdassa.

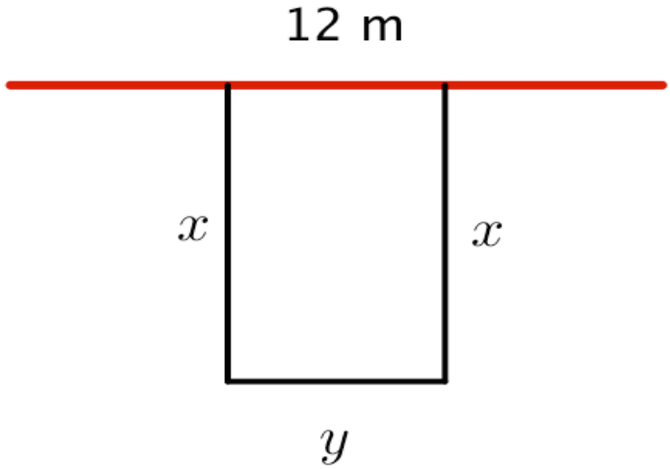
Myyntitulo on siis suurin, kun $x = 9{,}33...$.

Rasian hinta on $8{,}50€ + 9{,}33... \cdot 0{,}75€ = 15{,}50€$.
Rasioiden myyntimäärä on $690 - 23 \cdot 9{,}33... = 475{,}33... \approx 475$.

**Vastaus**
hinta $15{,}50€$, myyntimäärä noin $475$ kappaletta

## 333

Merkitään aitauksen seinän suuntaisen sivun pituutta kirjaimella $y$ ja seinää vastaan kohtisuoran sivun pituutta kirjaimella $x$.




Aitaa tarvitaan yhteensä $2x + y$. Aitaa on yhteensä käytettävissä $30$ metriä. Muodostetaan lauseke muuttujalle $y$.

$$2x + y = 30$$
$$y = 30 - 2x$$

Muodostetaan aitauksen pinta-alan lauseke.

$$A = xy = x(30 - 2x) = 30x - 2x^2$$

Aitojen pituuksien on oltava positiivisia ja sivu $y$ voi olla korkeintaan seinän pituinen.

$$x > 0 \quad \text{ja} \quad y > 0 \quad \text{ja} \quad y \leq 12$$
$$30 - 2x > 0 \qquad 30 - 2x \leq 12$$
$$x < 15 \qquad x \geq 9$$

Kun hyväksytään mukaan tapaus $x = 15$, saadaan määrittelyjoukoksi suljettu väli $[9,15]$.

Aitauksen pinta-alaa kuvaa funktio $A(x) = 30x - 2x^2$, missä $x \in [9, 15]$. Funktio $A$ saa suurimman arvonsa joko välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$A'(x) = 30 - 4x$

Lasketaan derivaatan nollakohta.

$30 - 4x = 0$

$x = 7,5$

Nollakohta ei kuulu määrittelyvälille.

Lasketaan funktion $A$ arvo välin päätepisteissä.

$A(9) = 108$ suurin

$A(15) = 0$

Aitaukselle saadaan suurin pinta-ala, kun $x = 9$ ja $y = 30 - 2 \cdot 9 = 12$.

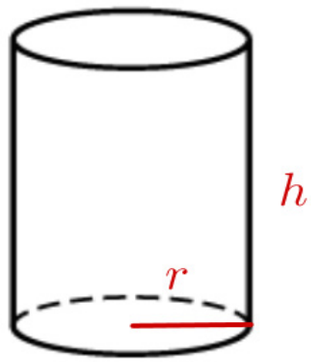
Aitauksen seinän suuntaisen sivun pituuden tulee olla 12 m ja seinää vastaan kohtisuoran sivun pituuden 9,0 m.

**Vastaus**

seinän suuntainen sivu 12 m, seinää vastaan kohtisuora sivu 9,0 m

## 334

Merkitään tölkin pohjan sädettä $r$ ja korkeutta $h$.




Tölkin tilavuus on $1\text{ L} = 1\text{ dm}^3 = 1000\text{ cm}^3$.
Tölkin tilavuudesta saadaan lauseke korkeudelle.

$$\pi r^2 h = 1000$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Muodostetaan tölkin pinta-alan lauseke.

$$A = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1000}{\pi r^2}$$

$$= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Tölkin säteen ja korkeuden on oltava positiivisia, joten saadaan määrittelyehto $r > 0$ ja $h > 0$.

Tölkin pinta-alaa kuvaa funktio $A(x) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$, missä $r > 0$.

Tutkitaan funktion kulkua derivaattafunktion merkkien avulla.

$$A'(x) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

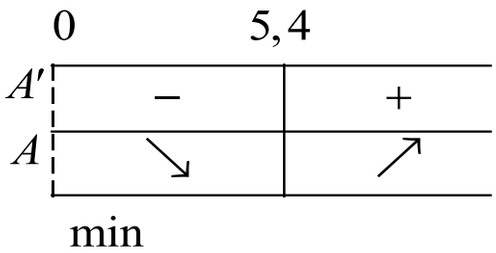
Lasketaan derivaatan nollakohta.

$$4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0$$

$$r = (\pm) 5,419... \approx 5,4$$

Laaditaan funktion $A$ kulkukaavio. Derivaattafunktio on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Se voi vaihtaa merkkiään ainoastaan nollakohdassa.

$$A'(5) = -17,1... < 0$$
$$A'(6) = 19,8... > 0$$



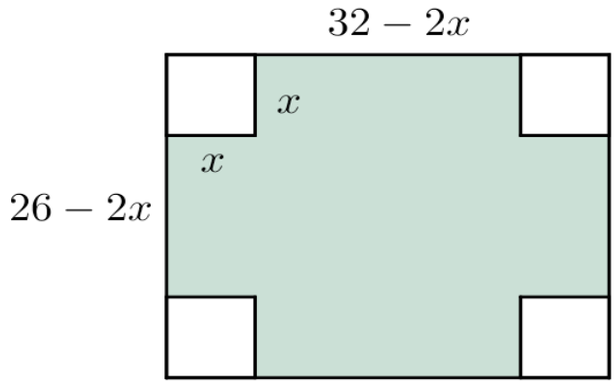

Kulkukaavion mukaan tölkin pinta-ala on pienin eli peltiä kuluu vähiten, kun säde $r = 5,4$ cm.

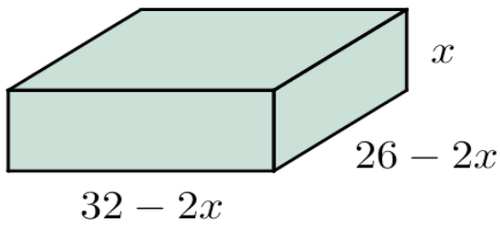
Tällöin tölkin korkeudeksi saadaan $h = \frac{1000}{\pi \cdot 5,4^2} = 10,91... \approx 11$ (cm).

**Vastaus**
tölkin pohjan säde 5,4 cm, korkeus 11 cm

## 335

Merkitään pois leikattavan neliön sivun pituutta kirjaimella $x$.




Tällöin laatikon pohjan sivujen pituuksiksi saadaan $32-2x$ ja $26-2x$ sekä laatikon korkeudeksi $x$.

Muodostetaan laatikon tilavuuden lauseke.

$$V=(32-2x)(26-2x)x=4x^3-116x^2+832x$$

Sivujen pituuksien on oltava positiivisia ja laatikon korkeuden on oltava vähintään 6,0 cm. Saadaan määrittelyehto.

$$x \geq 6 \quad \text{ja} \quad 26-2x>0 \quad \text{ja} \quad 32-2x>0$$
$$x<13 \qquad\qquad x<16$$

Kun hyväksytään mukaan tapaus $x=13$, saadaan määrittelyjoukoksi suljettu väli $[6, 13]$.

Laatikon tilavuutta kuvaa funktio $V(x) = 4x^3 - 116x^2 + 832x$, missä $x \in [6, 13]$.
Funktio $V$ saa suurimman arvonsa joko välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$V'(x) = 12x^2 - 232x + 832$

Lasketaan derivaatan nollakohta.

$12x^2 - 232x + 832 = 0$
$x \approx 4,8$ tai $x \approx 14,6$

Nollakohdat eivät kuulu määrittelyvälille. Lasketaan funktion $V$ arvo välin päätepisteissä.

$V(6) = 1680$ suurin
$V(13) = 0$

Laatikolle saadaan suurin tilavuus, kun $x = 6$ eli pois leikattavan neliön sivun pituus on 6,0 cm.

**Vastaus**
neliön sivun on 6,0 cm

## 336

Merkitään $4$ euron alennusten lukumäärää kirjaimella $x$.

Sukkaparin uudeksi hinnaksi saadaan $22-4x$.
Sukkaparilta tulee voittoa $22-4x-6=16-4x$.

Myytyjen parien määrä nousee $10x$, joten uusi myyntimäärä on $90+10x$.

Muodostetaan sukkien myyntivoittoa kuvaava funktio.

$$M(x)=(16-4x)(90+10x)=-40x^2-200x+1440$$

Tutkitaan funktion $M$ kulkua derivaattafunktion avulla.

$$M'(x)=-80x-200$$

Lasketaan derivaatan nollakohta.

$$-80x-200=0$$
$$x=-2,5$$

Funktion $M$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten se saa suurimman arvonsa paraabelin huipussa eli derivaatan nollakohdassa.
Myyntitulo on siis suurin, kun $x=-2,5$.

Sukkaparin hinta on $22-4\cdot(-2,5)=32$ (€).

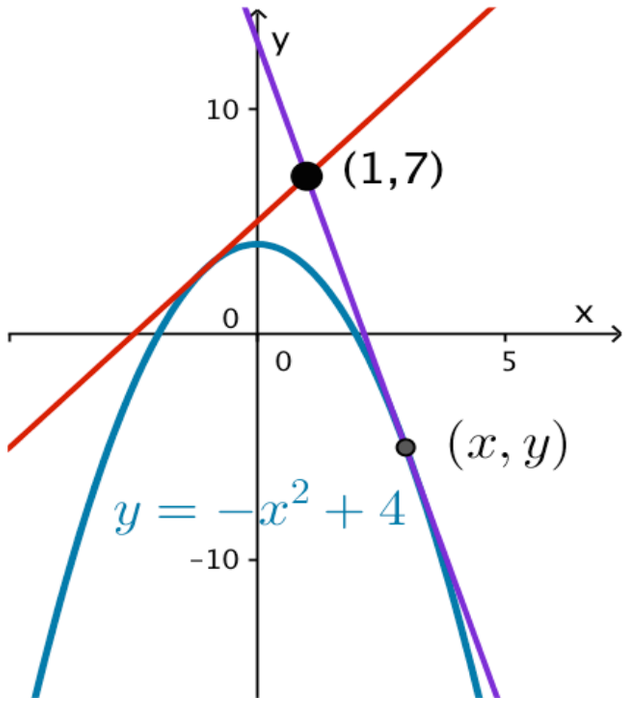
Voittoa saadaan $-40\cdot(-2,5)^2-200\cdot(-2,5)+1440=1690$ (€).

**Vastaus**
hinta 32 €/pari, voitto 1690€

## 337

Tutkitaan, onko piste $P = (1,\ 7)$ funktion $f(x) = -x^2 + 4$ kuvaajalla.
Kohdassa $x = 1$ kuvaajan pisteen $y$-koordinaatti on
$y = f(1) = -1^2 + 4 = 3$.

Koska $7 > 3$ on piste funktion $f$ kuvaajan yläpuolella. Funktion $f$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Pisteen $P$ kautta voidaan siis piirtää kuvaajalle kaksi tangenttia.




Tangentti sivuaa paraabelia pisteessä $(x,\ y)$ eli
pisteessä $(x, -x^2 + 4)$.
Muodostetaan tangentin kulmakerroin derivaatan avulla.

$k = f'(x) = -2x$

Toisaalta tangentin kulmakerroin voidaan muodostaa pisteiden $(x, -x^2+4)$ ja $(1,7)$ avulla.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-(-x^2+4)}{1-x} = \frac{x^2+3}{1-x}$$

Merkitään kulmakertoimen lausekkeet yhtä suuriksi.

$$-2x = \frac{x^2+3}{1-x}$$

$x = -1$ tai $x = 3$

Tangenttien kulmakertoimet ovat siis

$k_1 = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$ ja
$k_2 = f'(3) = -2 \cdot 3 = -6$.

Tangentit kulkevat pisteen $(1,7)$ kautta.
Muodostetaan tangenttien yhtälöt.

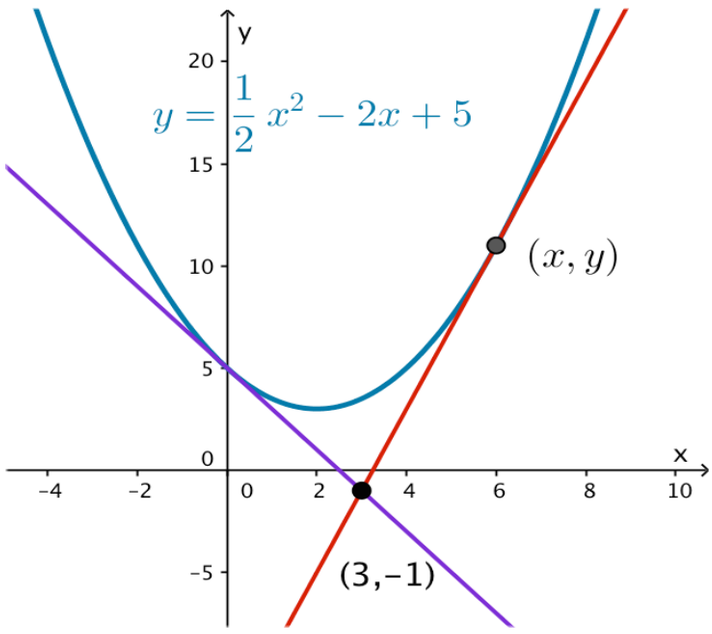
| $k = 2$: | $k = -6$: |
|---|---|
| $y - y_0 = k(x - x_0)$ | $y - y_0 = k(x - x_0)$ |
| $y - 7 = 2(x-1)$ | $y - 7 = -6(x-1)$ |
| $y - 7 = 2x - 2$ | $y - 7 = -6x + 6$ |
| $y = 2x + 5$ | $y = -6x + 13$ |

**Vastaus**
$y = 2x + 5$ ja $y = -6x + 13$

## 338

a) Tutkitaan, onko piste $(3,-1)$ funktion $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+5$ kuvaajalla. Kohdassa $x=3$ kuvaajan pisteen $y$-koordinaatti on $y=f(3)=\frac{1}{2}\cdot 3^2-2\cdot 3+5=3{,}5$.

Koska $-1<3{,}5$ on piste funktion $f$ kuvaajan alapuolella.
Funktion $f$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten pisteen $(3,-1)$ kautta voidaan piirtää kuvaajalle kaksi tangenttia.




Tangentti sivuaa paraabelia pisteessä $(x,y)$ eli pisteessä $(x,\frac{1}{2}x^2-2x+5)$.

Muodostetaan tangentin kulmakerroin derivaatan avulla.

$k=f'(x)=x-2$

Toisaalta tangentin kulmakerroin voidaan laskea pisteiden $(x, \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5)$ ja $(3, -1)$ avulla.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - (\frac{1}{2}x^2 - 2x + 5)}{3 - x} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 6}{3 - x}$$

Merkitään kulmakertoimien lausekkeet yhtä suuriksi.

$$x - 2 = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 6}{3 - x}$$

$x = 0$ tai $x = 6$

Kulmakertoimet ovat

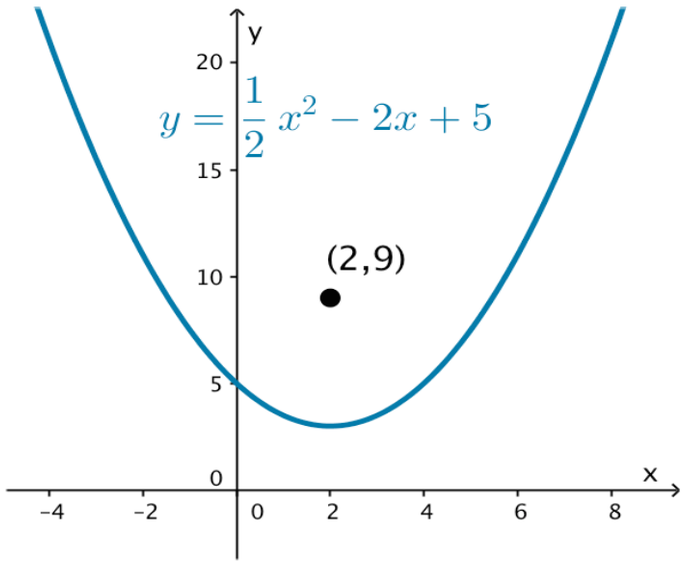
$k_1 = f'(0) = 0 - 2 = -2$ ja $k_2 = f'(6) = 6 - 2 = 4$.

Tangentit kulkevat pisteen $(3, -1)$ kautta.
Muodostetaan tangenttien yhtälöt.

| $k = -2$: | $k = 4$ |
|---|---|
| $y - y_0 = k(x - x_0)$ | $y - y_0 = k(x - x_0)$ |
| $y - (-1) = -2(x - 3)$ | $y - (-1) = 4(x - 3)$ |
| $y + 1 = -2x + 6$ | $y + 1 = 4x - 12$ |
| $y = -2x + 5$ | $y = 4x - 13$ |

b) Tutkitaan, onko piste $(2,9)$ funktion $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+5$ kuvaajalla. Kohdassa $x=2$ kuvaajan pisteen $y$-koordinaatti on $y=\frac{1}{2}\cdot 2^2-2\cdot 2+5=3$.

Koska $9>3$, niin piste $(2, 9)$ on kuvaajan yläpuolella.
Funktion $f$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten pisteen $(2, 9)$ kautta ei kulje yksikään kuvaajalle piirretyistä tangenteista.



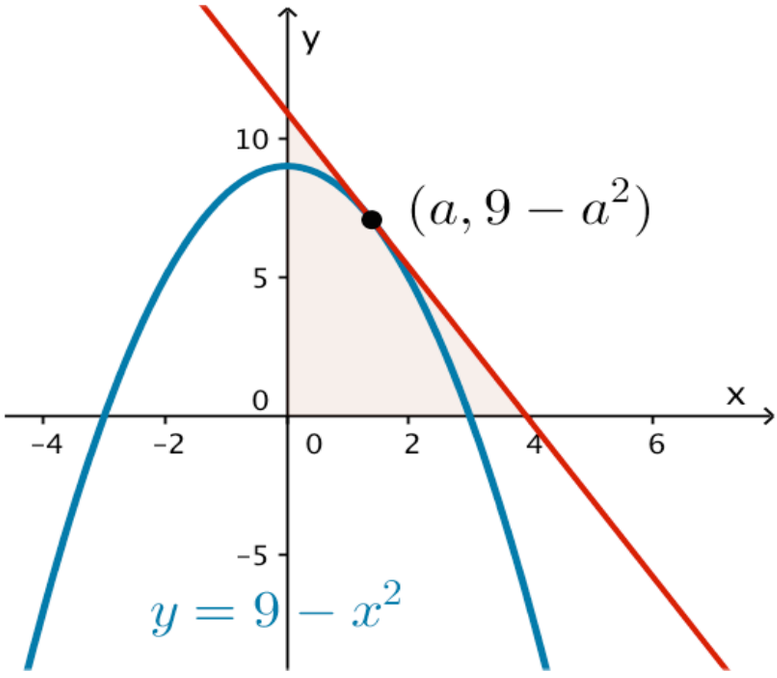

Pisteen $(2, 9)$ kautta ei voida piirtää tangenttia kuvaajalle.

**Vastaus**

a) $y=4x-13$ ja $y=-2x+5$

b) Mikään tangentti ei kulje annetun pisteen kautta.

**339**




Merkitään käyrän $y = 9 - x^2$ ja tangentin sivuamispistettä $(a, 9 - a^2)$.

Tangentin kulmakerroin $k$ on derivaatta kohdassa $x = a$.

$$y'(x) = -2x$$
$$k = y'(a) = -2a$$

Muodostetaan pisteeseen $(a, 9 - a^2)$ piirretyn tangentin yhtälö.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$
$$y - (9 - a^2) = -2a(x - a)$$
$$y - 9 + a^2 = -2ax + 2a^2$$
$$y = -2ax + a^2 + 9$$

Määritetään tangentin $y = -2ax + a^2 + 9$ ja koordinaattiakselien leikkauskohdat.

$y$-akselin leikkauskohdassa $x = 0$:

$$y = -2a \cdot 0 + a^2 + 9$$
$$y = a^2 + 9 \quad (> 0)$$

$x$-akselin leikkauskohdassa $y = 0$:

$$0 = -2ax + a^2 + 9$$
$$2ax = a^2 + 9$$
$$x = \frac{a^2 + 9}{2a}$$

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{(a^2 + 9) \cdot \left| \frac{a^2 + 9}{2a} \right|}{2} = \frac{(a^2 + 9) \cdot \frac{a^2 + 9}{2|a|}}{2} = \frac{(a^2 + 9)^2}{4|a|}, \text{ missä } a \neq 0$$

Kolmion pinta-alaa kuvaa funktio

$$A(a) = \frac{(a^2 + 9)^2}{4|a|}, \text{ missä } a \neq 0.$$

Tutkitaan derivaatan merkkien avulla, millä $a$:n arvolla funktio $A$ saa pienimmän arvonsa.

Tapaus $a > 0$:

$$A(a) = \frac{(a^2+9)^2}{4a}$$

$$A'(a) = \frac{3(a^2-3)(a^2+9)}{4a^2}$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\frac{3(a^2-3)(a^2+9)}{4a^2} = 0$$

$$a = -\sqrt{3} \quad \text{tai} \quad a = \sqrt{3}$$

Nollakohta $a = \sqrt{3}$ kelpaa.

Tapaus $a < 0$:

$$A(a) = \frac{(a^2+9)^2}{-4a}$$

$$A'(a) = -\frac{3(a^2-3)(a^2+9)}{4a^2}$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$-\frac{3(a^2-3)(a^2+9)}{4a^2} = 0$$

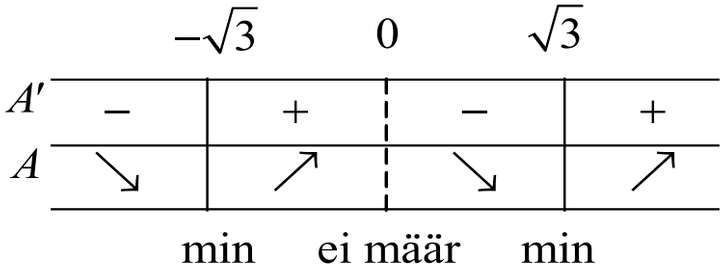
$$a = -\sqrt{3} \quad \text{tai} \quad a = \sqrt{3}$$

Nollakohta $a = -\sqrt{3}$ kelpaa.

Laaditaan funktion $A$ kulkukaavio. Derivaatta on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Se voi vaihtaa merkkiään ainoastaan nollakohdassa.

$A'(1) = -15 < 0$

$A'(2) = \frac{39}{16} > 0$




Kulkukaavion mukaan pinta-alafunktio $A$ saa pienimmän arvonsa kohdassa $a = \sqrt{3}$ tai kohdassa $a = -\sqrt{3}$.

Lasketaan minimarvot.

$y(\sqrt{3}) = 9 - (\sqrt{3})^2 = 6$

$y(-\sqrt{3}) = 9 - (-\sqrt{3})^2 = 6$

Kolmion pinta-ala on pienin, kun tangentti piirretään pisteeseen $(\sqrt{3}, 6)$ tai pisteeseen $(-\sqrt{3}, 6)$.

**Vastaus**

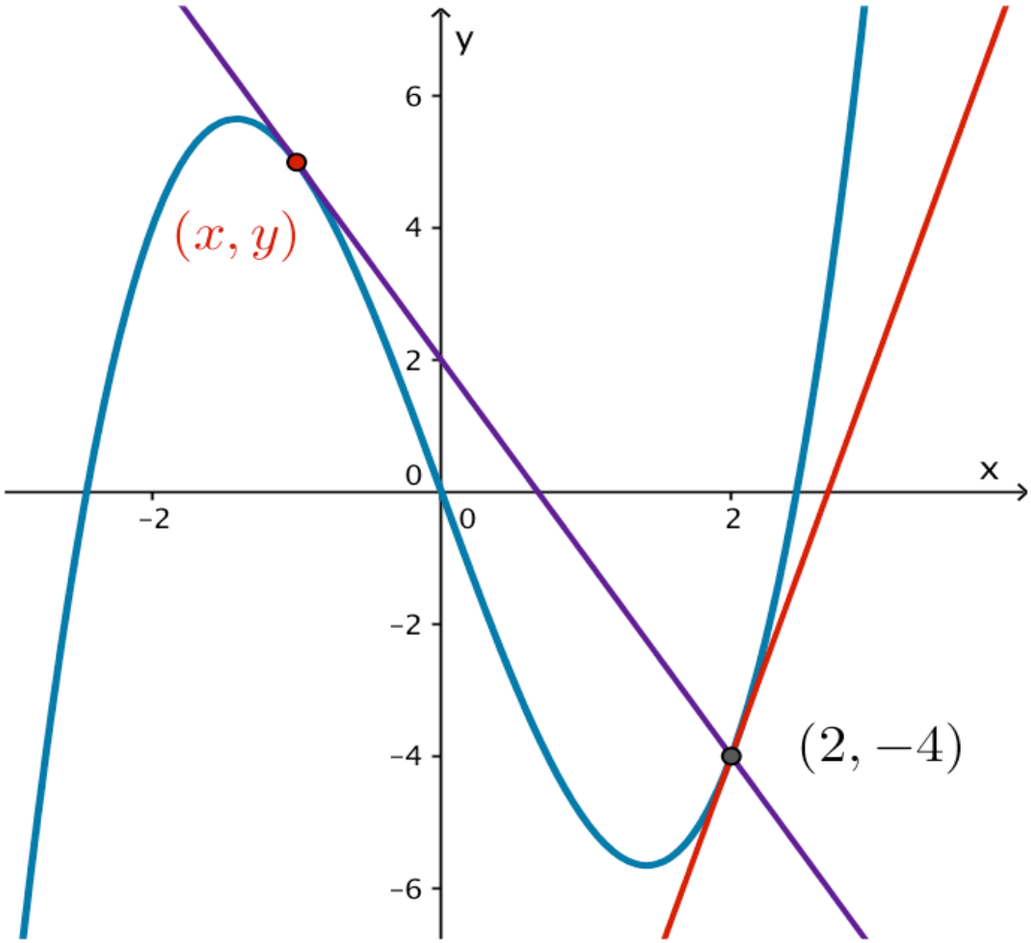
pisteisiin $(-\sqrt{3}, 6)$ ja $(\sqrt{3}, 6)$

## 340

Tutkitaan, onko piste $(2,-4)$ funktion $f(x)=x^3-6x$ kuvaajalla.

Kohdassa $x=2$ kuvaajan pisteen $y$-koordinaatti on $y=f(2)=2^3-6\cdot 2=-4$. Piste on kuvaajalla.

Kuvaajan avulla havaitaan, että pisteen $(2,-4)$ kautta voidaan piirtää kuvaajalle **ainakin kaksi** tangenttia.



Olkoon tangentin ja funktion kuvaajan sivuamispiste
$(x,\ y) = (x,\ x^3 - 6x)$.
Muodostetaan tangentin kulmakerroin derivaatan avulla.

$$k = f'(x) = 3x^2 - 6$$

Toisaalta kulmakerroin voidaan laskea pisteiden $(2,-4)$ ja $(x, x^3 - 6x)$ avulla.

$$k = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{(x^3 - 6x) - (-4)}{x - 2} = \frac{x^3 - 6x + 4}{x - 2}$$

Merkitään kulmakertoimen lausekkeet yhtä suuriksi.

$$3x^2 - 6 = \frac{x^3 - 6x + 4}{x - 2}$$

$x = -1$ tai $x = 2$

Tangentit ja kuvaaja sivuavat kohdissa $x = -1$ tai $x = 2$.

**1)** Lasketaan kulmakerroin, kun $x = 2$.

$$k = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 = 6$$

Muodostetaan tangentin yhtälö, kun $k = 6$ ja tangentti kulkee pisteen $(2, -4)$ kautta.

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k(x - x_0) \\ y - (-4) &= 6(x - 2) \\ y + 4 &= 6x - 12 \\ y &= 6x - 16 \end{aligned}$$

**2)** Lasketaan kulmakerroin, kun $x = -1$.

$$k = f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 6 = -3$$

Muodostetaan tangentin yhtälö, kun $k = -3$ ja tangentti kulkee pisteen $(2, -4)$ kautta.

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k(x - x_0) \\ y - (-4) &= -3(x - 2) \\ y + 4 &= -3x + 6 \\ y &= -3x + 2 \end{aligned}$$

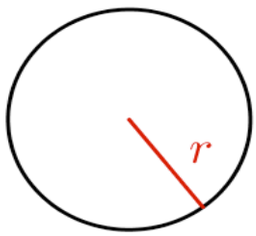
Tangenttien yhtälöt ovat $y = 6x - 16$ ja $y = -3x + 2$.

**Vastaus**

$y = 6x - 16$ ja $y = -3x + 2$

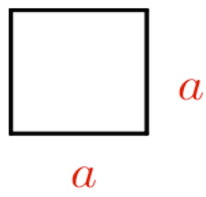
# 341

Jaetaan tanko kahteen osaan. Toisen osan pituus on $x$, jolloin toisen osan pituus on $6 - x$.




piiri

$x = 2\pi r$




piiri

$4a = 6 - x$

Taivutetaan $x$ pituisesta osasta ympyrä.

Tällöin ympyrän piirin pituus on $x$ ja säteeksi saadaan

$$x = 2\pi r$$

$$r = \frac{x}{2\pi}$$

Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$$A_{ympyrä} = \pi r^2 = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \pi \cdot \frac{x^2}{4\pi^2} = \frac{x^2}{4\pi}$$

Taivutetaan $6-x$ pituisesta osasta neliö.

Neliön piirin pituus on $6-x$, joten sivun pituudeksi saadaan $\frac{6-x}{4}$.

Lasketaan neliön pinta-ala.

$$A_{neliö} = \left(\frac{6-x}{4}\right)^2 = \frac{(6-x)^2}{16} = \frac{36-12x+x^2}{16}$$

Muodostetaan funktio, joka kuvaa kuvioiden yhteenlaskettua pinta-alaa.

$$A(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{36-12x+x^2}{16}, \text{ kun } 0 \le x \le 6$$

Määritetään funktion $A$ suurin ja pienin arvo välillä $[0,6]$.
Funktio $A$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai määrittelyvälille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

Derivoidaan.

$$A'(x) = \frac{x}{2\pi} + \frac{x-6}{8}$$

Määritetään derivaatan nollakohta

$$\frac{x}{2\pi} + \frac{x-6}{8} = 0$$

$$x = \frac{6\pi}{\pi+4} = 2,639... \approx 2,64$$

Lasketaan pinta-alafunktion arvo välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa.

$A(0) = 2,25$
$A(6) = 2,864... \approx 2,86$ suurin
$A(2,639...) = 1,260... \approx 1,26$ pienin

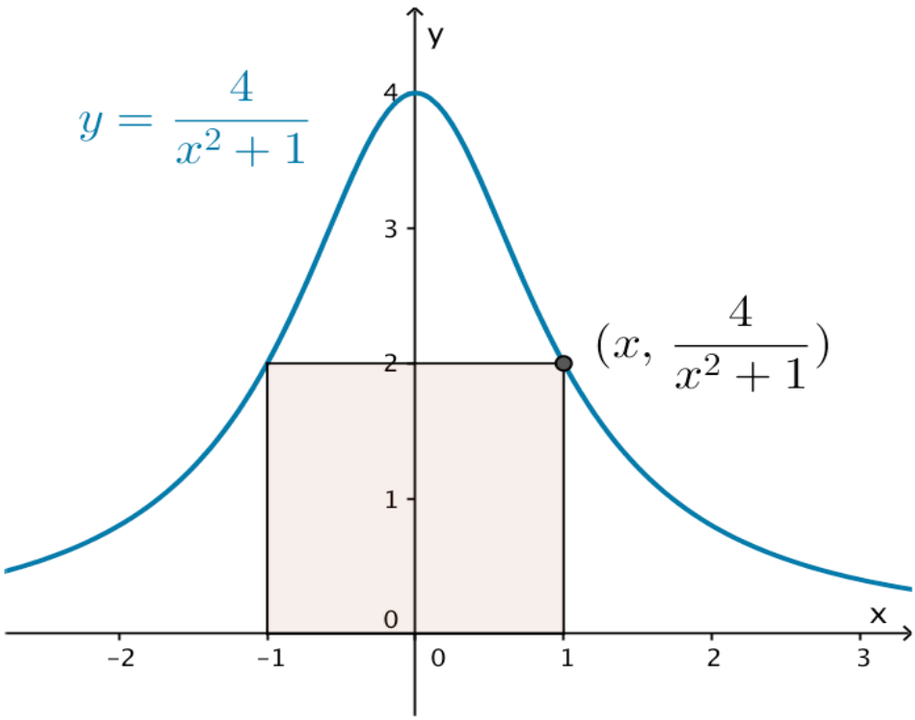
a) Yhteispinta-ala on pienin kun $x = 2,64$ eli ympyrään käytetään 2,64 metriä tankoa ja neliöön $6,0\ \text{m} - 2,64\ \text{m} = 3,36\ \text{m}$.

b) Yhteispinta-ala on suurin, kun $x = 6$ eli koko 6 metriä tankoa käytetään ympyrän tekoon.

**Vastaus**
a) 2,64 m pitkästä osasta ympyrä ja 3,36 m pitkästä osasta neliö
b) koko tangosta ympyrä

## 342

a)




Tarkastellaan tilannetta, kun $x > 0$.

Tällöin suorakulmion kärki on käyrän pisteessä $(x, \frac{4}{x^2+1})$.

Suorakulmion kannan pituus on $2x$ ja korkeus $\frac{4}{x^2+1}$.

Määritetään funktio, joka kuvaa suorakulmion pinta-alaa.

$$A(x) = 2x \cdot \frac{4}{x^2+1} = \frac{8x}{x^2+1}, \text{ kun } x > 0$$

Tutkitaan pinta-alafunktion $A$ kulkua derivaattafunktion merkkien avulla.

$$A'(x) = \frac{8x^2+8}{(x^2+1)^2}$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\frac{8x^2+8}{(x^2+1)^2}=0$$

$$x=-1 \quad \text{tai} \quad x=1$$

Nollakohdista $x=1$ toteuttaa määrittelyehdon.
Laaditaan funktiolle $A$ kulkukaavio. Derivaattafunktio on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Sen merkki voi vaihtua ainoastaan nollakohdassa.

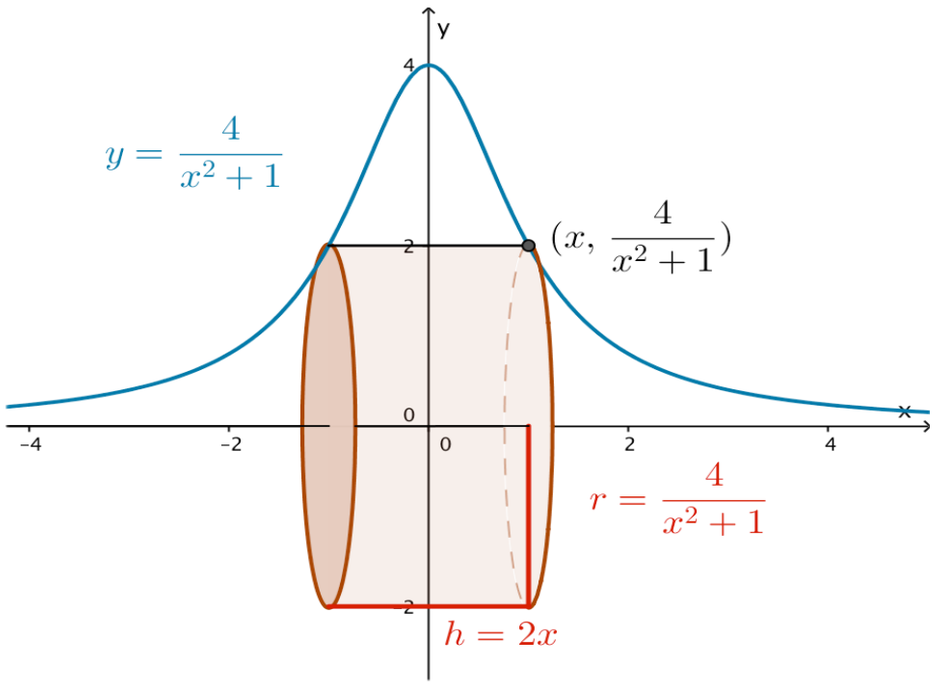
$$A'(0,5)=3,84>0$$
$$A'(2)=-0,96<0$$

| | 0 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|
| $A'$ | | + | | − |
| $A$ | | ↗ | | ↘ |
| | | | max | |

Pinta-ala saa suurimman arvonsa, kun $x=1$.
Lasketaan suurin pinta-ala.

$$A(1)=\frac{8\cdot 1}{1^2+1}=4$$

b) Käyrä pyörähtää $x$-akselin ympäri. Muodostuu ympyrälieriö, jonka säde on $r = \dfrac{4}{x^2+1}$ ja korkeus $h = 2x$, kun $x > 0$.




Muodostetaan funktio, joka kuvaa lieriön tilavuutta.

$$V(x) = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{4}{x^2+1}\right)^2 \cdot 2x = \frac{32\pi x}{(x^2+1)^2}, \text{ kun } x > 0$$

Tutkitaan tilavuusfunktion $V$ kulkua derivaattafunktion merkkien avulla.

$$V'(x) = \frac{-32\pi(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

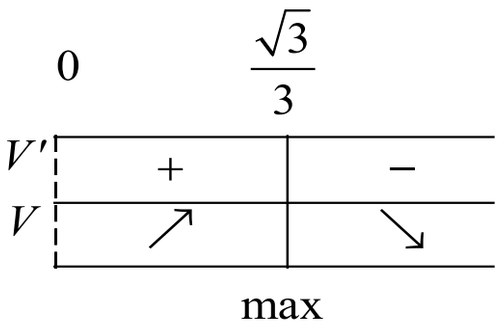
$$\frac{-32\pi(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}=0$$

$$x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{tai} \quad x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Nollakohdista $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $(=\frac{1}{\sqrt{3}})$ toteuttaa määrittelyehdon $x>0$.

Laaditaan funktiolle kulkukaavio. Derivaatta on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Sen merkki voi vaihtua ainoastaan nollakohdassa.

$$V'(0{,}1)=94{,}6...>0$$
$$V'(1)=-25{,}1...<0$$

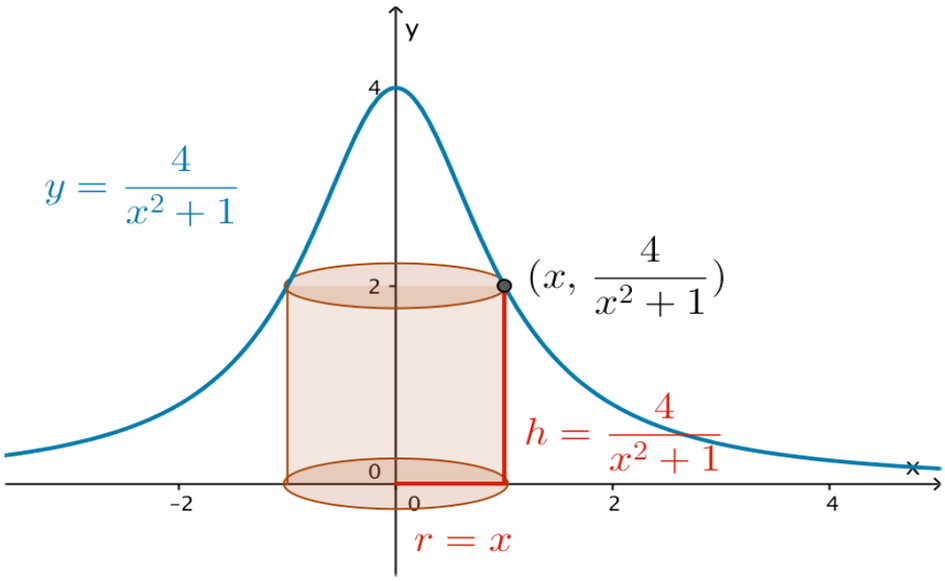



Tilavuus saa suurimman arvonsa, kun $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lasketaan suurin tilavuus.

$$V(\frac{\sqrt{3}}{3})=6\pi\sqrt{3}$$

c) Käyrä pyörähtää $y$-akselin ympäri. Muodostuu ympyrälieriö, jonka säde $r = x$ ja korkeus $h = \dfrac{4}{x^2+1}$, kun $x > 0$.




Muodostetaan funktio lieriön tilavuudelle.

$$V(x) = \pi r^2 h = \pi x^2 \cdot \frac{4}{x^2+1} = \frac{4\pi x^2}{x^2+1}, \text{ kun } x > 0$$

Tutkitaan tilavuusfunktion $V$ kulkua derivaattafunktion merkkien avulla.

$$V'(x) = \frac{8\pi x}{(x^2+1)^2}$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

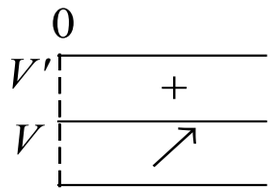
$$\frac{8\pi x}{(x^2+1)^2} = 0$$

$$x = 0$$

Nollakohta ei toteuta määrittelyehtoa $x > 0$.

Laaditaan funktiolle kulkukaavio. Derivaatta on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Sen merkki voi vaihtua ainoastaan nollakohdassa. Koska derivaattafunktiolla ei ole nollakohtia, sen merkki on sama kaikilla $x > 0$.

$V'(1) = 6,2... > 0$




Kulkukaavion perusteella tilavuusfunktiolla $V$ ei ole suurinta arvoa.

Muokataan tilavuusfunkion lauseketta.

$$V(x) = \frac{4\pi x^2}{x^2+1} = 4\pi \cdot \frac{x^2}{x^2+1} < 4\pi \text{, koska } \frac{x^2}{x^2+1} < 1 \text{ aina.}$$

Siis tilavuudella on ylärajana $4\pi$. Tätä ylärajaa tilavuus $V$ ei kuitenkaan koskaan saavuta.

**Vastaus**

a) suurin pinta-ala $4$

b) suurin tilavuus $6\sqrt{3}\,\pi$

c) ei suurinta tilavuutta, mutta tilavuudella on yläraja $4\pi$

# K1

a) Ratkaistaan nimittäjien nollakohdat.

$x-1=0$ ja $x=0$

$x=1$

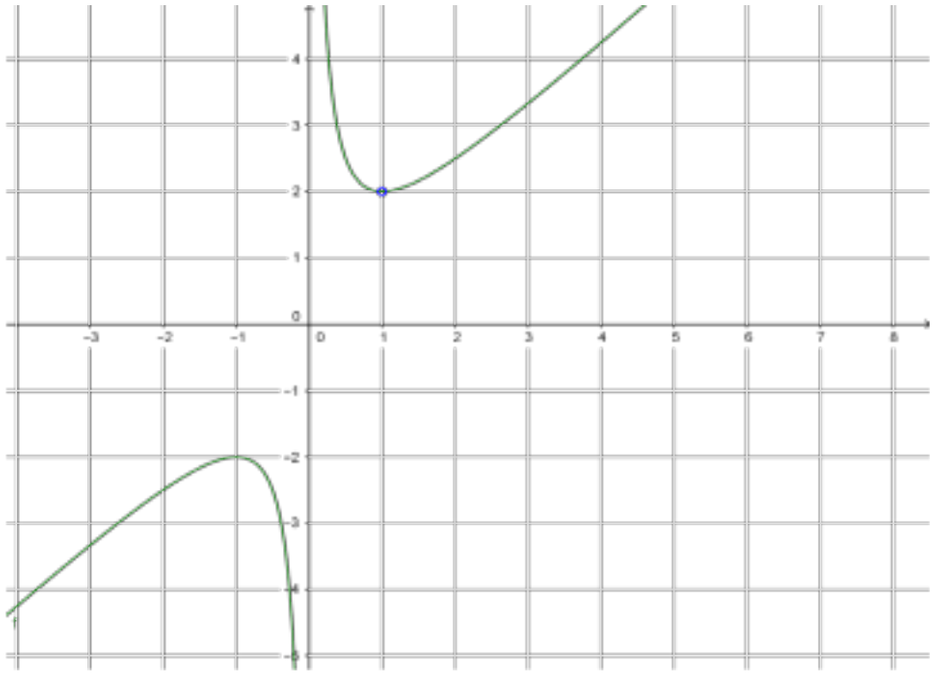
Funktion $f$ määrittelyehto on $x \neq 1$ ja $x \neq 0$.

Funktion $f$ määrittelyjoukko on $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$.

b) $f(-1)=\dfrac{(-1)^2-(-1)}{-1-1}+\dfrac{1}{-1}=\dfrac{2}{-2}-1=-1-1=-2$

$f(1)$ ei ole määritelty

c)



Vastaus a) $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$

b) $f(-1)=-2$, $f(1)$ ei määritelty

# K2

a) Nimittäjän nollakohta on $x = 0$.
Murtolausekkeen määrittelyehto on $x \neq 0$.

$$\frac{6x^2 - 15x}{3x} = \frac{3x(2x-5)}{3x} = 2x - 5$$

b) Lasketaan nimittäjän nollakohta.

$$\begin{aligned} 8x - 4 &= 0 \\ 8x &= 4 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Murtolausekkeen määrittelyehto on $x \neq \frac{1}{2}$.

$$\frac{10x - 5}{8x - 4} = \frac{5 \cdot (2x-1)}{4 \cdot (2x-1)} = \frac{5}{4}$$

c) Nimittäjän nollakohta on $x = 7$.
Murtolausekkeen määrittelyehto on $x \neq 7$.

$$\frac{x - 7}{7 - x} = \frac{x-7}{-(x-7)} = \frac{1}{-1} = -1$$

d) Nimittäjän nollakohta on $x = -7$.
Murtolausekkeen määrittelyehto on $x \neq -7$.

$$\frac{x^2 - 49}{7 + x} = \frac{(x-7)(x+7)}{x+7} = x - 7$$

Vastaus

a) $2x-5$, kun $x \neq 0$

b) $\frac{5}{4}$, kun $x \neq \frac{1}{2}$

c) $-1$, kun $x \neq 7$

d) $x-7$, kun $x \neq -7$

# K3

a) Ratkaistaan nimittäjien nollakohdat.

$$x+1=0 \qquad x^2+x=0$$
$$x=-1 \qquad x(x+1)=0$$
$$x=0 \text{ tai } x+1=0$$
$$x=0 \text{ tai } x=-1$$

Funktion $f$ määrittelyehto on $x \neq -1$ ja $x \neq 0$.

b) Sievennetään funktio lauseke.

$$f(x)=\frac{2}{x+1}-\frac{x}{x^2+x}=\frac{2x}{x^2+x}-\frac{x}{x^2+x}$$
$$=\frac{2x-x}{x^2+x}=\frac{x}{x(x+1)}=\frac{1}{x+1}$$

Lasketaan funktion arvo.

$$f(-\frac{2}{3})=\frac{1}{\frac{-2}{3}+1}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$$

Vastaus a) $x \neq -1$ ja $x \neq 0$

b) $f(x)=\frac{1}{x+1}$, $f(-\frac{2}{3})=3$

# K4

a) Selvitetään ensin funktion $f$ määrittelyehto.

Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$3x - 6 = 0$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$

Funktion $f$ määrittelyehto on $x \neq 2$ .

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohdat.

$$\frac{x^2 - 4}{3x - 6} = 0 \qquad | \cdot (3x - 6) \neq 0$$
$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x = 2 \text{ tai } x = -2$$

Ratkaisu $x = 2$ ei toteuta määrittelyehtoa $x \neq 2$ .

Funktion nollakohta on $x = -2$ .

b) Nimittäjän nollakohta on $x = 0$.
Funktion $f$ määrittelyehto on $x \neq 0$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohdat.

$$\frac{12x^2 - 4x}{5x} = 0 \qquad |\cdot 5x \neq 0$$

$$12x^2 - 4x = 0$$
$$4x(3x - 1) = 0$$

$4x = 0$ tai $3x - 1 = 0$
$x = 0$ $\qquad x = \frac{1}{3}$

Ratkaisu $x = 0$ ei toteuta määrittelyehtoa $x \neq 0$.

Funktion nollakohta on $x = \frac{1}{3}$.

Vastaus a) $x = -2$

b) $x = \frac{1}{3}$

# K5

a) Nimittäjien nollakohta on $x = 0$.

Yhtälön määrittelyehto on $x \neq 0$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x} = 5 \qquad |\cdot x^2 \neq 0$$

$$\frac{4x^2}{x^2} - \frac{x^2}{x} = 5x^2$$

$$4 - x = 5x^2$$

$$-5x^2 - x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 4}}{2 \cdot (-5)} = \frac{1 \pm 9}{-10}$$

$$x = \frac{1+9}{-10} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1-9}{-10} = \frac{-8}{-10} = \frac{4}{5}$$

Ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon.

b) Ratkaistaan nimittäjien nollakohdat.

$$2x-1=0 \qquad \text{ja} \qquad x+1=0$$
$$x=\frac{1}{2} \qquad\qquad x=-1$$

Yhtälön määrittelyehto on $x \neq \frac{1}{2}$ ja $x \neq -1$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{4}{2x-1}-\frac{1}{x+1}=1 \qquad |\cdot(x+1)(2x-1) \neq 0$$

$$\frac{4(x+1)(2x-1)}{2x-1}-\frac{(x+1)(2x-1)}{x+1}=(x+1)(2x-1)$$

$$4(x+1)-(2x-1)=(x+1)(2x-1)$$
$$4x+4-2x+1=2x^2+x-1$$
$$-2x^2+x+6=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-2)\cdot 6}}{2\cdot(-2)}=\frac{-1\pm 7}{-4}$$

$$x=\frac{-1+7}{-4}=\frac{6}{-4}=-\frac{3}{2} \quad \text{tai} \quad x=\frac{-1-7}{-4}=\frac{-8}{-4}=2$$

Ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon.

Vastaus a) $x = -1$ tai $x = \frac{4}{5}$

b) $x = -\frac{3}{2}$ tai $x = 2$

# K6

a) Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$3x - 6 = 0$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$

Määrittelyehto on $x \neq 2$.

Merkitään $f(x) = \frac{x}{3x-6}$ ja ratkaistaan funktion nollakohta.

$$\frac{x}{3x-6} = 0 \qquad |\cdot(3x-6) \neq 0$$
$$x = 0$$

Funktio voi vaihtaa merkkiään ainoastaan nollakohdassa $x = 0$ tai kohdassa $x = 2$, jossa funktio ei ole määritelty.

$$f(-1) = \frac{-1}{3\cdot(-1)-6} = \frac{1}{9} > 0$$
$$f(1) = \frac{1}{3\cdot 1-6} = \frac{1}{-3} < 0$$
$$f(3) = \frac{3}{3\cdot 3-6} = \frac{3}{3} > 0$$

Kirjataan merkit merkkikaavioon

| | | 0 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | + | | − | | + |

$f(x) \geq 0$, kun $x \leq 0$ tai $x > 2$.

b) Määrittelyehto on $x \neq 2$.

$$\frac{x}{3x-6} < 1$$

$$\frac{x}{3x-6} - 1 < 0$$

Merkitään $f(x) = \frac{x}{3x-6} - 1$ ja ratkaistaan funktion nollakohdat.

$$\frac{x}{3x-6} - 1 = 0 \qquad |\cdot(3x-6) \neq 0$$

$$\frac{x(3x-6)}{3x-6} - (3x-6) = 0$$

$$x - 3x + 6 = 0$$

$$-2x = -6$$

$$x = 3$$

Funktio voi vaihtaa merkkiään ainoastaan nollakohdassa $x = 3$ tai kohdassa $x = 2$, jossa funktio ei ole määritelty.

$$f(1) = \frac{1}{3 \cdot 1 - 6} - 1 = -\frac{4}{3} < 0$$

$$f(\tfrac{5}{2}) = \frac{\frac{5}{2}}{3 \cdot \frac{5}{2} - 6} - 1 = \frac{2}{3} > 0$$

$$f(4) = \frac{4}{3 \cdot 4 - 6} - 1 = -\frac{1}{3} < 0$$

Kirjataan merkit merkkikaavioon

| | | 2 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | − | | + | | − |

$f(x) < 0$, kun $x < 2$ tai $x > 3$.

Vastaus a) $x \leq 0$ tai $x > 2$

b) $x < 2$ tai $x > 3$

# K7

$$\frac{2x}{3} < \frac{1-3x}{x-2}$$

$$\frac{2x}{3} - \frac{1-3x}{x-2} < 0$$

Merkitään $f(x) = \frac{2x}{3} - \frac{1-3x}{x-2}$ ja selvitetään, millä muuttujan $x$ arvoilla $f(x) < 0$.

Nimittäjän $x-2$ nollakohta on $x = 2$.

Funktion määrittelyehto on $x \neq 2$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohta

$$\frac{2x}{3} - \frac{1-3x}{x-2} = 0 \qquad |\cdot 3(x-2) \quad \neq 0$$

$$\frac{2x \cdot 3(x-2)}{3} - \frac{3(1-3x)(x-2)}{x-2} = 0$$

$$2x(x-2) - 3(1-3x) = 0$$

$$2x^2 - x - 3 + 6x = 0$$

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$x = \frac{-5+7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-5-7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

Ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon.

Funktion $f$ arvot voivat vaihtaa merkkiään vain kohdissa $-3$, $\frac{1}{2}$ ja $2$. Lasketaan jokaiselta osaväliltä yksi funktion arvo.

$$f(x) = \frac{2x}{3} - \frac{1-3x}{x-2}$$

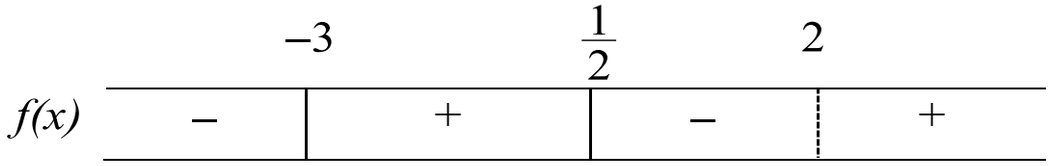
$$f(-4) = -\frac{1}{2} < 0$$

$$f(0) = \frac{1}{2} > 0$$

$$f(1) = -\frac{4}{3} < 0$$

$$f(3) = 10 > 0$$

Laaditaan merkkikaavio.




Epäyhtälö $\frac{2x}{3} - \frac{1-3x}{x-2} < 0$ toteutuu, kun $x < -3$ tai $\frac{1}{2} < x < 2$.

Vastaus $x < -3$ tai $\frac{1}{2} < x < 2$

# K8

$$\frac{x^3+x}{x^2-1} \le \frac{x}{x-1}$$

$$\frac{x^3+x}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} \le 0$$

Merkitään $f(x) = \frac{x^3+x}{x^2-1} - \frac{x}{x-1}$ ja selvitetään, millä muuttujan $x$ arvoilla $f(x) < 0$.

Nimittäjän $x-1$ nollakohta on $x = 1$,
ja nimittäjän $x^2-1$ nollakohdat ovat $x = -1$ ja $x = 1$.

Funktion määrittelyehto on $x \neq -1$ ja $x \neq 1$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohta.

$$\frac{x^3+x}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} = 0 \qquad |\cdot(x+1)(x-1) \quad \neq 0$$

$$\frac{(x^3+x)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{x(x+1)(x-1)}{x-1} = 0$$

$$x^3 + x - x(x+1) = 0$$

$$x^3 + x - x^2 - x = 0$$

$$x^3 - x^2 = 0$$

$$x^2(x-1) = 0$$

$$x^2 = 0 \quad \text{tai} \quad x-1 = 0$$

$$x = 0 \qquad\qquad x = 1$$

Ratkaisuista $x = 0$ toteuttaa määrittelyehdon.

Funktion *f* arvot voivat vaihtaa merkkiään vain kohdissa $-1$, $0$ ja $1$. Lasketaan jokaiselta osaväliltä yksi funktion arvo.

$$f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} - \frac{x}{x - 1}$$

$$f(-2) = -4 < 0$$

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} > 0$$

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{6} > 0$$

$$f(2) = \frac{4}{3} > 0$$

Laaditaan merkkikaavio.

| | $-1$ | | $0$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | $-$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |

Epäyhtälö $\frac{x^3 + x}{x^2 - 1} - \frac{x}{x - 1} \le 0$ toteutuu, kun $x < -1$ tai $x = 0$.

Vastaus $x < -1$ tai $x = 0$

# K9

Lasketaan nimittäjän nollakohta.

$$4x^2 + 11x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4} = \frac{-11 \pm 13}{8}$$

$$x = \frac{-11+13}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-11-13}{8} = \frac{-24}{8} = -3$$

Funktion määrittelyehto on $x \neq \frac{1}{4}$ ja $x \neq -3$.

Määrittelyjoukko on $\mathrm{R} \setminus \{-3, \frac{1}{4}\}$.

Supistetaan lauseke.

$$f(x) = \frac{x^3 + 6x^2 + 9x}{4x^2 + 11x - 3} = \frac{x(x^2 + 6x + 9)}{4(x+3)(x-\frac{1}{4})} = \frac{x(x+3)(x+3)}{4(x+3)(x-\frac{1}{4})}$$

$$= \frac{x(x+3)}{4(x-\frac{1}{4})} = \frac{x^2 + 3x}{4x - 1}$$

Vastaus määrittelyehto $\mathrm{R} \setminus \{-3, \frac{1}{4}\}$, $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{4x - 1}$

# K10

Olkoon osallistujien lukumäärä $x$.

Ilmoittautuneiden määrä oli $x-5$.

Siten muuttuja $x > 5$.

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{702}{x-5} - 15 = \frac{702}{x}$$

Voidaan ratkaista laskimella.

$x = -13$ tai $x = 18$

Luku $x = 18$ toteuttaa määrittelyehdon $x > 5$.

Matkalle osallistui 18 henkilöä.

Matkan hinnaksi tuli $\frac{702€}{18} = 39€$

Vastaus osallistujia 18, hinta 39€

# K11

Lasketaan nimittäjän nollakohta.

$$5x - 35 = 0$$
$$x = 7$$

Funktion määrittelyehto on $x \neq 7$ ja määrittelyjoukko $\mathrm{R} \setminus \{7\}$.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 12x + c}{5x - 35} = \frac{2x^2 - 12x + c}{5(x - 7)}$$

Lauseketta voidaan supistaa vain, kun $x - 7$ on osoittajan tekijä.

Tällöin osoittajan toinen nollakohta on oltava $x = 7$.

$$2 \cdot 7^2 - 12 \cdot 7 + c = 0$$
$$c = -14$$

Ratkaistaan osoittajan nollakohdat.

$$2x^2 - 12x - 14 = 0$$
$x = 7$ tai $x = -1$

Supistetaan lauseke.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 12x - 14}{5(x - 7)} = \frac{2(x - 7)(x + 1)}{5(x - 7)} = \frac{2x + 2}{5}$$

Vastaus $\mathrm{R} \setminus \{7\}$, $c = -14$, $f(x) = \frac{2x + 2}{5}$

# K12

Tarkastellaan murtolauseketta $\frac{x^3 - ax^2}{(x+b)^2} = \frac{x^2(x-a)}{(x+b)^2}$.

Murtolauseke on määritelty, kun $x \neq -b$.

Koska nimittäjä $(x+b)^2 > 0$ kaikilla $x \neq -b$, niin osoittajan merkki määrää murtolausekkeen merkin.

Tutkitaan osoittajan $x^2(x-a)$ merkkiä.

Tekijä $x^2 \geq 0$ kaikilla $x$.

Tekijä $x - a \leq 0$ vain, kun $x \leq a$.

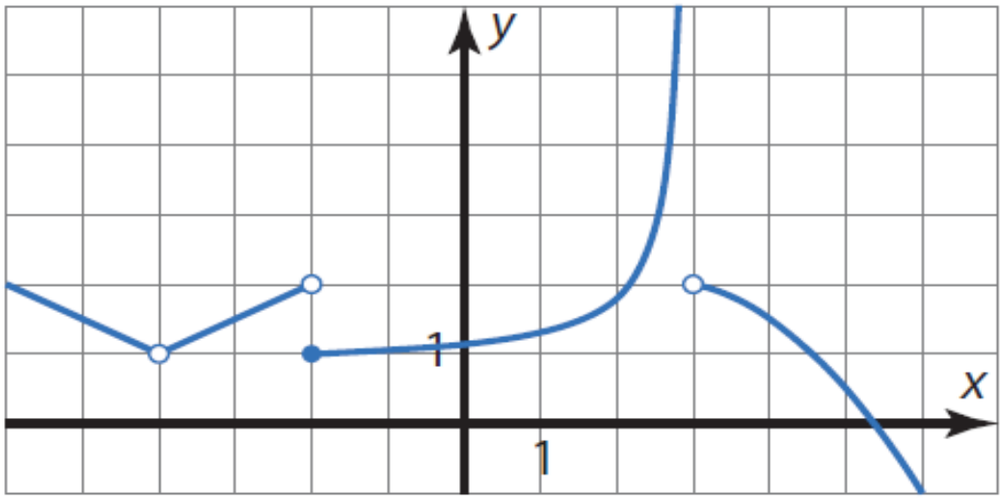
Näin ollen $\frac{x^2(x-a)}{(x+b)^2} \leq 0$, kun $x \neq -b$ ja $x \leq a$.

Verrataan tätä ehtoon $x < -4$ tai $-4 \leq x \leq 3$.

Siis on oltava $b = 4$ ja $a = 3$.

Vastaus $a = 3$ ja $b = 4$

# K13




a) Kohdassa $-4$ ei ole kuvaajan pistettä, joten arvoa $f(-4)$ ei olemassa.

Kohdassa $-2$ kuvaajan pisteen y-koordinaatti on 1, joten $f(-2)=1$.

Kohdassa $3$ ei ole kuvaajan pistettä, joten arvoa $f(3)$ ei olemassa.

b) Kun $x$ lähestyy kohtaa $-4$ kummalta puolelta tahansa, funktion arvot lähestyvät lukua 1. On siis $\lim\limits_{x\to -4} f(x)=1$.

Kun $x$ lähestyy kohtaa $-2$ vasemmalta, funktion arvot lähestyvät lukua 2. Kun $x$ lähestyy kohtaa $-2$ oikealta, funktion arvot lähestyvät lukua 1. Raja-arvoa $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ ei ole olemassa.

Kun x lähestyy kohtaa 3 vasemmalta, funktion arvot eivät lähesty mitään reaalilukua. Raja-arvoa $\lim_{x \to 3} f(x)$ ei tällöin ole olemassa.

Vastaus

a) $f(-4)$ ei ole olemassa, $f(-2) = 1$, $f(3)$ ei ole olemassa

b) $\lim_{x \to -4} f(x) = 1$, $\lim_{x \to -2} f(x)$ ei olemassa, $\lim_{x \to 3} f(x)$ ei olemassa

# K14

a) Taulukoidaan funktion $f(x)=\dfrac{5x^2-23x-10}{x^2-4x-5}$ arvoja kohdan $5$ molemmilla puolilla.

| $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 5,1 | 4,50819… | 4,9 | 4,49152… |
| 5,01 | 4,50083… | 4,99 | 4,49916… |
| 5,001 | 4,50008… | 4,999 | 4,49991… |
| 5,0001 | 4,50000… | 4,9999 | 4,49999… |

Funktion arvot näyttävät lähestyvän lukua 4,5, kun muuttujan arvot lähestyvät lukua 5. Taulukon tietojen perusteella $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=4{,}5$.

b) Taulukoidaan funktion arvoja kohdan $-1$ molemmilla puolilla.

| $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| −1,1 | 35 | −0,9 | −25 |
| −1,01 | 305 | −0,99 | −295 |
| −1,001 | 3005 | −0,999 | −2995 |

Funktion arvot eivät näytä lähestyvän mitään tiettyä lukua, kun muuttujan arvot lähestyvä kohtaa $-1$. Funktiolla ei siis ole raja-arvoa kohdassa $-1$.

Vastaus a) 4,5
b) ei ole olemassa

# K15

a) Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x\to -1}(x^2+x) = (-1)^2 + (-1) = 0$$
$$\lim_{x\to -1}(3x+3) = 3\cdot(-1)+3 = 0$$

Lauseketta voidaan sieventää.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{3x+3} = \lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{3(x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{x}{3} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

b) Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}(6x^3-3x^2) = 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$$
$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}(2x-1) = 2\cdot\frac{1}{2} - 1 = 0$$

Lauseketta voidaan sieventää.

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{6x^3-3x^2}{2x-1} = \lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{3x^2(2x-1)}{2x-1} = \lim_{x\to \frac{1}{2}}3x^2 = 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Vastaus a) $-\frac{1}{3}$

b) $\frac{3}{4}$

# K16

a) Funktion $f(x)=\begin{cases}2x+6, \text{ kun } x<-1\\ x^2+3x+6, \text{ kun } -1\le x<2\\ 8-3x, \text{ kun } x>2\end{cases}$ lauseke vaihtuu kohdassa $-1$.

Määritetään vasemmanpuoleinen raja-arvo.

$$\lim_{x\to -1-}\left(2x+6\right)=2\cdot(-1)+6=4$$

Määritetään oikeanpuoleinen raja-arvo.

$$\lim_{x\to -1+}(x^2+3x+6)=(-1)^2+3\cdot(-1)+6=4$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret, on funktiolla raja-arvo $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=4$.

b) Funktion lauseke vaihtuu kohdassa 2.

Määritetään vasemmanpuoleinen raja-arvo.

$$\lim_{x\to 2-}(x^2+3x+6)=2^2+3\cdot 2+6=16$$

Määritetään oikeanpuoleinen raja-arvo.

$$\lim_{x\to 2+}(8-3x)=8-3\cdot 2=2$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat eri suuret, funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa 2.

Vastaus a) 4
b) ei ole olemassa

# K17

a) Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 - 1, \text{ kun } x < 2 \\ 0, \text{ kun } x = 2 \\ x^2 - 4x + 4, \text{ kun } x > 2 \end{cases}$ arvo kohdassa 2 on

$f(2) = 0$. Funktio on jatkuva kohdassa 2, jos sen raja-arvo kohdassa 2 on 0.

Koska funktion lauseke vaihtuu kohdassa 2, pitää laskea toispuoliset raja-arvot.

$$\lim_{x \to 2-} (\frac{1}{4}x^2 - 1) = \frac{1}{4} \cdot 2^2 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \to 2+} (x^2 - 4x + 4) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 0$$

Funktion toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret kuin funktion arvo, joten funktiolla on raja-arvo kohdassa 2. Funktio $f$ on siis jatkuva kohdassa 2.

b) Funktio $f(x) = \begin{cases} -2x + 20, \text{ kun } x \neq 2 \\ 16, \text{ kun } x = 2 \end{cases}$

Koska $f(2) = 16$, niin jotta funktio on jatkuva, on myös sen raja-arvon kohdassa $2$ oltava 16.

Lasketaan funktion raja-arvo.

$$\lim_{x \to 2}(-2x + 20) = -2 \cdot 2 + 20 = 16$$

Koska $f(2) = \lim_{x \to 2} f(x)$, funktio on jatkuva.

Vastaus a) on
b) on

# K18

Funktio $g(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2}{2x - 8}$ on jatkuva kohdassa 4, jos $\lim\limits_{x \to 4} g(x) = g(4)$. Määritetään funktion $g$ raja-arvo kohdassa 4.

Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x \to 4} (x^3 - 4x^2) = 4^3 - 4 \cdot 4^2 = 0$$

$$\lim_{x \to 4} (2x - 8) = 2 \cdot 4 - 8 = 0$$

Koska osoittajan ja nimittäjän raja-arvo on 0, lauseke voidaan sieventää.

$$\lim_{x \to -4} \frac{3x^2 + 12x}{x + 4} = \lim_{x \to 4} \frac{x^3 - 4x^2}{2x - 8} = \lim_{x \to 4} \frac{x^2(x - 4)}{2(x - 4)} = \lim_{x \to 4} \frac{x^2}{2} = \frac{4^2}{2} = 8$$

Funktio on jatkuva kohdassa 4, kun määritetään $g(4) = 8$.

Vastaus $g(4) = 8$

# K19

Funktio $f(x)=\begin{cases}2x-4, \text{ kun } x\le 3\\ -x+a, \text{ kun } x>3\end{cases}$ on jatkuva kohdassa 3, jos $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$. Määritetään toispuoliset raja-arvot ja funktion arvo kohdassa 3.

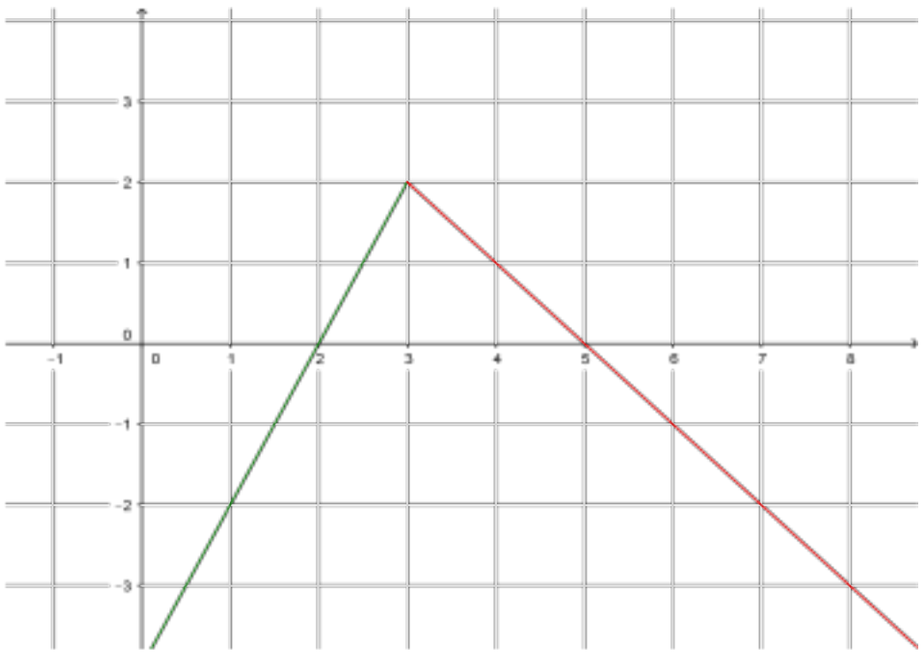
$$\lim_{x\to 3-}(2x-4)=2\cdot 3-4=2$$

$$\lim_{x\to 3+}(-x+a)=-3+a$$

$$f(3)=2\cdot 3-4=2$$

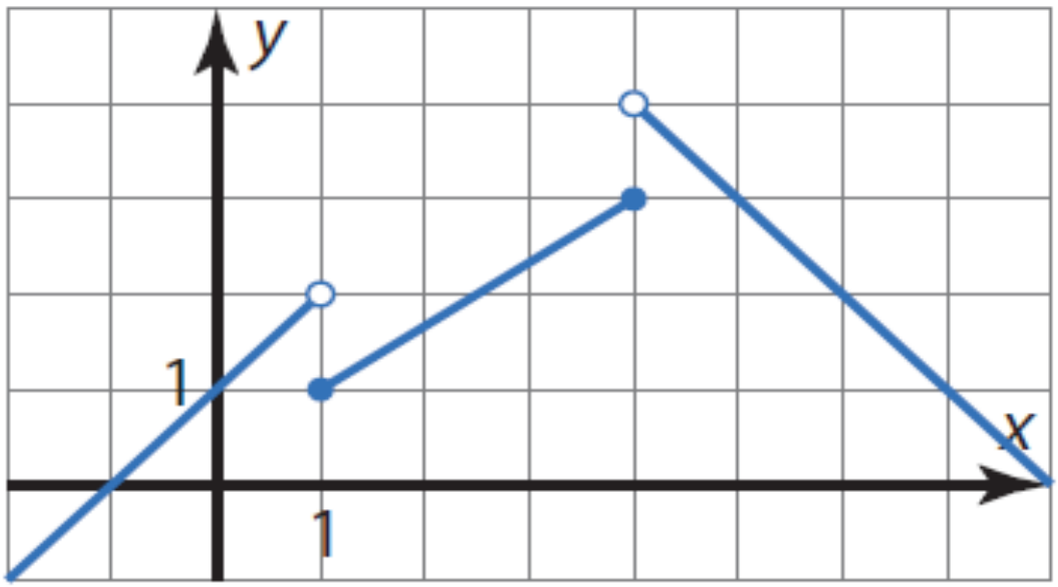
Funktio on jatkuva, jos kaikki nämä arvot ovat yhtä suuria. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$-3+a=2$$
$$a=5$$



Vastaus $a = 5$

# K20




a) Funktio on toispuolisesti jatkuva molemmissa päätepisteissä ja jatkuva muissa välin pisteissä. Funktio on siis jatkuva välillä $[1, 4]$.

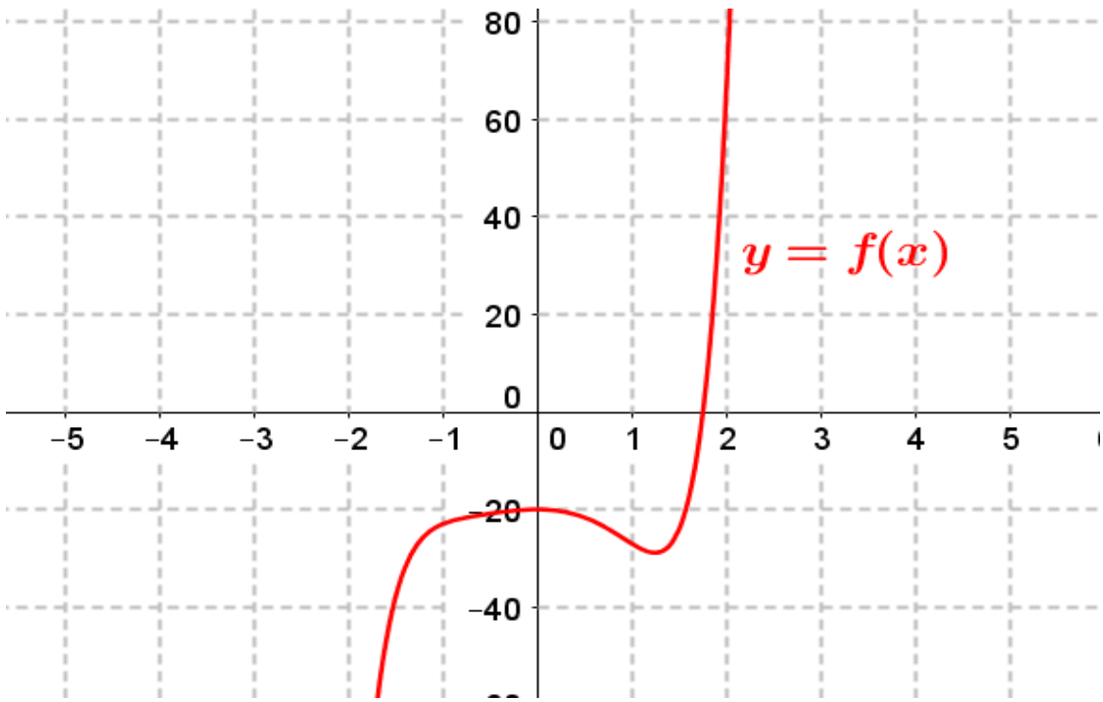
b) Kohdassa $4$ on $f(4) = 3$ ja $\lim\limits_{x \to 4+} f(x) = 4$. Funktio ei siis ole oikealta jatkuva kohdassa $4$ eikä myöskään jatkuva välillä $[4, 6]$.

c) Funktio on vasemmalta jatkuva päätepisteessä $6$ ja jatkuva muissa välin pisteissä, joten funktio on jatkuva välillä $]4, 6]$.

Vastaus
a) on b) ei ole c) on

# K21

Funktio $f(x) = x^7 - 3x^3 - 5x^2 - 20$ on polynomifunktio, joten se on jatkuva kaikkialla. Piirretään kuva.



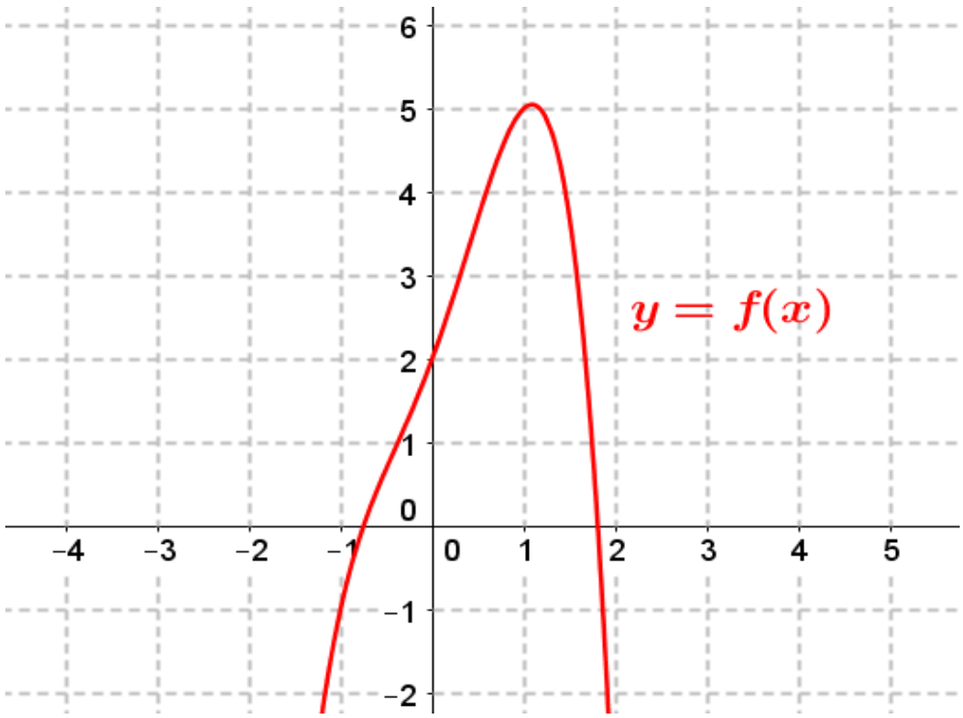

Kuvaajan perusteella funktiolla on nollakohta välillä $[1, 2]$. Lasketaan funktion arvo välin $[1,2]$ päätepisteissä ja sovelletaan Bolzanon lausetta.

$$f(1) = 1^7 - 3 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 - 20 = -27 < 0$$
$$f(2) = 2^7 - 3 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 - 20 = 64 > 0$$

Funktion arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, joten voidaan soveltaa Bolzanon lausetta. Funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]1,2[$.

# K22

Yhtälö $x^2 = x^4 - 3x - 2$ sievenee muotoon $-x^4 + x^2 + 3x + 2 = 0$.
Tutkitaan funktiota $f(x) = -x^4 + x^2 + 3x + 2$, joka on polynomi ja jatkuva kaikkialla.
Funktion $f$ nollakohdat ovat samat, kuin alkuperäisen yhtälön ratkaisut. Piirretään funktion kuvaaja.




Kuvaajan perusteella funktiolla on nollakohta välillä $[0, 2]$.
Varmistetaan tämä Bolzanon lauseen avulla.

Koska $f(0) = 2$ ja $f(2) = -4$, niin Bolzanon lauseen nojalla funktiolla $f$ on nollakohta välillä $]0, 2[$. Tämä nollakohta on samalla alkuperäisen yhtälön ratkaisu.

# K23

Funktio $f(x) = x^9 - 5x - 2$ on polynomifunktio ja siten kaikkialla jatkuva. Bolzanon lausetta voidaan soveltaa funktioon.

$$f(-1) = (-1)^9 - 5 \cdot (-1) - 2 = 2 > 0$$
$$f(0) = 0^9 - 5 \cdot 0 - 2 = -2 < 0$$
$$f(2) = 2^9 - 5 \cdot 2 - 2 = 500 > 0$$

Koska funktion arvot välin $[-1, 0]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]-1, 0[$.

Koska funktion arvot välin $[0, 2]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]0, 2[$.

Koska väleillä $]-1, 0[$ ja $]0, 2[$ ei ole yhteisiä lukuja, ovat nämä nollakohdat eri suuret.

Funktiolla on siis ainakin kaksi nollakohtaa välillä $[-3, 3]$.

# K24

a) Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x\to 3}(x^2-6x+9)=3^2-6\cdot 3+9=0$$
$$\lim_{x\to 3}(2x^2-18)=2\cdot 3^2-18=0$$

Lauseketta voidaan sieventää.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{2x^2-18}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^2}{2(x^2-9)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^2}{2(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{2(x+3)}$$
$$=\frac{3-3}{2(3+3)}=\frac{0}{12}=0$$

b) Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x\to-\frac{1}{4}}(32x^2-2)=32\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2-2=0$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{4}}(16x^2+8x+1)=16\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2+8\cdot(-\frac{1}{4})+1=0$$

Lauseketta voidaan sieventää.

$$\lim_{x\to-\frac{1}{4}}\frac{32x^2-2}{16x^2+8x+1}=\lim_{x\to-\frac{1}{4}}\frac{2(16x^2-1)}{(4x+1)^2}=\lim_{x\to-\frac{1}{4}}\frac{2(4x-1)(4x+1)}{(4x+1)^2}$$

$$=\lim_{x\to-\frac{1}{4}}\frac{2(4x-1)}{(4x+1)}=\frac{2(4(-\frac{1}{4})-1)}{(4(-\frac{1}{4})+1)}=\frac{-4}{0}$$

Koska nimittäjän raja-arvo on nolla, mutta osoittajan raja-arvo on erisuuri kuin nolla, niin $\lim_{x\to-\frac{1}{4}}\frac{32x^2-2}{16x^2+8x+1}$ ei ole olemassa.

Vastaus a) 0
b) ei ole olemassa

# K25

a) Sievennetään lauseke

$$\frac{3x}{x-2}-\frac{12x}{x^2-4}=\frac{3x(x+2)}{(x-2)(x+2)}-\frac{12x}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{3x^2+6x-12x}{(x-2)(x+2)}=\frac{3x^2-6x}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{3x(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{3x}{x+2}$$

Lasketaan raja-arvo.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x}{x-2}-\frac{12x}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{3x}{x+2}=\frac{3\cdot 2}{2+2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

b) Sievennetään lauseke

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{x}{x-1}\right)\left(\frac{1}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}\right)=\left(\frac{x}{x-1}\right)\left(\frac{1-x^2}{x^3}\right)$$

$$=\frac{x(1-x^2)}{x^3(x-1)}=\frac{-x(x^2-1)}{x^3(x-1)}$$

$$=\frac{-x(x-1)(x+1)}{x^3(x-1)}=\frac{-(x+1)}{x^2}$$

Lasketaan raja-arvo.

$$\lim_{x\to 1}\left(\left(\frac{x}{x-1}\right)\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+1)}{x^2}=\frac{-(1+1)}{1^2}=\frac{-2}{1}=-2$$

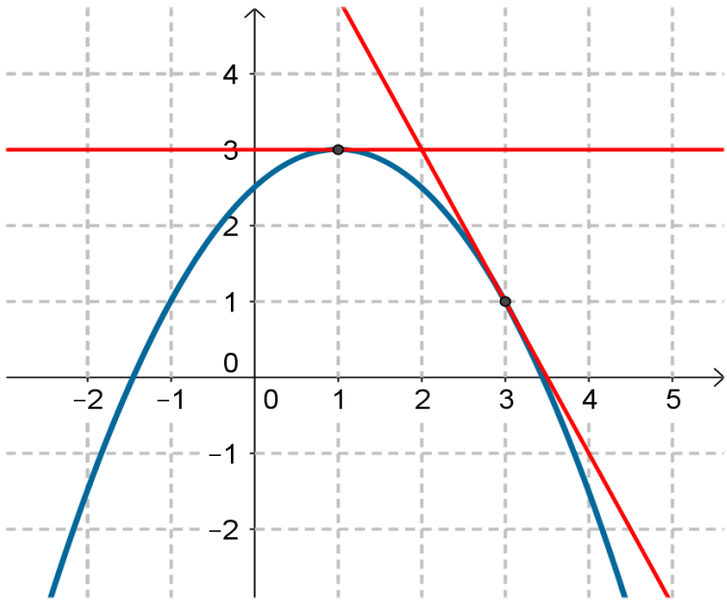
Vastaus a) $\frac{3}{2}$ b) 2

# K26

a) Kohdassa 1 kuvaajan $y$-koordinaatti on 3, joten $f(1) = 3$.

Kohdassa 3 kuvaajan $y$-koordinaatti on 1, joten $f(3) = 1$.

b) Piirretään funktion kuvaajalle tangentit kohtiin 1 ja 3.




Kohtaan 1 piirretty tangentti on vaakasuora, joten sen kulmakerroin on 0 ja $f'(1) = 0$.

Kohtaan 3 piirretyn tangentin kulmakerroin on
$k = \frac{-1-3}{4-2} = \frac{-4}{2} = -2$, joten $f'(3) = -2$.

Vastaus
a) $f(1) = 3$ ja $f(3) = 1$
b) $f'(1) = 0$ ja $f'(3) = -2$

# K27

a) Lasketaan funktion $f(x) = 3x^2$ erotusosamäärän raja-arvo kohdassa 2.

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{3(2+h)^2 - 3 \cdot 2^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{3(4 + 4h + h^2) - 12}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{12 + 12h + 3h^2 - 12}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{12h + 3h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(12 + 3h)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (12 + 3h) = 12 + 3 \cdot 0 \\
&= 12
\end{aligned}
$$

b) Lasketaan funktion $g(x) = -\frac{3}{x}$ erotusosamäärän raja-arvo kohdassa 2.

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{3}{2+h} - (-\frac{3}{2})}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-^{2)}\frac{3}{2+h} + ^{2+h)}\frac{3}{2}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{6}{2(2+h)} + \frac{3(2+h)}{2(2+h)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-6+6+3h}{2(2+h)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3h}{2(2+h)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{3}{2(2+h)} = \frac{3}{2(2+0)} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Vastaus a) 12 b) $\frac{3}{4}$

# K28

a) Lasketaan funktion $f(x) = 3x^2 + x$ erotusosamäärän raja-arvo kohdassa $x$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(3(x+h)^2 + (x+h)) - (3x^2 + x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{3(x^2 + 2xh + h^2) + x + h - 3x^2 - x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 + h - 3x^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{6xh + 3h^2 + h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(6x + 3h + 1)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (6x + 3h + 1) \\
&= 6x + 3 \cdot 0 + 1 \\
&= 6x + 1
\end{aligned}
$$

b) Lasketaan funktion $g(x) = \frac{7}{x}$ erotusosamäärän raja-arvo kohdassa $x$.

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{7}{x+h} - \frac{7}{x}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\overset{x)}{\frac{7}{x+h}} - \overset{x+h)}{\frac{7}{x}}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{7x}{x(x+h)} - \frac{7(x+h)}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{7x - 7x - 7h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-7h}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-7}{x(x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-7}{x^2 + xh} \\
&= \frac{-7}{x^2 + x \cdot 0} \\
&= \frac{-7}{x^2}
\end{aligned}
$$

Vastaus a) $6x + 1$ b) $-\frac{7}{x^2}$

# K29

a) Määritetään funktion $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + x$ derivaattafunktio.

$$f'(x) = 2 \cdot 4x^{4-1} - 3 \cdot 2x^{2-1} + 1 = 8x^3 - 6x + 1$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa 2.

$$f'(2) = 8 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 + 1 = 53$$

b) Määritetään funktion $g(x) = \frac{3x^4}{2} - 5x^3 - 145$ derivaattafunktio.

$$g'(x) = \frac{3}{2} \cdot 4x^{4-1} - 5 \cdot 3x^{3-1} - 0 = 6x^3 - 15x^2$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa 2.

$$g'(2) = 6 \cdot 2^3 - 15 \cdot 2^2 = -12$$

Vastaus a) 53 b) $-12$

# K30

Suoran $y = x + 5$ kulmakerroin on 1. Jotta funktion $f(x) = x^3 - 2x + 1$ kuvaajalle piirretty tangentti olisi annetun suoran kanssa yhdensuuntaisia, on myös tangentin kulmakertoimen oltava 1.

Funktion $f$ kuvaajalle kohtaan $x$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $k = f'(x) = 3x^2 - 2$.

Ratkaistaan missä kohdissa $x$ tangentin kulmakerroin saa arvon 1.

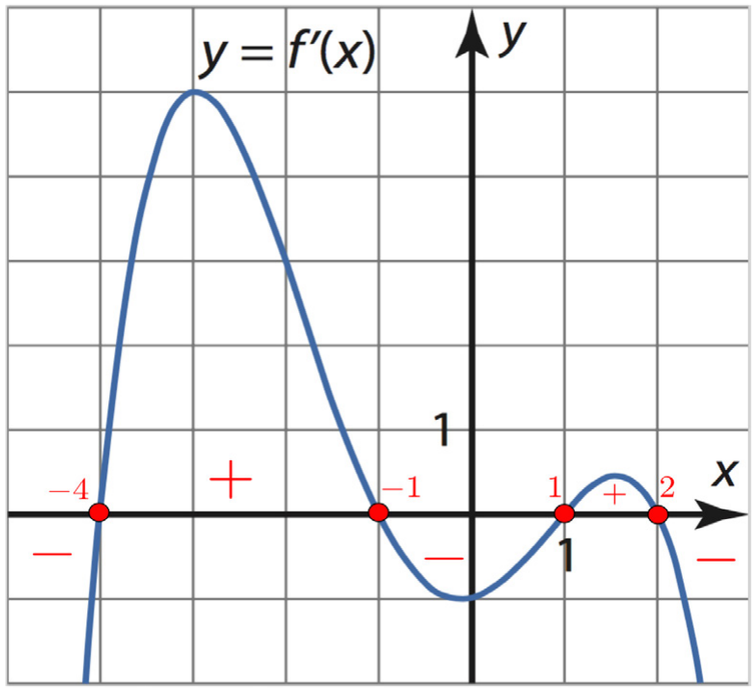
$$\begin{aligned} k &= 1 \\ 3x^2 - 2 &= 1 \\ 3x^2 &= 3 \\ x^2 &= 1 \\ x &= 1 \quad \text{tai} \quad x = -1 \end{aligned}$$

Tangentin kulmakerroin on 1, kohdissa $x = -1$ ja $x = 1$.

On siis osoitettu, että funktion $f$ kuvaajalla on kaksi pistettä, joihin piirretty tangentti on suoran $y = x + 5$ suuntainen. □

# K31

Derivaattafunktion nollakohdat ovat $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ ja $x = 2$. Laaditaan derivaattafunktion kuvaajan avulla funktion $f$ kulkukaavio.




| | $-4$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | ↘ |
| | min | | max | | min | | max | |

a) maksimikohdat $x = -1$ ja $x = 2$,
minimikohdat $x = -4$ ja $x = 1$

b) Funktio $f$ on aidosti kasvava välillä $-4 \le x \le -1$, joten $f(-3) < f(-2)$. Siis $f(-2)$ on suurempi.

# K32

Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 5x - 2$ kulku päätellään derivaattafunktion $f'$ merkeistä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = x^2 + 6x + 5$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 4}{2}$$

$$x = \frac{-6 + 4}{2} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-6 - 4}{2} = -5$$

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Derivaattafunktio $f'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

| $x$ | $f'(x)$ | merkki |
|---|---|---|
| –10 | 45 | + |
| –3 | –4 | – |
| 0 | 5 | + |

| | | –5 | | –1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | | – | + |
| $f(x)$ | | ↗ | | ↘ | ↗ |
| | | | max | | min |

a) Kulkukaavion perusteella funktio $f$ on kasvava välillä $x \le -5$ ja välillä $x \ge -1$.

Funktio $f$ on vähenevä välillä $-5 \le x \le -1$.

b) Kulkukaavion perusteella funktion maksimikohta on $x = -5$ ja maksimiarvo

$$f(-5) = \frac{1}{3} \cdot (-5)^3 + 3 \cdot (-5) + 5 \cdot (-5) - 2 = \frac{19}{3}.$$

Minimikohta on $x = -1$ minimiarvo

$$f(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1) + 5 \cdot (-1) - 2 = -\frac{13}{3}.$$

Vastaus a) kasvava välillä $x \le -5$ ja välillä $x \ge -1$,
vähenevä välillä $-5 \le x \le -1$

b) maksimikohta $x = -5$, maksimiarvo $\frac{19}{3}$,
minimikohta $x = -1$, minimiarvo $-\frac{13}{3}$

# K33

Polynomifunktio $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$ saavuttaa välillä $[2, 6]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välille $]2, 6[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$3x^2 - 12x - 15 = 0 \quad \big| : 3$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^3 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$$x = \frac{4+6}{2} = 5 \quad \text{tai} \quad x = \frac{4-6}{2} = -1$$

Derivaattafunktion nollakohdista välillä $[2, 6]$ on vain $x = 5$.

Lasketaan funktion $f$ arvot välin päätepisteissä sekä välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 - 15 \cdot 2 + 2 = -44 \quad \text{suurin}$$

$$f(6) = 6^3 - 6 \cdot 6^2 - 15 \cdot 6 + 2 = -88$$

$$f(5) = 5^3 - 6 \cdot 5^2 - 15 \cdot 5 + 2 = -98 \quad \text{pienin}$$

Lasketuista arvoista suurin on $f(2) = -44$ ja pienin $f(5) = -98$.

Vastaus suurin arvo $f(2) = -44$ ja pienin arvo $f(5) = -98$

# K34

a) Määritetään käyrän $y = x^4 - 2x^3 - x$ se piste, johon tangentti piirretään.

Kun $x = 2$, niin $y = 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 2 = -2$.

Tangentti piirretään pisteeseen $(2, -2)$.

Tangentin kulmakerroin on $k = y'(2)$. Derivoidaan käyrä $y$ ja lasketaan kulmakerroin.

$$y'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 1$$
$$k = y'(2) = 4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 - 1 = 7$$

Tangentti kulkee pisteen $(2, -2)$ kautta ja sen kulmakerroin on 7. Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y - (-2) = 7(x - 2)$$
$$y + 2 = 7x - 14$$
$$y = 7x - 16$$

b) Normaali on kohtisuorassa tangenttia vastaan, joten sen kulmakerroin voidaan ratkaista kohtisuoruusehdosta.

$$k_{\mathrm{t}} \cdot k_{\mathrm{n}} = -1$$
$$7 \cdot k_{\mathrm{n}} = -1$$
$$k_{\mathrm{n}} = -\frac{1}{7}$$

Normaali kulkee pisteen $(2, -2)$ kautta ja sen kulmakerroin on $-\frac{1}{7}$. Muodostetaan normaalin yhtälö.

$$y - (-2) = -\frac{1}{7}(x - 2)$$
$$y + 2 = -\frac{1}{7}x + \frac{2}{7}$$
$$y = -\frac{1}{7}x - \frac{12}{7}$$

Vastaus a) $y = 7x - 16$

b) $y = -\frac{1}{7}x - \frac{12}{7}$

# K35

Funktion kuvaajan ja $x$-akselin leikkauskulma saadaan leikkauspisteeseen piirretyn tangentin suuntakulman avulla.

Määritetään funktion $f(x) = x^7 - 1$ kuvaajan ja $x$-akselin leikkauskohta eli funktion $f$ nollakohta.

$$f(x) = 0$$
$$x^7 - 1 = 0$$
$$x = 1$$

Tangentin kulmakerroin $k = f'(1)$ kohdassa $x = 1$. Derivoidaan funktio $f$ ja lasketaan kulmakerroin.

$$f'(x) = 7x^6$$
$$k = f'(1) = 7 \cdot 1^6 = 7$$

Lasketaan tangentin suuntakulma.

$$\tan\alpha = 7$$
$$\alpha = \tan^{-1} 7 = 81{,}86...° \approx 82°$$

Koska leikkauspisteeseen piirretyn tangentin suuntakulma on 82º, niin funktion kuvaaja leikkaa $x$-akselin 82º kulmassa.

Vastaus 82°

# K36

Merkitään $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x$ ja määritetään funktion $f$ suurin ja pienin arvo välillä $[-3, 3]$.

Polynomifunktio $f$ saavuttaa välillä $[-3, 3]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välille $]-3, 3[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 3x^2 - 6x - 24$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$3x^2 - 6x - 24 = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = -2$ tai $x = 4$

Derivaattafunktion nollakohdista välillä $]-3, 3[$ on vain $x = -2$.

Lasketaan funktion $f$ arvot välin päätepisteissä sekä välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$f(-3) = (-3)^3 - 3 \cdot (-3)^2 - 24 \cdot (-3) = 18$

$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 = -72$ pienin

$f(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 24 \cdot (-2) = 28$ suurin

Lasketuista arvoista suurin on $28$ ja pienin $-72$.

Täten kaikilla välillä $[-3, 3]$ olevilla muuttujan $x$ arvoilla pätee $-72 \le f(x) \le 28$.

On siis osoitettu, että kaikilla välillä $[-3, 3]$ olevilla muuttujan arvoilla on $-75 \le x^3 - 3x^2 - 24x \le 28$. □

# K37

Funktion $f(x) = x^5 + 4x^3$ kulku päätellään derivaattafunktion $f'$ merkeistä

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 5x^4 + 12x^2$.

Koska $x^4 \geq 0$ kaikilla $x$ ja $x^2 \geq 0$ kaikilla $x$, niin $f'(x) = 5x^4 + 12x^2 \geq 0$ kaikilla $x$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$
$$5x^4 + 12x^2 = 0$$
$$x^2(5x^2 + 12) = 0$$
$$x^2 = 0 \quad \text{tai} \quad 5x^2 + 12 = 0$$
$$x = 0 \qquad\qquad x^2 = -\frac{12}{5}$$
$$\text{epätosi}$$

On siis osoitettu, että $f'(x) \geq 0$ kaikilla $x$ ja $f'(x) = 0$ vain, kun $x = 0$. Funktio $f$ on täten kaikkialla aidosti kasvava. □

# K38

Muokataan yhtälö muotoon, jossa oikealla puolella on vain luku 0.

$$2x^5 = 10 - 4x^3$$
$$2x^5 + 4x^3 - 10 = 0$$

Yhtälön $2x^5 + 4x^3 - 10 = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = 2x^5 + 4x^3 - 10$ nollakohdat. Pitää siis osoittaa, että funktiolla $f$ on täsmälleen yksi nollakohta.

**1)** Perustellaan ensin, että funktiolla $f$ on ainakin yksi nollakohta.

Funktio $f$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Koska funktion arvot $f(0) = -10$ ja $f(2) = 86$ ovat erimerkkiset, niin funktiolla $f$ on ainakin yksi nollakohta välillä ]0, 2[.

**2)** Perustellaan seuraavaksi, että funktiolla $f$ on korkeintaan yksi nollakohta.

Tutkitaan funktion $f$ kulkua sen derivaattafunktion $f'(x) = 10x^4 + 12x^2$ avulla. Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$10x^4 + 12x^2 = 0$$
$$x = 0$$

Derivaattafunktio $f'(x) = 10x^4 + 12x^2$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Se voi vaihtaa merkkiään ainoastaan nollakohdissa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(-1) = 10 \cdot (-1)^4 + 12 \cdot (-1)^2 = 22 > 0$$
$$f'(1) = 10 \cdot 1^4 + 12 \cdot 1^2 = 22 > 0$$

Siis $f'(x) \geq 0$ kaikilla $x$, ja $f'(x) = 0$ vain, kun $x = 0$. Funktio $f$ on täten aidosti kasvava ja saa kaikki arvonsa täsmälleen yhden kerran. Siten funktiolla $f$ voi olla korkeintaan yksi nollakohta.

On siis osoitettu, että funktiolla $f$ on ainakin yksi nollakohta ja korkeintaan yksi nollakohta. Funktiolla $f$ on siis täsmälleen yksi nollakohta ja yhtälöllä $2x^5 = 10 - 4x^3$ täsmälleen yksi ratkaisu. □

# K39

Funktio $f(x) = x^2 - 2x + 5$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Funktio $f$ saavuttaa kaikki arvot suurimman ja pienimmän arvonsa välillä.

Määritetään funktion $f$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 2]$.
Funktio $f$ saavuttaa välillä $[-1, 2]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välille $]-1, 2[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 2x - 2$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$2x - 2 = 0$$
$$x = 1$$

Lasketaan funktion $f$ arvot välin päätepisteissä sekä välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$f(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 5 = 8$ suurin
$f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 5 = 5$
$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 5 = 4$ pienin

Välillä $[-1, 2]$ funktion suurin arvo on $8$ ja pienin $4$.

Jatkuva funktio $f$ saa kaikki arvot välillä $[4, 8]$.

Vastaus Funktio arvojoukko on $[4, 8]$.

# K40

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + a$ kulku päätellään derivaattafunktion $f'$ merkeistä.

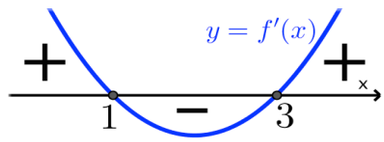
Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

Derivaattafunktio $f'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$3x^2 - 12x + 9 = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = 1$ tai $x = 3$

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat ovat $x = 1$ ja $x = 3$.




| | | 1 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | | − | | + |
| $f(x)$ | ↗ | | ↘ | | ↗ |
| | | max | | min | |

Funktion $f$ maksimikohta on $x = 1$. Siis $f(1) = 5$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakion $a$ arvo.

$$\begin{aligned} f(1) &= 5 \\ 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + a &= 5 \\ 4 + a &= 5 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

Funktion $f$ minimikohta on $x = 3$ ja minimiarvo

$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 1 = 1$.

Vastaus $a = 1$, minimiarvo 1

# K41

Jos $k = 0$, käyrät ovat samat $(y = 0)$. Tällöin niille piirretyt tangentit eivät voi koskaan olla kohtisuorassa toisiaan vastaan. Oletetaan siis, että $k \neq 0$.

Käyrien $y_1 = kx^2$ ja $y_2 = k(x-2)^2 = kx^2 - 4kx + 4k$ leikkauspisteisiin piirretyt tangentit leikkaavat kohtisuorasti kun niiden kulmakertoimien tulo on $-1$. Sivuamispisteessä käyrien derivaattojen tulon on siis oltava $-1$.

$$\begin{aligned} y_1'(x) \cdot y_2'(x) &= -1 \\ 2kx \cdot (2kx - 4k) &= -1 \\ 4k^2x^2 - 8k^2x &= -1 \end{aligned}$$

Koska leikkauskohdassa käyrillä on yhteinen piste, niin niiden $y$-koordinaatit ovat leikkauskohdassa yhtä suuret.

$$\begin{aligned} y_1 &= y_2 \\ kx^2 &= kx^2 - 4kx + 4k \\ 4kx - 4k &= 0 \quad \big| : 4k \ (\neq 0) \\ x - 1 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Käyrät leikkaavat siis kohdassa $x = 1$.

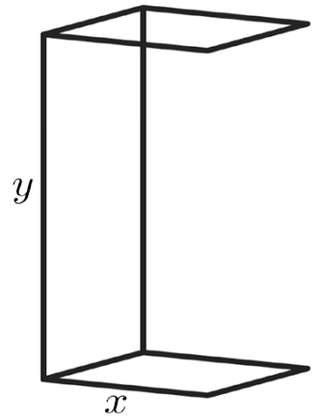
Sijoitetaan saatu arvo $x = 1$ yhtälöön $4k^2x^2 - 8k^2x = -1$ ja ratkaistaan parametrin $k$ arvo.

$$\begin{aligned}
4k^2x^2 - 8k^2x &= -1 \\
4 \cdot k^2 \cdot 1^2 - 8 \cdot k^2 \cdot 1 &= -1 \\
-4k^2 &= -1 \\
k^2 &= \frac{1}{4} \\
k &= \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad k = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Vastaus $k = -\frac{1}{2}$ tai $k = \frac{1}{2}$

# K42

Merkitään varjostimen pohjaneliön sivun pituutta senttimetreinä kirjaimella $x$ ja varjostimen korkeutta senttimetreinä kirjaimella $y$.




Rautalankaa on käytettävissä 200 cm eli särmien pituuksien summan pitää olla 200. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan lauseke muuttujalle $y$.

$$8 \cdot x + 2 \cdot y = 200$$
$$2y = 200 - 8x$$
$$y = 100 - 4x$$

Muodostetaan varjostimen tilavuuden lauseke.

$$V = x^2 \cdot y = x^2(100 - 4x) = 100x^2 - 4x^3$$

Reunojen pituuksien on oltava positiivisia. Muodostetaan tämän perusteella epäyhtälöt, joista voidaan päätellä funktion $V$ määrittelyehto.

$$x > 0 \quad \text{ja} \quad y > 0$$
$$100 - 4x > 0$$
$$x < 25$$

Hyväksymällä mukaan tapaukset, joissa $x = 0$ ja $x = 25$, saadaan funktion $f$ määrittelyjoukoksi suljettu väli $[0, 25]$.

Varjostimen tilavuus muuttujan $x$ funktiona on

$V(x) = 100x^2 - 4x^3$, kun $0 \le x \le 25$.

Polynomifunktio $V$ saavuttaa välillä $[0, 25]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välille $]0, 25[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Funktion $V$ derivaattafunktio on $V'(x) = 200x - 12x^2$.

Lasketaan derivaattafunktion nollakohdat.

$200x - 12x^2 = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = 0$ tai $x = \frac{50}{3}$

Derivaattafunktion molemmat nollakohdat kuuluvat välille $]0, 25[$.

Lasketaan funktion $V$ arvot välin päätepisteissä ja välille kuuluvissa derivaattafunktion nollakohdissa.

$V(0) = 0$

$V(25) = 0$

$V(\frac{50}{3}) = 9259{,}26...$ suurin

Varjostimen tilavuus on suurin, kun $x = \frac{50}{3} = 16,666... \approx 16,7$ (cm).

Tällöin varjostimen korkeus on
$y = 100 - 4x = 100 - 4 \cdot \frac{50}{3} = \frac{100}{3} = 33,333... \approx 33,3$ (cm).

Varjostimen pohjaneliön sivun pituuden tulee olla 16,7 cm ja korkeuden 33,3 cm.

Vastaus pohjasärmä 16,7 cm ja korkeus 33,3 cm

# K43

On selvitettävä, mikä on se kahvikupin hinta, jolla viikon aikana saataisiin kassaan mahdollisimman suuri rahamäärä.

Merkitään $0{,}05$ euron korotusten lukumäärää $x$.

Jos hintaa korotetaan $x \cdot 0{,}05€ = 0{,}05x$ €, niin uusi myyntihinta on $0{,}80 + 0{,}05x$ (€/kuppi).

Tällöin myytyjen kupillisten määrä laskee $25x$ kappaletta, joten uusi viikkomyyntimäärä on $500 - 25x$ (kupillista).

Myyntitulo saadaan kertomalla kappalehinta myyntimäärällä.

Viikon myyntitulon ilmaisee funktio

$$M(x) = (0{,}80 + 0{,}05x)(500 - 25x) = -1{,}25x^2 + 5x + 400.$$

Funktion $M$ kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä.

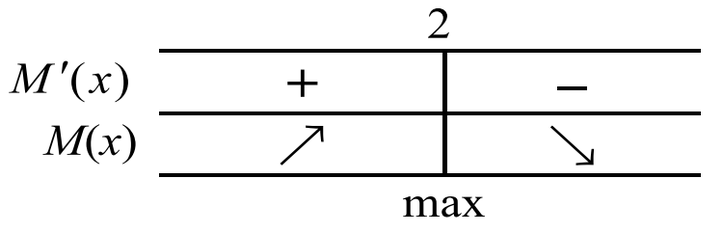
Funktion $M$ derivaattafunktio on $M'(x) = -2{,}5x + 5$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$-2{,}5x + 5 = 0$$
$$x = 2$$

Laaditaan funktion $M$ kulkukaavio. Derivaattafunktio $M'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

| $x$ | $f'(x)$ | merkki |
|---|---|---|
| 0 | 5 | + |
| 4 | –5 | – |




Kulkukaavion perusteella myyntitulo on suurin, kun $x = 2$.

Lasketaan kahvikupin hinta ja myyntimäärä, kun $x = 2$.

hinta: $0,80 + 0,05x = 0,80 + 0,05 \cdot 2 = 0,90$ (€/kuppi)

myyntimäärä: $500 - 25x = 500 - 25 \cdot 2 = 450$ (kupillista)

Viikon myyntitulot ovat mahdollisimman suuret, kun kahvikupin hinta on 0,90 €. Tällöin kahvia myydään 450 kuppia viikossa.

Vastaus 0,90 €, 450 kuppia

# K44

a) Ratkaistaan $f(x) = \dfrac{4x}{2x-6}$ nimittäjän nollakohta.

$$2x - 6 = 0$$
$$x = 3$$

Funktio $f$ on määritelty, kun $x \neq 3$

$$f'(x) = \frac{4(2x-6) - 4x \cdot 2}{(2x-6)^2}$$
$$= \frac{8x - 24 - 8x}{(2x-6)^2}$$
$$= \frac{-24}{(2x-6)^2}$$
$$\left( = \frac{-24}{4x^2 - 24x + 36} \right.$$
$$= \frac{\overset{-6}{\cancel{-24}}}{\underset{1}{\cancel{4}}(x^2 - 6x + 9)}$$
$$= \frac{-6}{x^2 - 6x + 9}$$
$$\left. = \frac{-6}{(x-3)^2} \right)$$

b) Funktion $g(x) = \dfrac{5x+1}{4x^2+2}$ nimittäjä $4x^2 + 2 > 0$ kaikilla $x$.

$$g'(x) = \frac{5(4x^2+2) - (5x+1)\cdot 8x}{(4x^2+2)^2}$$
$$= \frac{5(4x^2+2) - (5x-1)\cdot 8x}{(4x^2+2)^2}$$
$$= \frac{-20x^2 - 8x + 10}{(4x^2+2)^2}$$

**Vastaus**

a) $f'(x) = \dfrac{-24}{(2x-6)^2} \left( = \dfrac{-6}{(x-3)^2} \right)$, kun $x \neq 3$

b) $g'(x) = \dfrac{-20x^2 - 8x + 10}{(4x^2+2)^2}$

# K45

Ratkaistaan funktion $h(x) = \frac{8 - x^2}{3 - x}$ nimittäjän nollakohta.

$$3 - x = 0$$
$$x = 3$$

Funktio $h$ on määritelty, kun $x \neq 3$.

Derivoidaan.

$$h'(x) = \frac{-2x(3 - x) - (8 - x^2) \cdot (-1)}{(3 - x)^2}$$
$$= \frac{-6x + 2x^2 + 8 - x^2}{(3 - x)^2} = \frac{x^2 - 6x + 8}{(3 - x)^2}$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\frac{x^2 - 6x + 8}{(3 - x)^2} = 0$$
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 2}{2}$$
$$x = \frac{6 - 2}{2} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{6 + 2}{2} = 4$$

Molemmat ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon.

**Vastaus**

$x = 2$ tai $x = 4$

# K46

Selvitetään funktion $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 12}$ määrittelyehto.

$x^2 - 12 = 0$

$x = -2\sqrt{3}$ tai $x = 2\sqrt{3}$

Funktio on määritelty, kun $x \neq -2\sqrt{3}$ ja $x \neq 2\sqrt{3}$ .

Derivoidaan funktio ja päätellään funktion kulku derivaatan merkeistä.

$$f'(x) = D(\frac{x^3}{x^2 - 12}) = \frac{x^4 - 36x^2}{(x^2 - 12)^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{x^4 - 36x^2}{(x^2 - 12)^2} = 0$$

$x = 0$ tai $x = -6$ tai $x = 6$

Saadut nollakohdat toteuttavat määrittelyehdon.

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Derivaattafunktio on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa tai kohdissa, joissa $f'$ ei ole määritelty.

$f'(-7) = 0{,}4653... > 0$
$f'(-4) = -20 < 0$
$f'(-1) = -0{,}2892... < 0$
$f'(1) = -0{,}2892... < 0$
$f'(4) = -20 < 0$
$f'(7) = 0{,}4653... > 0$

| | $-6$ | | $-2\sqrt{3}$ | | $0$ | | $2\sqrt{3}$ | | $6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | + | | − | | − | | − | | − | + |
| $f$ | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↘ | | ↘ | ↗ |
| | | max | | ei määr | | terassi | | ei määr | | min |

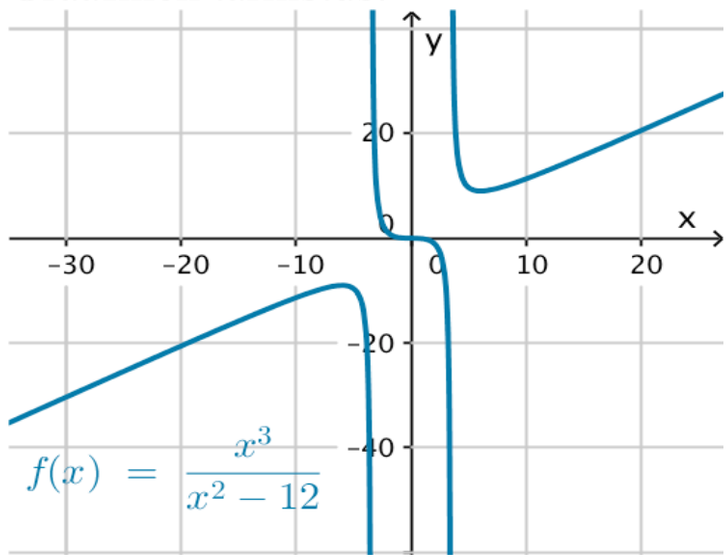
Kulkukaavion perusteella funktiolla on maksimikohta $x = -6$ ja minimikohta $x = 6$. Lasketaan maksimi- ja minimiarvo.

maksimiarvo $f(-6) = -9$
minimiarvo $f(6) = 9$

**Vastaus**
maksimikohta $x = -6$,
maksimiarvo $-9$,

minimikohta $x = 6$,
minimiarvo 9

Graafinen tarkistus:



# K47

Funktio $f(x) = \frac{6}{x} - \frac{1}{x^3}$ on määritelty, kun $x \neq 0$.

Derivoidaan funktio ja päätellään funktion kulku derivaattafunktion merkeistä.

$$f'(x) = D(\frac{6}{x} - \frac{1}{x^2}) = \frac{3}{x^4} - \frac{6}{x^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

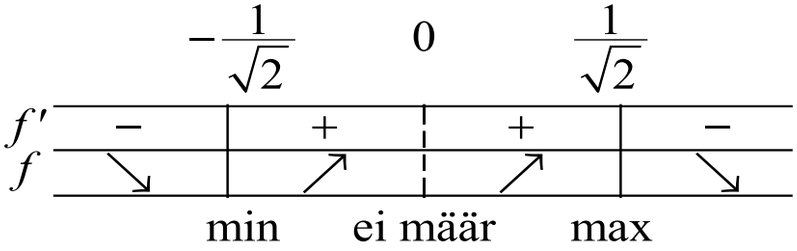
$$\frac{3}{x^4} - \frac{6}{x^2} = 0$$

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{tai} \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Nollakohdat toteuttavat määrittelyehdon.

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Derivaattafunktio on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa tai kohdassa, joissa $f'$ ei ole määritelty.

$f'(-1) = -3 < 0$
$f'(-0,5) = 24 > 0$
$f'(0,5) = 24 > 0$
$f'(1) = -3 < 0$




Kulkukaavion perusteella funktiolla on maksimikohta $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ja minimikohta $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Lasketaan maksimi- ja minimiarvo.

maksimiarvo $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 4\sqrt{2}$

minimiarvo $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -4\sqrt{2}$

**Vastaus**

minimikohta $x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( = -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$, minimiarvo $-4\sqrt{2}$

maksimikohta $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( = \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$, maksimiarvo $4\sqrt{2}$ ,

# K48

Funktion $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$, missä $-6 \le x \le 2$, nimittäjän nollakohta $x = 3$ ei kuulu tarkasteluvälille, joten funktio $f$ on määritelty koko suljetulla välillä $[-6, 2]$.

Määritetään funktion suurin ja pienin arvo välillä $[-6, 2]$.
Funktio $f$ saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$$f'(x) = \frac{2x(x-3) - x^2 \cdot 1}{(x-3)^2}$$
$$= \frac{2x^2 - 6x - x^2}{(x-3)^2}$$
$$= \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat

$$\frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2} = 0$$
$$x^2 - 6x = 0$$
$$x(x-6) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x - 6 = 0$$
$$x = 6$$

Derivaatan nollakohdista $x = 0$ kuuluu välille $]-6, 2[$.
Lasketaan funktion $f$ arvo derivaatan nollakohdassa ja välin päätepisteissä

$f(-6) = \frac{(-6)^2}{-6-3} = -4$ pienin

$f(0) = \frac{0^2}{-6-3} = 0$ suurin

$f(2) = \frac{2^2}{-6-3} = -\frac{4}{9}$

Funktion suurin arvo on 0 ja pienin $-4$.

Funktio $f$ on suljetulla välillä jatkuva, joten se saa kaikki arvot väliltä $[-4, 0]$.

**Vastaus**
a) pienin arvo $-4$, suurin arvo 0
b) arvojoukko $[-4, 0]$

# K49

Funktio $f(x) = \dfrac{5x-8}{3-x^2}$ on määritelty, kun $3 - x^2 \neq 0$.
Määritetään nimittäjän nollakohdat.

$3 - x^2 = 0$
$x = -\sqrt{3}$ tai $x = \sqrt{3}$.

Funktio $f$ on määritelty, kun $x \neq -\sqrt{3}$ ja $x \neq \sqrt{3}$.

Lasketaan mihin käyrän $y = f(x)$ pisteeseen normaali piirretään.

$$f(2) = \frac{5 \cdot 2 - 8}{3 - 2^2} = \frac{2}{-1} = -2$$

Normaali piirretään pisteeseen (2, –2).

Lasketaan kohtaan $x = 2$ piirretyn tangentin kulmakerroin
$k_T = f'(2)$.

Derivoidaan funktio.

$$f'(x) = \frac{5(3-x^2) - (5x-8) \cdot (-2x)}{(3-x^2)^2}$$
$$= \frac{15 - 5x^2 + 10x^2 - 16x}{(3-x^2)^2}$$
$$= \frac{5x^2 - 16x + 15}{(3-x^2)^2}$$

$$k_T = f'(2) = \frac{5 \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 + 15}{(3 - 2^2)^2} = 3$$

Normaalin kulmakerroin saadaan kohtisuoruusehdon avulla.

$$k_T \cdot k_N = -1$$
$$3 \cdot k_N = -1$$
$$k_N = -\frac{1}{3}$$

Normaalin kulmakerroin on $k_N = -\frac{1}{3}$ ja normaali kulkee pisteen $(2, -2)$ kautta. Muodostetaan normaalin yhtälö.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$
$$y - (-2) = -\frac{1}{3}(x - 2)$$
$$y + 2 = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$
$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3} \qquad \left| \cdot 3 \right.$$
$$3y = -x - 4$$
$$x + 3y + 4 = 0$$

**Vastaus**

$y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$ $\quad (x + 3y + 4 = 0)$

# K50

Funktio $f(x) = -\frac{3}{x^6} - 2$ on määritelty, kun $x \neq 0$.

Määritetään käyrän piste, johon tangentti piirretään.

$$f(-1) = -\frac{3}{(-1)^6} - 2 = -5$$

Tangentti piirretään pisteeseen $(-1, -5)$.

Lasketaan kohtaan $x = -1$ piirretyn tangentin kulmakerroin $k = f'(-1)$.

Derivoidaan funktio.

$$f'(x) = \frac{18}{x^7}$$

$$k = f'(-1) = \frac{18}{(-1)^7} = -18$$

Tangentin kulmakerroin on $k = -18$ ja tangentti kulkee pisteen $(-1,-5)$ kautta. Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k(x - x_0) \\ y - (-5) &= -18(x - (-1)) \\ y + 5 &= -18x - 18 \\ y &= -18x - 23 \end{aligned}$$

Lasketaan tangentin ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.

Tangentti leikkaa $y$-akselin, kun $x = 0$.

$$y = -18 \cdot 0 - 23 = -23$$

Tangentti leikkaa $x$-akselin, kun $y = 0$.

$$0 = -18x - 23$$
$$x = -\frac{23}{18}$$

Kolmion kannaksi saadaan $\left|-\frac{23}{18}\right| = \frac{23}{18}$ ja korkeudeksi $\left|-23\right| = 23$.

Lasketaan kolmion pinta-ala.

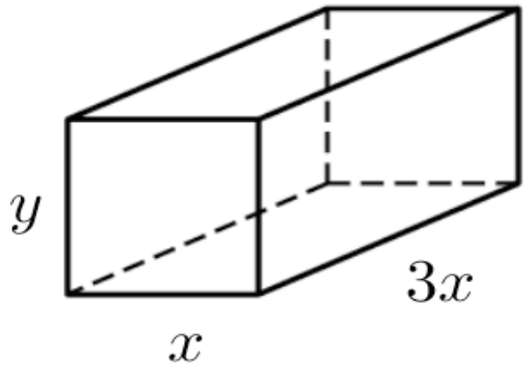
$$A = \frac{\frac{23}{18} \cdot 23}{2} = \frac{529}{36} (\approx 14,7)$$

**Vastaus**

$$A = \frac{529}{36} (\approx 14,7)$$

# K51

Merkitään akvaarion pituutta $3x$, leveyttä $x$ ja korkeutta $y$.




Akvaarion tilavuus $180\ \text{L} = 180\ \text{dm}^3 = 180\ 000\ \text{cm}^3$.
Akvaarion tilavuuden avulla saadaan lauseke korkeudelle.

$$V = 180\ 000$$
$$3x \cdot x \cdot y = 180\ 000$$
$$y = \frac{180\ 000}{3x^2} = \frac{60\ 000}{x^2}$$

Muodostetaan akvaarion pinta-alan lauseke.

$$A = 2 \cdot 3x \cdot x + 2 \cdot 3x \cdot y + 2 \cdot xy = 6x^2 + 6xy + 2xy$$
$$= 6x^2 + 6x\frac{60\ 000}{x^2} + 2x\frac{60\ 000}{x^2} = 6x^2 + \frac{360\ 000}{x} + \frac{120\ 000}{x}$$
$$= 6x^2 + \frac{480\ 000}{x}$$

Akvaarion seinien pituuksian on oltava positiivisia, joten saadaan määrittelyehto $x > 0$ ja $y > 0$.

Akvaarion pinta-alaa kuvaa funktio

$$A(x) = 6x^2 + \frac{480\ 000}{x}, \text{ kun } x > 0.$$

Tutkitaan funktion $A$ kulkua derivaattafunktion merkkien avulla.

$$A'(x) = 12x - \frac{480\ 000}{x^2}$$

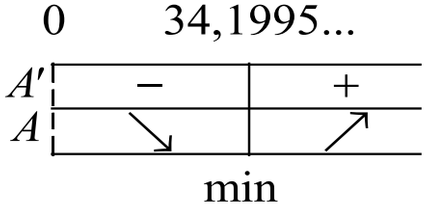
Lasketaan derivaatan nollakohta.

$$12x - \frac{480\ 000}{x^2} = 0$$

$$x = 34{,}1995...$$

Laaditaan pinta-alafunktion $A$ kulkukaavio. Derivaattafunktio $A'$ on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Se voi vaihtaa merkkiään ainoastaan nollakohdassa.

$$A'(1) = -479\,988 < 0$$
$$A'(35) = 28{,}163... > 0$$




Kulkukaavion mukaan akvaarion pinta-ala on pienin eli lasia kuluu vähiten kun $x = 34{,}1995... \approx 34$

Lasketaan muiden sivujen pituudet.

$$3x = 3 \cdot 34{,}1995... = 102{,}598... \approx 103$$

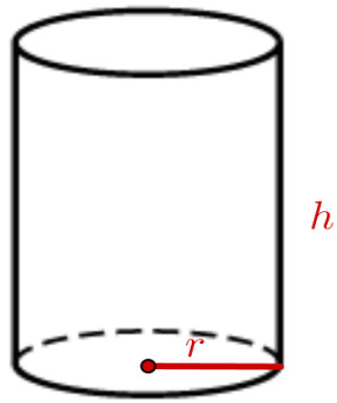
$$y = \frac{60\ 000}{x^2} = \frac{60\ 000}{34{,}1995...^2} = 51{,}299... \approx 51$$

Akvaarion
leveys $x = 34$ cm,
pituus $3x = 103$ cm ja
korkeus $y = 51$ cm.

**Vastaus**
leveys 34 cm, pituus 103 cm ja korkeus 51 cm

# K52

Merkitään suoran ympyrälieriön muotoisen rasian pohjan sädettä $r$ ja korkeutta $h$.




Rasian tilavuus on $3\ \text{L} = 3\ \text{dm}^3 = 3000\ \text{cm}^3$.
Rasian tilavuudesta saadaan lauseke korkeudelle.

$$V = 3000$$
$$\pi r^2 h = 3000$$
$$h = \frac{3000}{\pi r^2}$$

Muodostetaan (kannettoman) rasian pinta-alan lauseke.

$$A = \pi r^2 + 2\pi rh = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{3000}{\pi r^2}$$
$$= \pi r^2 + \frac{6000}{r}$$

Rasian säteen ja korkeuden on oltava positiivisia, joten saadaan määrittelyehto $r > 0$ ja $h > 0$.

Rasian pinta-alaa kuvaa funktio $A(x) = \pi r^2 + \frac{6000}{r}$, kun $r > 0$.
Tutkitaan funktion $A$ kulkua derivaattafunktion merkkien avulla.

$$A'(x) = 2\pi r - \frac{6000}{r^2}$$

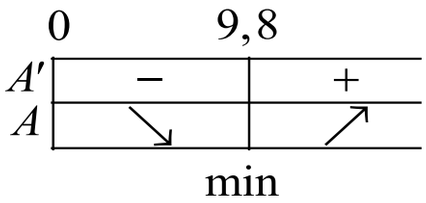
Lasketaan derivaattafunktion nollakohta.

$$2\pi r - \frac{6000}{r^2} = 0$$

$$r = 9{,}84745... \approx 9{,}8$$

Laaditaan pinta-alan funktion kulkukaavio. Derivaattafunktio on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Se voi vaihtaa merkkiään ainoastaan nollakohdassa.

$$A'(9) = -17{,}52... < 0$$
$$A'(10) = 2{,}83... > 0$$




Kulkukaavion mukaan rasian pinta-ala on pienin eli pahvia kuluu vähiten kun säde $r = 9{,}8$ cm.

Tällöin rasian korkeudeksi saadaan

$$h = \frac{3000}{\pi \cdot 9{,}84745...^2} = 9{,}84745... \approx 9{,}8 \text{ (cm)}.$$

**Vastaus**

rasian korkeus on 9,8 cm ja pohjan säde 9,8 cm

# K53

Selvitetään funktion $g(x) = \dfrac{15}{x^2 - 2x + 4}$ määrittelyehto.
Määritetään nimittäjän nollakohdat.

$x^2 - 2x + 4 = 0$
Ei ratkaisua

Funktio on määritelty kaikilla $x$.

Funktion osoittaja on vakio, joten funktio $g$ saa suurimman arvonsa, kun nimittäjä $x^2 - 2x + 4$ on mahdollisimman pieni.

Nimittäjän kuvaaja $y = x^2 - 2x + 4$ on alaspäin aukeava paraabeli, joka saa pienimmän arvonsa huipussa eli derivaatan $y'(x) = 2x - 2$ nollakohdassa.

$$\begin{aligned} 2x - 2 &= 0 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Funktion $g$ suurin arvo on siis $g(1) = \dfrac{15}{1^2 - 2 \cdot 1 + 4} = \dfrac{15}{3} = 5$.
Nimittäjän arvot kasvavat rajatta, kun $x$ kasvaa tai pienenee rajatta. Siis nimittäjällä ei ole suurinta arvoa, eikä näin myöskään funktiolla $g$ ole pienintä arvoa.

**Vastaus**

suurin arvo 5, ei pienintä arvoa

**Huomaa!**

Funktion $g(x) = \dfrac{15}{x^2 - 2x + 4}$, missä $x \in \mathbf{R}$, kulkua voidaan tutkia myös derivivaattafunktion $g'$ avulla.

Derivoidaan funktio $g$ ja päätellään funktion kulku derivaatan merkeistä.

$$g'(x) = \mathrm{D}\frac{15}{x^2 - 2x + 4} = \frac{-30x + 30}{(x^2 - 2x + 4)^2}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{-30x + 30}{(x^2 - 2x + 4)^2} = 0$$

$$x = 1$$

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Derivaattafunktio on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdassa.

$$g'(0) = \frac{15}{8} > 0$$

$$g'(2) = -\frac{15}{8} < 0$$

| | 1 | |
|---|---|---|
| $g'$ | + | − |
| $g$ | ↗ | ↘ |
| | max | |

Kulkukaavion perusteella funktio saa suurimman arvonsa kohdassa $x = 1$. Lasketaan suurin arvo.

$$g(1) = \frac{15}{1^2 - 2 \cdot 1 + 4} = 5$$

Kulkukaavion mukaan funktiolla $g$ ei ole minimikohtia, joten sillä ei ole pienintä arvoa.

**Vastaus**
suurin arvo 5, ei pienintä arvoa

# M1

Ratkaistaan nimittäjän nollakohta.

$$x - 6 = 0$$
$$x = 6$$

Funktion määrittelyehto on $x \neq 6$.

Vastaus C

# M2

Supistetaan murtolauseke.

$$\frac{4x^2-9}{2x-3}=\frac{(2x-3)(2x+3)}{2x-3}=2x+3$$

Vastaus B

# M3

Nimittäjän nollakohta on $x = 0$. Murtolauseke on määritelty kun $x \neq 0$.

$$\frac{x^2 - 4x}{4x} = 0 \qquad |\cdot 4x$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0$$

$x = 0$ tai $x - 4 = 0$

$x = 4$

Ratkaisuista $x = 4$ toteuttaa määrittelyehdon.

Vastaus C

# M4

Nimittäjän nollakohta on $x = -2$. Murtolauseke on määritelty kun $x \neq -2$.

$$\frac{x^2 + x - 2}{x + 2} = 0 \qquad |\cdot(x+2)$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{-1+3}{2} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1-3}{2} = -2$$

Ratkaisuista $x = 1$ toteuttaa määrittelyehdon.

Vastaus B

# M5

Nimittäjän nollakohta on $x = -2$. Määrittelyehto on $x \neq -2$.

Merkitään $f(x) = \dfrac{x-9}{x+2}$ ja ratkaistaan funktion nollakohdat.

$$\frac{x-9}{x+2} = 0 \qquad |\cdot(x+2)$$
$$x - 9 = 0$$
$$x = 9$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon.

Funktio $f$ voi vahtaa merkkiään ainoastaan kohdissa $-2$ ja 9.

$$f(-3) = \frac{-3-9}{-3+2} = \frac{-12}{-1} = 12 > 0$$
$$f(0) = \frac{0-9}{0+2} = \frac{-9}{2} < 0$$
$$f(10) = \frac{10-9}{10+2} = \frac{1}{12} > 0$$

Laaditaan merkkikaavio.

| | | $-2$ | | $9$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $+$ | ¦ | $-$ | \| | $+$ |

Epäyhtälö $\dfrac{x-9}{x+2} \geq 0$ toteutuu, kun $x < -2$ tai $x \geq 9$.

Vastaus B

# M6

$$\frac{x}{x+1} \le 2$$

$$\frac{x}{x+1} - 2 \le 0$$

Nimittäjän nollakohta on $x = -1$. Määrittelyehto on $x \neq -1$.

Merkitään $f(x) = \frac{x}{x+1} - 2$ ja ratkaistaan funktion nollakohdat.

$$\frac{x}{x+1} - 2 = 0 \qquad | \cdot (x+1)$$

$$\frac{x(x+1)}{x+1} - 2(x+1) = 0$$

$$x - 2x - 2 = 0$$

$$-x = 2$$

$$x = -2$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon.

Funktio $f$ voi vahtaa merkkiään ainoastaan kohdissa $-2$ ja $-1$.

$$f(-3) = \frac{-3}{-3+1} - 2 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2} < 0$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}+1} - 2 = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} - 2 = 3 - 2 = 1 > 0$$

$$f(0) = \frac{0}{0+1} - 2 = 0 - 2 = -2 < 0$$

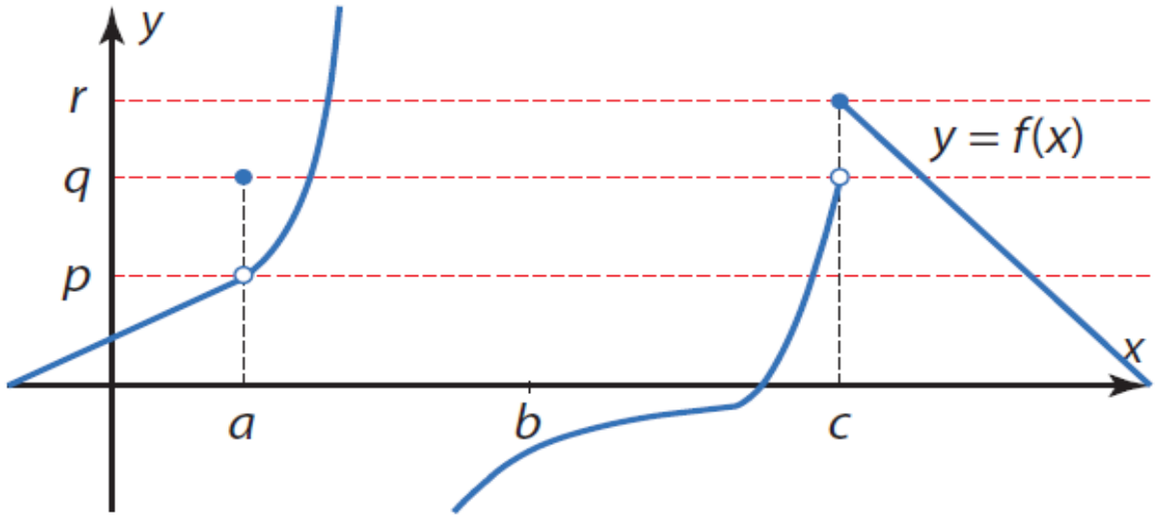
Laaditaan merkkikaavio.

| | | $-2$ | | $-1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | $-$ | $+$ | | $-$ |

Epäyhtälö $\frac{x}{x+1} - 2 < 0$ toteutuu, kun $x \leq -2$ tai $x > -1$.

Vastaus A

# M7




Funktiolla on raja-arvo kohdassa $a$, koska
$\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) = p$ .

Funktiolla on raja-arvo kohdassa $b$, koska $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = \lim\limits_{x \to b+} f(x)$ .

Funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa $c$, koska $\lim\limits_{x \to c-} f(x) = q$ ,

$\lim\limits_{x \to c+} f(x) = r$ ja $q \neq r$.

Vastaus a, b

# M8

Tutkitaan väitettä a.

Nimittäjän $x+1$ nollakohta on $x=-1$. On siis oltava $x \neq -1$. Lisäksi funktiota ei ole määritelty kohdassa $x=5$.

Väite a ei ole tosi.

Tutkitaan väitettä b.

Funktion lauseke vaihtuu kohdassa 2. Lasketaan toispuoliset raja-arvot.

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} \frac{x+7}{x+1} = \frac{2+7}{2+1} = \frac{9}{3} = 3$$
$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (2x-1) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

Toispuoliset raja-arvot ovat samat, joten funktiolla on raja-arvo kohdassa $x=2$. Väite b on tosi.

Tutkitaan väitettä c.

Funktion lauseke vaihtuu kohdassa 5. Lasketaan toispuoliset raja-arvot.

$$\lim_{x \to 5-} f(x) = \lim_{x \to 5-} (2x-1) = 2 \cdot 5 - 1 = 9$$
$$\lim_{x \to 5+} f(x) = \lim_{x \to 5+} (-x+15) = -5 + 15 = 10$$

Toispuoliset raja-arvot ovat erisuuret, joten funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa $x = 5$.

Väite c ei ole tosi.

Vastaus b

# M9

Funktio $f(x) = \frac{x^2 - ax}{3x - 9} = \frac{x(x-a)}{3(x-3)}$.

Jotta funktiolla olisi raja-arvo kohdassa 3, pitää lauseketta supistaa.
Supistaminen onnistuu, kun osoittajassa on tekijä $x - 3$.
Joten $a = 3$.

Vastaus b

# M10

Lasketaan funktion $f(x) = \dfrac{2x^2 + 15x + 28}{8x^2 + 31x - 4}$ osoittajan ja nimittäjän raja-arvo.

$$\lim_{x \to -4} (2x^2 + 15x + 28) = 2(-4)^2 + 15(-4) + 28 = 0$$
$$\lim_{x \to -4} (8x^2 + 31x - 4) = 8(-4)^2 + 31(-4) - 4 = 0$$

Lauseketta voidaan supistaa. Jaetaan osoittaja ja nimittäjä tekijöihin nollakohtien avulla.

$$2x^2 + 15x + 28 = 0$$
$$x = -4 \quad \text{tai} \quad x = -\frac{7}{2}$$

$$8x^2 + 31x - 4 = 0$$
$$x = -4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1}{8}$$

$$\lim_{x \to -4} \frac{2x^2 + 15x + 28}{8x^2 + 31x - 4} = \lim_{x \to -4} \frac{2(x+4)(x+\frac{7}{2})}{8(x+4)(x-\frac{1}{8})}$$

$$= \lim_{x \to -4} \frac{2(x+\frac{7}{2})}{8(x-\frac{1}{8})} = \lim_{x \to -4} \frac{2x+7}{8x-1}$$

$$= \frac{2(-4)+7}{8(-4)-1} = \frac{-8+7}{-32-1} = \frac{1}{33}$$

Vastaus c

# M11

$\lim_{x \to -1-} f(x) = 2$ ja $\lim_{x \to -1+} f(x) = -2$

Funktio ei ole jatkuva kohdassa $x = -1$, koska $\lim_{x \to -1} f(x)$ ei ole olemassa.

$\lim_{x \to 1} f(x) = 0$ ja $f(1) = 0$

Funktio on jatkuva kohdassa $x = 1$, koska $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

Funktio ei ole jatkuva kohdassa $x = 3$, koska funktiota ei ole määritelty kohdassa 3.

Vastaus B

# M12

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, \text{ kun } x < -2 \\ -3, \text{ kun } x \geq -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (-3) = -3 = f(2)$$

Funktio on jatkuva kohdassa 2, koska $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

Tutkitaan jatkuvuutta kohdassa $-2$.

$$f(-2) = -3$$

$$\lim_{x \to -2-} f(x) = \lim_{x \to -2-} (2x+1) = 2 \cdot (-2) + 1 = -3$$

$$\lim_{x \to -2+} f(x) = \lim_{x \to -2+} (-3) = -3$$

Funktion arvo sekä toispuoliset raja-arvot ovat samat kohdassa $-2$, joten funktion kohdassa jatkuva.

Vastaus A ja B

**M13**

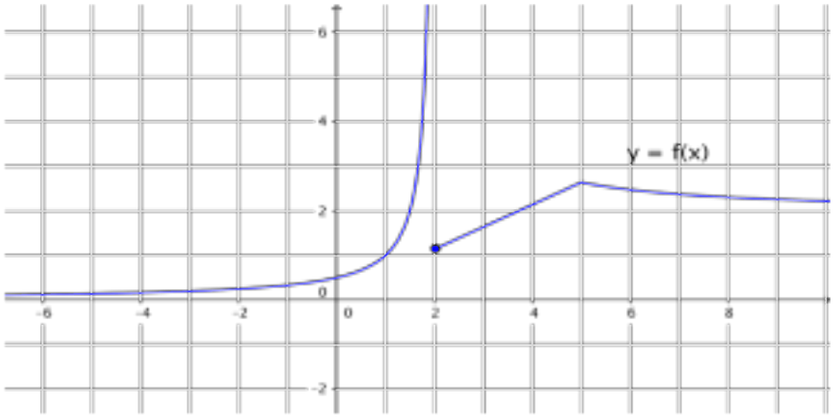
$$f(x) = \frac{1}{x-3}$$

Nimittäjän nollakohta on $x = 3$. Funktion määrittelyehto on $x \neq 3$.

Funktio on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan.

Vastaus C

# M14




Funktiolla $f$ ei ole kohdassa 2 vasemmanpuoleista raja-arvoa, joten funktio ei voi olla jatkuva välillä, johon kuuluu kohta $x = 2$.

Funktio on määritelty välin $[2,5]$ jokaisessa pisteessä ja jatkuva tällä välillä.

Vastaus C

**M15**

$f(x) = x^3 + 3x - 3$

Funktio on polynomifunktio ja siten jatkuva kaikkialla.
Tutkitaan funktion arvoja välin $[0,1]$ päätepisteissä.

$f(0) = 0^3 + 3x - 3 = -3$

$f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1 - 3 = 1$

Koska funktio on välillä $[0,1]$ jatkuva, se saa kaikki arvot väliltä $]-3,1[$ ainakin kerran välillä $]0,1[$, joten funktio saa välillä $]-3,1[$ olevat arvot 0 ja -1.

Vastaus A ja C

# M16

Kuvan perusteella väite a on totta.

Lasketaan kuvan tangentin kulmakerroin, kun se kulkee pisteiden $(1,2)$ ja $(2,-1)$ kautta.

$$k = \frac{-1-2}{2-1} = -3$$

$$f'(2) = -3$$

Kohdassa $x = -1$ on paraabelin huippu, jolloin käyrälle piirretty tangentti on $x$-akselin suuntainen ja sen kulmakerroin on 0, joten $f'(-1) = 0$.

Vastaus a, b ja c

# M17

Muodostetaan funktion $f(x) = x^2 - x$ erotusosamäärä kohdassa 3.

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - (3+h) - (3^3 - 3)}{h}$$

Vastaus b

# M18

$$f'(x) = -3x^{3-1} + 3 \cdot 2x^{2-1} - 0 = -3x^2 + 6x$$

Vastaus B

# M19

Määritetään derivaattafunktio.

$$g'(x) = 2x^{2-1} + 1 \cdot x^{1-1} = 2x + 1$$

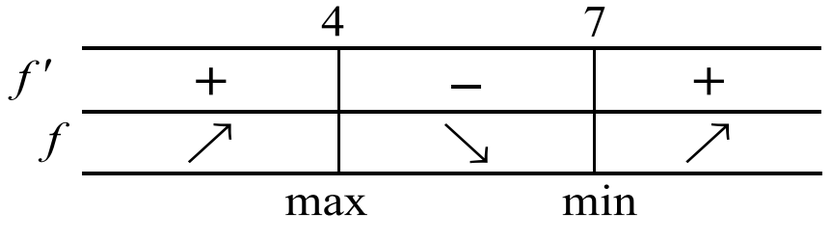
Lasketaan derivaattafunktion arvot kohdissa $-2$, $0$ ja $2$.

$$g'(-3) = 2 \cdot (-3) + 1 = -5$$
$$g'(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$
$$g'(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

Vastaus A ja C

# M20

Laaditaan funktion kulkukaavio.




Kulkukaavion perusteella funktiolla on maksimikohta $x = 4$ ja minimikohta $x = 7$.

Vastaus A ja C

# M21

Laaditaan funktion kulkukaavio. Derivaattafunktion nollakohdat ovat $x = -2$, $x = 0$ ja $x = 5$.

| | | $-2$ | | $0$ | | $5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | | $-$ | | $+$ | | $-$ |
| $f$ | ↗ | | ↘ | | ↗ | | ↘ |

Kulkukaavion perusteella funktio on kasvava välillä $x \le -2$ ja välillä $0 \le x \le 5$.

Funktio on vähenevä välillä $-2 \le x \le 0$ ja välillä $x \ge 5$.

Vastaus B ja C

# M22

Polynomifunktio $f$ saavuttaa välillä $[-1, 2]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välille $]-1, 2[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 2x$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$2x = 0$$
$$x = 0$$

Lasketaan funktion $f$ arvot välin päätepisteissä sekä välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$f(-1) = (-1)^2 = 1$

$f(0) = 0^2 = 0$ pienin

$f(1) = 1^2 = 4$ suurin

Funktion suurin arvo välillä on $4$ ja pienin $0$.

Vastaus A ja B

# M23

Kulkukaavion perusteella funktio $f$ saa suurimman arvonsa maksimikohdassa $x = -5$ tai $x = 2$, koska funktio on aidosti vähenevä välillä $x < -5$ ja välillä $x > 2$. Väite A on siis tosi.

Väite B ei ole tosi, koska väite A on tosi.

Ainoa kohta, jossa funktiolla voisi olla pienin arvo on $x = 0$. Mutta koska funktio on aidosti vähenevä, kun $x < -5$ tai $x > 2$, niin ei voida varmuudella sanoa onko pienin arvo kohdassa $x = 0$.

Vastaus A

# M24

Kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin kulmakerroin $k_1 = f'(1)$.

$f'(x) = -3x^2 + 2$

$k_1 = f'(1) = -3 \cdot 1^2 + 2 = -1$

Väite B on siis tosi ja väite A epätosi.

Normaalin kulmakerroin $k_\text{n}$ saadaan kohtisuoruusehdolla.

$$k_\text{t} \cdot k_\text{n} = -1$$
$$-1 \cdot k_\text{n} = -1$$
$$k_\text{n} = 1$$

Väite C on siis tosi.

Vastaus B ja C

# M25

Käyrän ja $x$-akselin leikkauskohdassa $y = 0$. Ratkaistaan leikkauskohta.

$$-x^3 + 1 = 0$$
$$x^3 = 1$$
$$x = 1$$

Käyrälle kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin kulmakerroin $k = y'(1)$.

$$y'(x) = -3x^2$$
$$k = y'(1) = -3 \cdot 1^2 = -3$$

Lasketaan tangentin suuntakulma.

$$\tan\alpha = k$$
$$\tan\alpha = -3$$
$$\alpha = \tan^{-1}(-3) = -71,565...^\circ$$

Käyrän ja $x$-akselin välinen kulma on noin $71,6^\circ$.

Vastaus A

# M26

Funktion $f(x) = \frac{1}{x^{13}}$ nimittäjän nollakohta on $x = 0$.

Määrittelyehto on $x \neq 0$.

$$f'(x) = D(\frac{1}{x^{13}}) = D(x^{-13}) = -13x^{-13-1} = -13x^{-14}$$

**Vastaus** C

# M27

Derivoidaan funktio $g(x) = \frac{x^2}{x^3 + 1}$, missä $x \neq -1$.

$$g'(x) = \frac{2x(x^3 + 1) - 3x^2 \cdot x^2}{(x^3 + 1)^2}$$

**Vastaus** A

# M28

Funktion $g(x) = \frac{1+x}{x}$, missä $x \neq 0$ kuvaajalle kohtaan $x = -1$ piirretyn tangentin kulmakerroin $k = g'(-1)$.

$$g'(x) = \frac{1 \cdot x - (1+x) \cdot 1}{x^2}$$
$$= \frac{x - 1 - x}{x^2}$$
$$= -\frac{1}{x^2}$$

$$g'(-1) = -\frac{1}{(-1)^2} = -1$$

**Vastaus** A

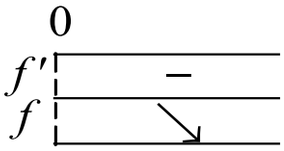
# M29

Derivoidaan *rationaalifunktio* $g(x) = \frac{2}{x^3}$, missä $x > 0$.

$$g'(x) = D(2x^{-3}) = -3 \cdot 2x^{-3-1} = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$$

Derivaattafunktio on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Derivaatalla ei ole nollakohtia, joten sen merkki on aina sama, kun $x > 0$.

$$g'(1) = -\frac{6}{1^4} = -6 < 0$$




Kulkukaavion perusteella funktio on aidosti vähenevä kun $x > 0$.

**Vastaus** A ja C

# M30

Määritetään funktion $f(x) = \frac{5x}{1-x^2}$, kun $2 \le x \le 6$ määrittelyehto.

Lasketaan nimittäjän nollakohta.

$$1 - x^2 = 0$$
$$x^2 = 1$$
$$x = -1 \quad \text{tai} \quad x = 1$$

Määrittelyehto on $x \neq -1$ ja $x \neq 1$.

Funktio on rationaalifunktio ja siten jatkuva määrittelyjoukossaan. Funktio on määritelty koko suljetulla välillä $[2, 6]$, joten sillä on suurin ja pienin arvo tällä välillä.

**Vastaus** A ja B

# M31

**Kirjan 1. painoksessa on virhe tehtävänannossa. Tehtävänannon c-kohdan pitäisi olla "c) nollakohdat ovat samat."**

Sievennetään funktion $f(x) = \dfrac{2x}{3x^3 - 4x}$ lauseke.

$$f(x) = \frac{2x}{3x^3 - 4x} = \frac{2x}{x(3x^2 - 4)} = \frac{2}{3x^2 - 4} = g(x)$$

Lasketaan nimittäjien nollakohdat.

Funktio $f$:

$$3x^3 - 4x = 0$$
$$x(3x^2 - 4) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 3x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = \frac{4}{3}$$
$$x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Funktio $g$:

$$3x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = \frac{4}{3}$$
$$x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Funktion $f$ määrittelyehto on $x \neq 0$ ja $x \neq \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Funktion $g$ määrittelyehto on $x \neq \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Koska funktioilla on eri määrittelyjoukko, funktiot eivät ole samat.

Funktioiden lauseke on sama, mutta määrittelyjoukko eri, joten niiden derivaattafunktioillakin on eri määrittelyjoukot.

Siis myöskään derivaattafunktiot eivät ole samat.

Määritetään funktioiden nollakohdat.

Funktio $f$:

$$f(x) = 0$$
$$\frac{2x}{3x^3 - 4x} = 0$$
$$2x = 0$$
$$x = 0$$

$x = 0$ ei toteuta määrittelyehtoa.

Funktiolla $f$ ei ole nollakohtia.

Funktio $g$:

$$g(x) = 0$$
$$\frac{2}{3x^2 - 4} = 0$$

Ei ratkaisua.

Funktiolla $g$ ei ole nollakohtia.

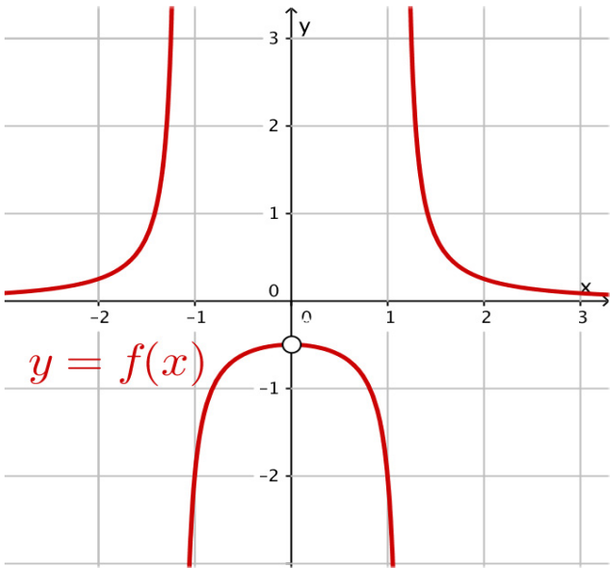
Kummallakaan funktiolla ei ole nollakohtia, joten niillä on keskenään samat nollakohdat.

**Vastaus** C

**Graafinen tarkistus:**

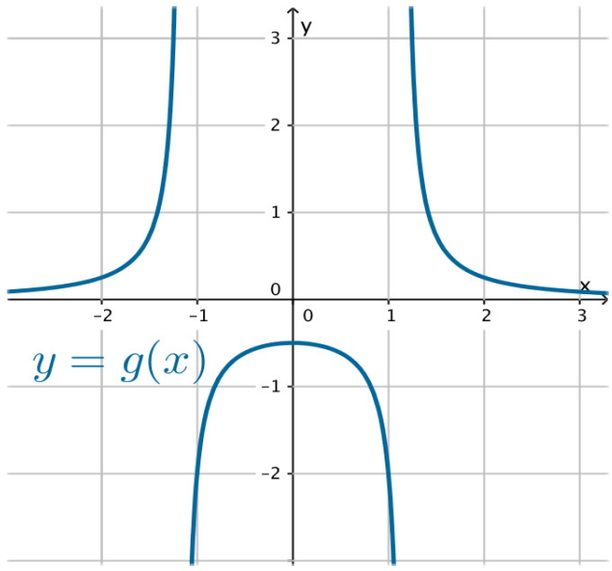
Funktio $f(x) = \dfrac{2x}{3x^3 - 4x}$,

missä $x \neq 0$ ja $x \neq \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.




Funktio $g(x) = \dfrac{2}{3x^2 - 4}$,

missä $x \neq \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.




Funktiolla $g$ on maksimikohta $x = 0$, mutta funktiolla $f$ ei ole ääriarvokohtia.

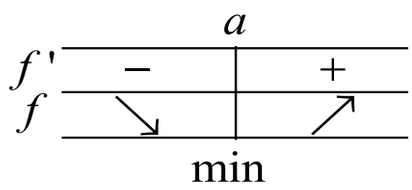
# M32

**Kirjan 1. painoksessa on virhe tehtävänannossa. Tehtävänannon 1. lause pitäisi olla ”**Funktion $f$ derivaattafunktio $f'$ on kaikkialla aidosti kasvava.**”**

Koska derivaattafunktio $f'$ on kaikkialla aidosti kasvava, sillä voi olla korkeintaan yksi nollakohta.

- Mikäli derivaattafunktiolla $f'$ ei ole nollakohtia, niin funktiolla $f$ ei ole myöskään ääriarvokohtia, eikä siis ääriarvojakaan

- Mikäli derivaattafunktiolla on nollakohta $x = a$, niin saadaan kulkukaavio, jossa derivaattafunktion $f'$ merkki vaihtuu negatiivisesta positiiviseksi, koska $f'$ on aidosti kasvava.




Funktiolla $f$ on tässä tapauksessa yksi minimikohta.

Funktiolla $f$ voi siis olla korkeintaan yksi minimikohta.

**Vastaus** B

# A1

a) Nimittäjien nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = -2$ .
Yhtälön määrittelyehto on $x \neq 0$ ja $x \neq -2$ .

Ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{6}{x} - \frac{4}{x+2} = 2 \qquad \left| \cdot x(x+2) \ (\neq 0) \right.$$

$$\frac{6x(x+2)}{x} - \frac{4x\,(x+2)}{x+2} = 2x(x+2)$$

$$6(x+2) - 4x = 2x(x+2)$$

$$6x + 12 - 4x = 2x^2 + 4x$$

$$-2x^2 - 2x + 12 = 0 \qquad \left| : 2 \right.$$

$$-x^2 - x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2 \cdot (-1)} = \frac{1 \pm 5}{-2}$$

$$x = \frac{1+5}{-2} = -3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1-5}{-2} = 2$$

Molemmat ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon.

b) Siirretään termejä niin, että epäyhtälön oikealle puolell tulee nolla.

$$\frac{2x^2}{x+1} \le 3x$$

$$\frac{2x^2}{x+1} - 3x \le 0$$

Merkitään $f(x) = \frac{2x^2}{x+1} - 3x$ ja selvitetään millä muuttujan $x$ arvoilla $f(x) \le 0$.

Nimittäjän nollakohta on $x = -1$, joten funktion $f$ määrittelyehto on $x \ne -1$.

Ratkaistaan funktion $f$ nollakohdat.

$$\frac{2x^2}{x+1} - 3x = 0 \qquad | \cdot (x+1) \ (\ne 0)$$

$$\frac{2x^2 \cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} - 3x(x+1) = 0$$

$$2x^2 - 3x^2 - 3x = 0$$

$$-x^2 - 3x = 0$$

$$-x(x+3) = 0$$

$x = 0$ tai $x + 3 = 0$

$x = -3$

Funktio $f$ on rationaalifunktio, ja siksi jatkuva määrittelyjoukossaan. Se voi vaihtaa merkkiään ainoastaan nollakohdissa tai kohdassa $x = -1$, jossa funktio ei ole määritelty. Lasketaan jokaiselta osaväliltä yksi funktion arvo.

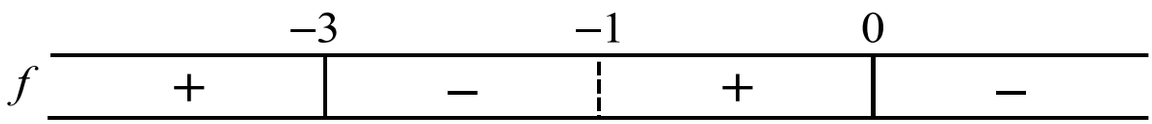
$$f(-4) = \frac{2 \cdot (-4)^2}{-4+1} - 3 \cdot (-4) = \frac{4}{3} > 0$$

$$f(-2) = \frac{2 \cdot (-2)^2}{-2+1} - 3 \cdot (-2) = -2 < 0$$

$$f(-0,5) = \frac{2 \cdot (-0,5)^2}{-0,5+1} - 3 \cdot (-0,5) = 2,5 > 0$$

$$f(1) = \frac{2 \cdot 1^2}{1+1} - 3 \cdot 1 = -2 < 0$$

Laaditaan merkkikaavio.




$f(x) \le 0$, kun $-3 \le x < -1$ tai $x \ge 0$.

Vastaus a) $x = -3$ tai $x = 2$
b) $-3 \le x < -1$ tai $x \ge 0$

# A2

a) Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x \to 9}(x^2 - 81) = 9^2 - 81 = 0$$
$$\lim_{x \to 9}(x - 9) = 9 - 9 = 0$$

Lauseketta voidaan sieventää.

$$\lim_{x \to 9}\frac{x^2 - 81}{x - 9} = \lim_{x \to 9}\frac{(x-9)\cancel{(x+9)}}{\cancel{x-9}}$$
$$= \lim_{x \to 9}(x + 9) = 9 + 9 = 18$$

b) Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot.

$$\lim_{x\to 2}(5x^4 - 10x^3) = 5\cdot 2^4 - 10\cdot 2^3 = 0$$

$$\lim_{x\to 2}(3x^2 - 6x) = 3\cdot 2^2 - 6\cdot 2 = 0$$

Lauseketta voidaan sieventää.

$$\lim_{x\to 2}\frac{5x^4 - 10x^3}{3x^2 - 6x} = \lim_{x\to 2}\frac{5x^3\cancel{(x-2)}}{3x\cancel{(x-2)}}$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(\frac{5x^{\cancel{3}^{2}}}{3\cancel{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(\frac{5x^2}{3}\right) = \frac{5\cdot 2^2}{3} = \frac{20}{3}$$

Vastaus a) 18 b) $\frac{20}{3}$

# A3

a) Määritetään funktion $f(x) = 2x^2 - 4x$ erotusosamäärän raja-arvo kohdassa 3.

$$
\begin{aligned}
f'(3) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2(3+h)^2 - 4(3+h) - (2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2(3^2 + 6h + h^2) - 12 - 4h - 6}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{18 + 12h + 2h^2 - 18 - 4h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 + 8h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2h+8)}{\cancel{h}} \\
&= \lim_{h \to 0} (2h + 8) \\
&= 0 + 8 \\
&= 8
\end{aligned}
$$

b) Määritetään funktion $g(x) = \frac{3}{x}$ erotusosamäärän raja-arvo kohdassa 3.

$$
\begin{aligned}
g'(3) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(3+h) - g(3)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3}{3+h} - \frac{3}{3}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3}{3+h} - 1}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3}{3+h} - \frac{3+h}{3+h}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3-3-h}{3+h}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left( \frac{-\cancel{h}}{3+h} \cdot \frac{1}{\cancel{h}} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{3+h} \\
&= \frac{-1}{3+0} \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Vastaus a) $f'(3) = 8$ b) $g'(3) = -\frac{1}{3}$

# A4

a) Määritetään funktion $f(x) = 5x^3 + 4x^2 + 18$ derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot 5x^2 + 2 \cdot 4x^1 + 0 \\ &= 15x^2 + 8x \end{aligned}$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa 1.

$$f'(1) = 15 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 = 23$$

b) Määritetään funktion $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 2}$ derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{D}(3x) \cdot (x^2 + 2) - 3x \cdot \mathrm{D}(x^2 + 2)}{(x^2 + 2)^2} \\ &= \frac{3(x^2 + 2) - 3x \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} \\ &= \frac{3x^2 + 6 - 6x^2}{(x^2 + 2)^2} \\ &= \frac{-3x^2 + 6}{(x^2 + 2)^2} \end{aligned}$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa 1.

$$f'(1) = \frac{-3 \cdot 1^2 + 6}{(1^2 + 2)^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Vastaus a) $f'(1) = 23$ b) $f'(1) = \dfrac{1}{3}$

# A5

1) Funktio on kasvava välillä $1 \leq x \leq 2$, joten derivaattafunktion arvot ovat positiivisia kun $1 < x < 2$. Ainoa derivaattafunktio, joka toteuttaa tämän ehdon on $h'(x)$.

2) Funktio on kaikkialla kasvava, joten sen derivaattafunktion kaikki arvot ovat positiivisia tai nolla. Ainoa derivaattafunktio, joka toteuttaa tämän ehdon on $g'(x)$.

3) Funktio on vähenevä, kun $x \leq 1$ eli sen derivaattafunktion arvot ovat negatiivisia, kun $x < 1$. Vastaavasti funktio on kasvava, kun $x \geq 1$ eli sen derivaattafunktion arvot ovat positiivisia, kun $x > 1$. Ainoa derivaattafunktio, joka toteuttaa nämä ehdot on $f'(x)$.

# A6

a) Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 5x^2 + 12$ kulku päätellään derivaattafunktion $f'$ merkeistä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$x^3 + 3x^2 - 10x = 0$$
$$x(x^2 + 3x - 10) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 + 3x - 10 = 0$$
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 7}{2}$$
$$x = \frac{-3 + 7}{2} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-3 - 7}{2} = -5$$

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Derivaattafunktio on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

| $x$ | $f'(x)$ | **merkki** |
|---|---|---|
| –6 | –48 | – |
| –1 | 12 | + |
| 1 | –6 | – |
| 3 | 24 | + |

| | | –5 | | 0 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | – | + | | – | | + |
| $f(x)$ | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ |

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio $f$ on kasvava välillä $-5 \le x \le 0$ ja välillä $x \ge 2$.

Funktio $f$ on vähenevä välillä $x \le -5$ ja välillä $0 \le x \le 2$.

b) Funktio on aidosti kasvava välillä $-5 \le x \le 0$. Siis mitä suurempi on muuttujan arvo, sitä suurempi on funktion arvo.
Täten $f(-4,999999) < f(-4,999998)$.

Vastaus a) kasvava välillä $-5 \le x \le 0$ ja välillä $x \ge 2$,
vähenevä välillä $x \le -5$ ja välillä $0 \le x \le 2$

b) $f(-4,999998)$

# A7

Polynomifunktio $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 2$ saavuttaa välillä $[-1, 3]$ pienimmän arvonsa välille $]-1, 3[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = x^2 - 4$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x = 2 \quad \text{tai} \quad x = -2$$

Derivaattafunktion nollakohdista vain $x = 2$ on välillä $]-1, 3[$.

Lasketaan funktion $f$ arvot välin päätepisteissä sekä välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$f(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - 4 \cdot (-1) + 2 = \frac{17}{3}$ suurin

$f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 4 \cdot 3 + 2 = -1$

$f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 4 \cdot 2 + 2 = -\frac{10}{3}$ pienin

Lasketuista arvoista suurin on $f(-1) = \frac{17}{3}$ ja pienin $f(2) = -\frac{10}{3}$.

Vastaus Suurin arvo $f(-1) = \frac{17}{3}$, pienin arvo $f(2) = -\frac{10}{3}$

# A8

a) Koska funktion

$$f(x)=\begin{cases}-2x+4, & \text{kun } x<3\\ -2, & \text{kun } x=3\\ -x^2+10x-23, & \text{kun } x>3\end{cases}$$

lauseke kohdan $3$ eripuolilla ei ole sama, on määritettävä toispuoliset raja-arvot.

$$\lim_{x\to 3-} f(x)=\lim_{x\to 3-}(-2x+4)=-2\cdot 2+4=-2$$

$$\lim_{x\to 3+} f(x)=\lim_{x\to 3+}(-x^2+10x-23)=-3^2+10\cdot 3-23=-2$$

Funktion arvo kohdassa $3$ on $f(3)=-2$.

Koska $\lim\limits_{x\to 3-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3+} f(x)=f(3)$, niin funktio $f$ on jatkuva kohdassa $3$.

b) Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x}{2x - 6}, & \text{kun } x \neq 3 \\ 1, & \text{kun } x = 3 \end{cases}$$

lauseke kohdan $3$ eripuolilla on sama.

Lasketaan funktion raja-arvo kohdassa $3$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 3} f(x) &= \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{2x - 6} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{x\,\cancel{(x - 3)}}{2\,\cancel{(x - 3)}} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{x}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Funktion arvo kohdassa $3$ on $f(3) = 1$.

Koska $\lim\limits_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$, niin funktio ei ole jatkuva kohdassa $3$.

Vastaus a) on
b) ei ole

# A9

Funktion $f(x) = \dfrac{5x+1}{x+2}$ nimittäjän nollakohta on $x \neq -2$.
Funktio $f$ on määritelty, kun $x \neq -2$.

Määritetään kuvaajan piste, johon normaali piirretään.

$$y = f(1) = \frac{5 \cdot 1 + 1}{1 + 2} = \frac{6}{3} = 2$$

Normaali piirretään pisteeseen $(1, 2)$.

Tangentin kulmakerroin on $k_t = f'(1)$. Derivoidaan funktio $f$ ja lasketaan tangentin kulmakerroin.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{D}(5x+1) \cdot (x+2) + (5x+1) \cdot \mathrm{D}(x+2)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{5(x+2) - (5x+1) \cdot 1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{5x + 10 - 5x - 1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{9}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

$$k_t = f'(1) = \frac{9}{(1+2)^2} = 1$$

Normaali on kohtisuorassa tangenttia vastaan, joten sen kulmakerroin voidaan ratkaista kohtisuoruusehdosta.

$$k_{\mathrm{t}} \cdot k_{\mathrm{n}} = -1$$
$$1 \cdot k_{\mathrm{n}} = -1$$
$$k_{\mathrm{n}} = -1$$

Normaali kulkee pisteen $(1, 2)$ kautta ja sen kulmakerroin on $-1$.
Muodostetaan normaalin yhtälö.

$$y - 2 = -1 \cdot (x - 1)$$
$$y - 2 = -x + 1$$
$$y = -x + 3$$

Normaalin ja $x$-akselin leikkauspisteen $y$-koordinaatti on $0$.
Ratkaistaan $x$-koordinaatti.

$$0 = -x + 3$$
$$x = 3$$

Leikkauspiste on $(3, 0)$.

Vastaus $(3,0)$

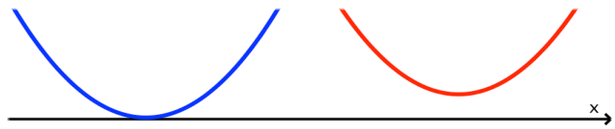
# A10

Funktio $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + ax$ on aidosti kasvava, kun $f'(x) > 0$ kaikilla $x$ lukuun ottamatta yksittäisiä kohtia, joissa $f'(x) = 0$.

Funktion $f$ derivaattafunktio on

$$f'(x) = \frac{3x^2}{3} - 6x + a = x^2 - 6x + a\,.$$

Derivaattafunktion $f'$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Tällöin $f'(x) \geq 0$ kaikilla $x$, kun derivaattafunktiolla on korkeintaan yksi nollakohta.




Toisen asteen yhtälöllä $x^2 - 6x + a = 0$ on korkeintaan yksi nollakohta, kun diskriminantti ($D = b^2 - 4ac$) on negatiivinen tai nolla. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan vakio $a$.

$$\begin{aligned}
(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a &\leq 0 && D = b^2 - 4ac \\
36 - 4a &\leq 0 \\
-4a &\leq -36 && \big| : (-4) \quad < 0 \\
a &\geq 9
\end{aligned}$$

Kun $a \geq 9$, niin derivaattafunktiolla $f'$ on korkeintaan yksi nollakohta. Siis kun $a \geq 9$, niin $f'(x) > 0$ kaikilla $x$ lukuun ottamatta yhtä kohtaa, jossa $f'(x) = 0$.

Täten funktio $f$ on aidosti kasvava, kun $a \geq 9$.

Vastaus $a \geq 9$

## B1

Siirretään epäyhtälön termejä niin, että epäyhtälön oikealle puolelle tulee nolla.

$$7x^3 - 130 < x^4 + 5x^2$$

$$-x^4 + 7x^3 - 5x^2 - 130 < 0$$

Epäyhtälö $-x^4 + 7x^3 - 5x^2 - 130 < 0$ on aina tosi, jos funktio $f(x) = -x^4 + 7x^3 - 5x^2 - 130$ saa vain negatiivisia arvoja.
Määritetään funktion $f$ suurin arvo.

Funktion $f$ kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = -4x^3 + 21x^2 - 10x$

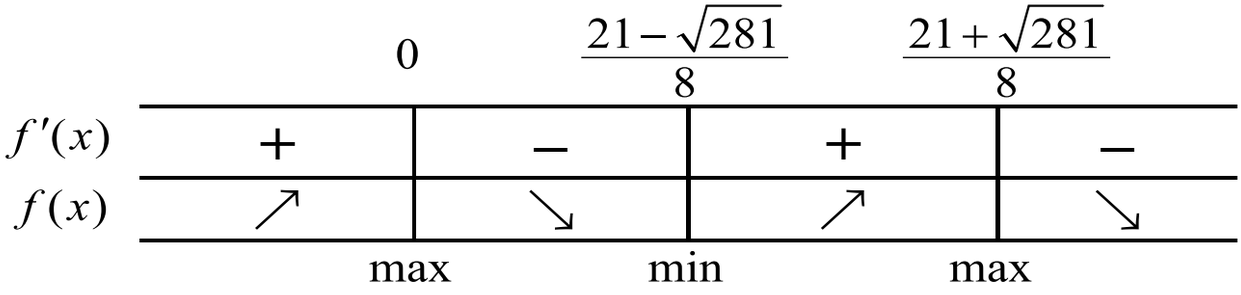
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$-4x^3 + 21x^2 - 10x = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = 0$, $x = \frac{21 - \sqrt{281}}{8}$ $(= 0,52...)$ tai $x = \frac{21 + \sqrt{281}}{8}$ $(= 4,72...)$

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Derivaattafunktio $f'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdassa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

| $x$ | $f'(x)$ | merkki |
|---|---|---|
| –1 | 35 | + |
| 0,5 | –0,25 | – |
| 1 | 7 | + |
| 5 | –25 | – |




Kulkukaavion mukaan funktio saa suurimman arvonsa kohdassa $x = 0$ tai $x = \frac{21+\sqrt{281}}{8}$. Lasketaan funktion arvot näissä kohdissa.

$f(0) = -130$

$f\left(\frac{21+\sqrt{281}}{8}\right) = -1,640...$ suurin

Koska funktion $f$ suurin arvo on negatiivinen, se saa vain negatiivisia arvoja.

On siis osoitettu, että $f(x) < 0$ kaikilla $x$. Täten alkuperäinen epäyhtälö on tosi aina. □

# B2

a) Funktio

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x-6, & \text{kun } x<4 \\ a, & \text{kun } x=4 \\ -\frac{1}{x}+\frac{9}{4}, & \text{kun } x>4 \end{cases}$$

on jatkuva kohdassa 4, jos $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=f(4)$.

Funktion $f$ lauseke kohdan $4$ eripuolilla ei ole sama, joten määritetään toispuoliset raja-arvot.

$$\lim_{x\to 4-} f(x)=\lim_{x\to 4-}(x^2-2x-6)=4^2-2\cdot 4-6=2$$

$$\lim_{x\to 4+} f(x)=\lim_{x\to 4+}(-\frac{1}{x}+\frac{9}{4})=-\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{8}{2}=2$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret, niin $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=2$.

Funktio on jatkuva kohdassa 4, kun määritellään $f(4)=\lim\limits_{x\to 4} f(x)=2.$

Siis funktio $f$ on jatkuva kohdassa $4$, kun $a=2.$

b) Funktio

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+8}{2x-8}, & \text{kun } x\neq 4\\ a, & \text{kun } x=4\end{cases}$$

on jatkuva kohdassa 4, jos $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=f(4)$.

Funktion lauseke on $\dfrac{x+8}{2x-8}$ kohdan 4 ympäristössä.

Lasketaan osoittajan ja nimittäjän raja-arvot kohdassa 4.

$$\lim_{x\to 4}(x+8)=4+8=12$$
$$\lim_{x\to 4}(2x-8)=2\cdot 4-8=0$$

Koska nimittäjän raja-arvo on nolla mutta osoittajan raja-arvo on erisuuri kuin nolla, niin $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ ei ole olemassa.

Funktio $f$ on siis epäjatkuva kohdassa 4 kaikilla vakion $a$ arvoilla.

Vastaus a) voidaan, $a=2$
b) ei voida

## B3

Funktio $f(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{8}{x}$ on määritelty, kun $x \neq 0$ ja $x \neq 1$.

Funktion $f$ kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on

$f'(x) = \mathrm{D}(\frac{2}{x-1} - \frac{8}{x}) = -\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{8}{x^2}$. Derivoidaan laskimella.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

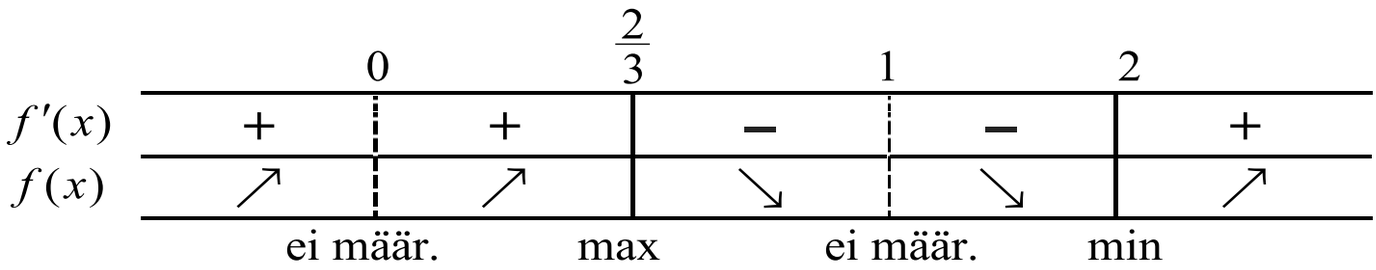
$-\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{8}{x^2} = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = \frac{2}{3}$ tai $x = 2$

Derivaattafunktion nollakohdat toteuttavat määrittelyehdon.

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Derivaattafunktio $f'$ on rationaalifunktio, ja siksi jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa $\frac{2}{3}$ ja $2$ sekä kohdissa $0$ ja $1$, joissa $f'$ ei ole määritelty. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

| $x$ | $f'(x)$ | merkki |
|---|---|---|
| –1 | 7,5 | + |
| 0,5 | 24 | + |
| 0,75 | –17,7… | – |
| 1,5 | –4,55… | – |
| 3 | 0,38… | + |




Kulkukaavion perusteella funktiolla $f$ on maksimikohta $x = \frac{2}{3}$.

Maksimiarvo on $f(\frac{2}{3}) = \frac{2}{\frac{2}{3}-1} - \frac{8}{\frac{2}{3}} = -18$.

Funktiolla $f$ on minimikohta $x = 2$.

Minimiarvo on $f(2) = \frac{2}{2-1} - \frac{8}{2} = -2$

Vastaus maksimikohta $x = \frac{2}{3}$, maksimiarvo $-18$,
minimikohta $x = 2$, minimiarvo $-2$

## B4

Siirretään termejä niin, että yhtälön oikealle puolelle tulee nolla.

$$x^4 = 4x + 1$$

$$x^4 - 4x - 1 = 0$$

Yhtälön $x^4 - 4x - 1 = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^4 - 4x - 1$ nollakohdat.

**1)** Perustellaan ensin, että funktiolla $f$ on ainakin kaksi nollakohtaa.

Funktio $f$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva.

Koska funktion arvot $f(-1) = 4$ ja $f(0) = -1$ ovat erimerkkiset, on funktiolla ainakin yksi nollakohta välillä $]-1, 0[$.

Koska funktion arvot $f(0) = -1$ ja $f(2) = 7$ ovat erimerkkiset, on funktiolla ainakin yksi nollakohta välillä $]0, 2[$.

Funktiolla $f$ on siis ainakin kaksi nollakohtaa.

**2)** Perustellaan seuraavaksi, että funktiolla $f$ on korkeintaan kaksi nollakohtaa.

Tutkitaan funktion $f$ kulkua sen derivaattafunktion $f'(x) = 4x^3 - 4$ avulla. Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} 4x^3 - 4 &= 0 \\ x^3 &= 1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio. Derivaattafunktio on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

| $x$ | $f'(x)$ | merkki |
|---|---|---|
| 0 | –4 | – |
| 2 | 28 | + |

| | | 1 | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | – | + |
| $f(x)$ | | ↘ | ↗ |

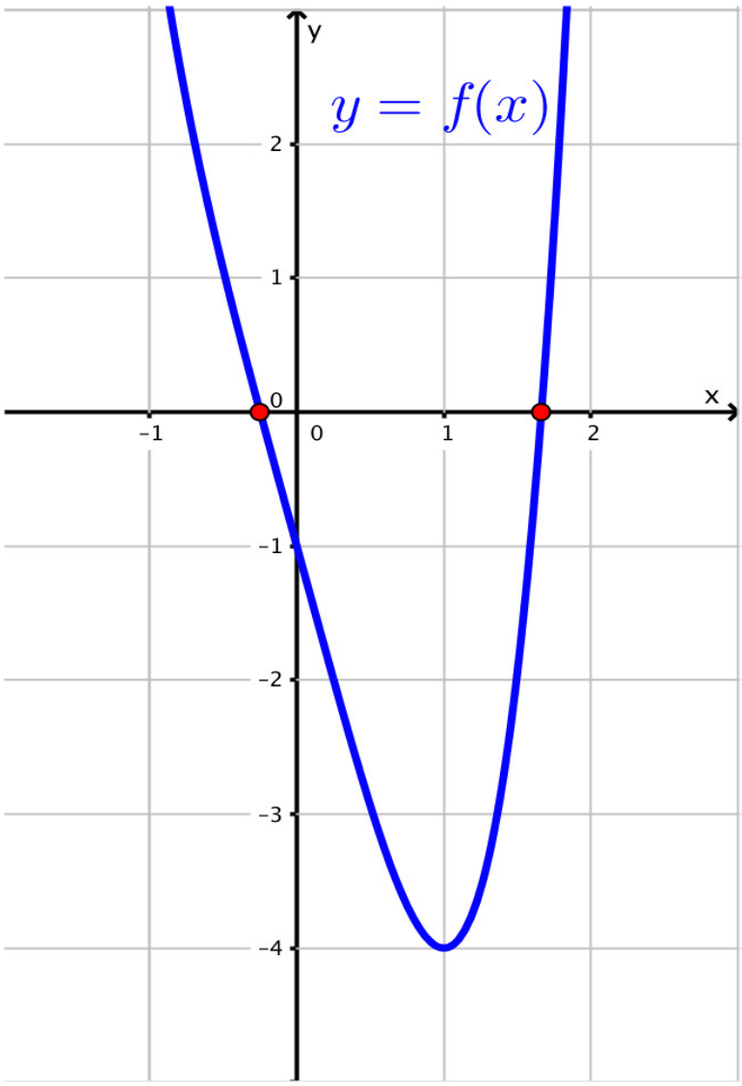
Funktio on aidosti vähenevä, kun $x \leq 1$. Funktiolla voi olla siis korkeintaan yksi nollakohta, kun $x \leq 1$.

Funktio on aidosti kasvava, kun $x \geq 1$. Funktiolla voi olla siis korkeintaan yksi nollakohta, kun $x \geq 1$.

Funktiolla $f$ voi siis olla korkeintaan kaksi nollakohtaa.

On siis osoitettu, että funktiolla $f$ on ainakin kaksi nollakohtaa ja funktiolla $f$ on korkeintaan kaksi nollakohtaa. Funktiolla $f$ on siis täsmälleen kaksi nollakohtaa, joten alkuperäisellä yhtälöllä on täsmälleen kaksi ratkaisua. □

## Graafinen tarkistus



# B5

a) Funktion $s(t) = -0,02t^3 + 0,42t^2$ kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä.

Funktion $s$ derivaattafunktio on $s'(t) = -0,06t^2 + 0,84t$.

Lasketaan derivaattafunktion nollakohdat.

$-0,06t^2 + 0,84t = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$t = 0$ tai $t = 14$

Laaditaan funktion $f$ kulkukaavio, kun $t \geq 0$. Derivaattafunktio $s'$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

| $t$ | $s'(t)$ | merkki |
|---|---|---|
| 1 | 0,78 | + |
| 20 | –7,2 | – |

Derivaattafunktion merkit voi päätellä myös havaitsemalla, että sen kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

| | 0 | 14 | |
|---|---|---|---|
| $s'(t)$ | | + | – |
| $s(t)$ | | ↗ | ↘ |
| | | max | |

Kulkukaavion perusteella sairastavien määrä kääntyy laskuun 14 vuorokauden kuluttua.

b) Kulkukaavion perusteella funktion suurin arvo saadaan, kun $t = 14$. Lasketaan funktion suurin arvo.

$$s(14) = -0,02 \cdot 14^3 + 0,42 \cdot 14^2 = 27,44$$

Opiskelijoista on enimmillään sairaana noin 27 %.

c) Funktion arvot kasvavat nopeimmin, kun funktion muutosnopeus on positiivinen ja mahdollisimman suuri. Funktion $s$ muutosnopeuden kertoo derivaattafunktio $s'$.

Funktion $s'(t) = -0,06t^2 + 0,84t$ derivaattafunktio on

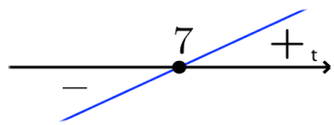
$$s''(t) = -0,12t + 0,84 .$$

Ratkaistaan funktion $s''$ nollakohdat.

$$-0,12t + 0,84 = 0$$
$$t = 7$$

Laaditaan funktion $s'$ kulkukaavio. Derivaattafunktio $s''$ on polynomifunktio, ja siksi kaikkialla jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa.

Funktion $s''$ kuvaaja on laskeva suora, jonka nollakohta on $t = 7$.




| | 7 | |
|---|---|---|
| $s''(t)$ | + | – |
| $s'(t)$ | ↗ | ↘ |
| | max | |

Kulkukaavion perusteella derivaattafunktio $s'$ saa suurimman arvonsa, kun $t = 7$.

Sairastuneiden määrä kasvaa siis nopeimmin 7 vuorokauden kuluttua.

Vastaus a) 14 vuorokauden kuluttua
b) 27 %
c) 7 vuorokauden kuluttua

# B6

Funktio $f(x) = x^2 + \frac{a}{x^2}$ on määritelty, kun $x \neq 0$.

Funktion kulku päätellään derivaattafunktion $f'$ merkeistä.

Funktion $f$ derivaattafunktio on $f'(x) = 2x - \frac{2a}{x^3}$.

Jotta $x = 2$ voi olla funktion $f$ minimikohta, pitää sen olla derivaattafunktion $f'$ nollakohta. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio $a$.

$2x - \frac{2a}{x^3} = 0$ Sijoitetaan $x = 2$.

$2 \cdot 2 - \frac{2a}{2^3} = 0$

$-\frac{a}{4} = -4$

$a = 16$

Ääriarvon laatu voidaan selvittää laatimalla funktion $f$ kulkukaavio. Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$2x - \frac{2 \cdot 16}{x^3} = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = 2$ tai $x = -2$

Derivaattafunktio $f'$ on rationaalifunktio, ja siksi jatkuva. Sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa $-2$ ja $2$ sekä kohdassa $0$, jossa $f'$ ei ole määritelty. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

| $x$ | $f'(x)$ | **merkki** |
|---|---|---|
| $-3$ | $-4{,}81\ldots$ | $-$ |
| $-1$ | $30$ | $+$ |
| $1$ | $-30$ | $-$ |
| $3$ | $4{,}81\ldots$ | $+$ |

| | $-2$ | | $0$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $+$ | $-$ | | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | | ↗ | ↘ | | ↗ |
| | | min | | ei määr. | min | |

Kulkukaavion perusteella kohta $x = 2$ on funktion minimikohta.

Funktiolla $f$ on siis minimikohta $x = 2$, kun $a = 16$.

Vastaus $a = 16$

## B7

Määritetään kuvaajan piste, johon tangentti piirretään.

$$y = f(1) = 2 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 1 + 3 = 2$$

Tangentti piirretään pisteeseen $(1, 2)$

Tangentin kulmakerroin on $k = f'(1)$. Derivoidaan funktio $f$ ja lasketaan kulmakerroin.

$$f'(x) = 6x^2 - 8x + 1$$
$$k = f'(1) = 6 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 1 = -1$$

Tangentti kulkee pisteen $(1, 2)$ kautta ja sen kulmakerroin on $-1$. Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y - 2 = -1 \cdot (x - 1)$$
$$y - 2 = -x + 1$$
$$y = -x + 3$$

Ratkaistaan tangentin ja käyrän $y = f(x)$ leikkauspisteet.

$$\begin{cases} y = 2x^3 - 4x^2 + x + 3 \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari laskimella.

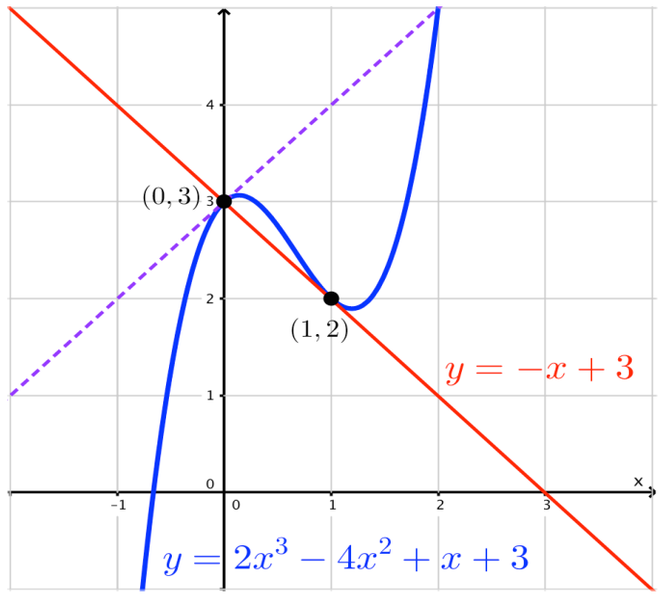
$x = 0$ ja $y = 3$ tai $x = 1$ ja $y = 2$

Tangentin ja käyrän toinen leikkauspiste on siis $(0, 3)$

Lasketaan kohtaan $x = 0$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

$$k_2 = f'(0) = 6 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 1 = 1$$

Kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin kulmakertoimen $k_1 = -1$ ja kohtaan $x = 0$ piirretyn tangentin kulmakertoimen $k_2 = 1$ tulo on $k_1 \cdot k_2 = -1 \cdot 1 = -1$.




Täten tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Siis kohtaan $x = 1$ piirretty tangentti leikkaa käyrän kohtisuorasta kohdassa $x = 0$ ja on myös funktion $f$ kuvaajan normaali. □

# B8

a) Funktion $f(x)=\frac{1-x}{x^2}$, missä $x \neq 0$, kuvaaja kulkee funktion $g(x)=-x+1$ kuvaajan yläpuolella kun funktion $f$ arvot ovat suurempi kuin funktion $g$ arvot. Muodostetaan epäyhtälö.

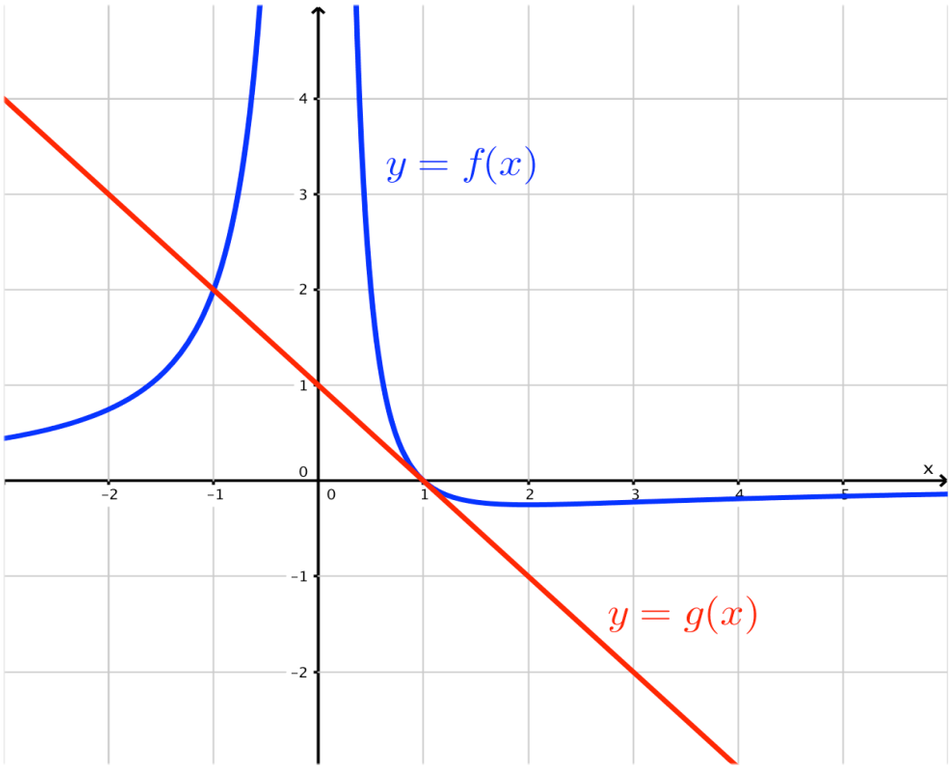
$f(x) > g(x)$

$\frac{1-x}{x^2} > -x+1$ Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.

$x > -1$ ja $x \neq 1$ ja $x \neq 0$

Siis funktion $f$ kuvaaja on funktion $g$ kuvaajan yläpuolella, kun $-1 < x < 0$ tai $0 < x < 1$ tai $x > 1$

**Graafinen tarkistus**



b) Ratkaistaan funktion kuvaajien leikkauskohdat.

$\frac{1-x}{x^2} = -x+1$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = -1$ tai $x = 1$

Derivoidaan funktiot ja lasketaan tangenttien kulmakertoimet leikkauskohdissa $x = -1$ ja $x = 1$.

$f'(x) = \frac{x-2}{x^3}$

$k_{f(-1)} = f'(-1) = \frac{(-1)-2}{(-1)^3} = 3$

$k_{f(1)} = f'(1) = \frac{1-2}{1^3} = -1$

$g'(x) = -1$

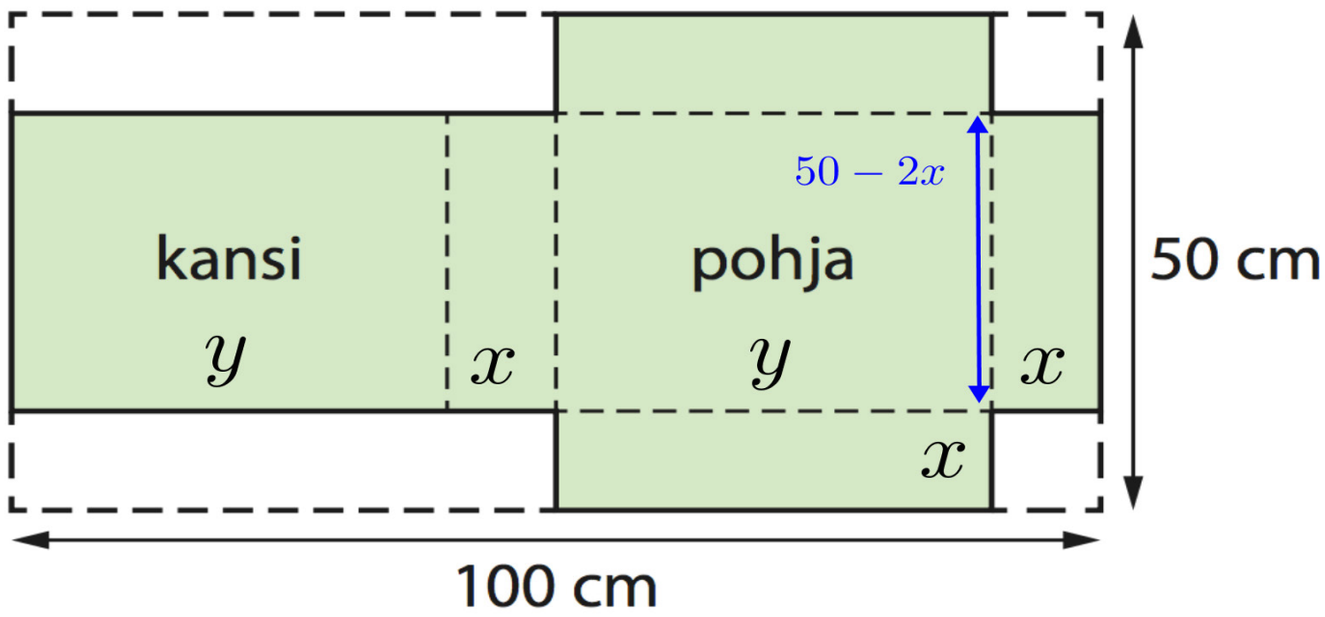
$k_{g(-1)} = g'(-1) = -1$

$k_{g(1)} = g'(1) = -1$

Havaitaan, että leikkauskohdassa $x = 1$ tangenttien kulmakertoimet ovat samat: $k_{f(1)} = k_{g(1)} = -1$. Tällöin leikkauskohdassa $x = 1$ funktioiden kuvaajilla on yhteinen tangentti ja kuvaajat sivuavat toisiaan. □

Vastaus a) $-1 < x < 0$ tai $0 < x < 1$ tai $x > 1$
b) kuvaajat sivuavat toisiaan kohdassa $x = 1$

**B9**




Merkitään poisleikattavan neliön sivun pituutta kirjaimella $x$. Tällöin laatikon pohjan leveys $50-2x$.

Merkitään laatikon pohjan pituutta kirjaimella $y$. Koska pahvilevyn pituus on $100$ cm voidaan muodostaa yhtälö ja ratkaista lauseke muuttujalle $y$.

$$\begin{aligned} 2y+2x &= 100 \\ 2y &= 100-2x \quad \vert :2 \\ y &= 50-x \end{aligned}$$

Laatikon korkeus on $x$.

Muodostetaan laatikon tilavuuden lauseke.

$$V=(50-2x)\cdot y\cdot x=(50-2x)(50-x)\cdot x=2x^3-150x+2500x$$

Laatikon sivujen pituuksien on oltava positiivisia. Muodostetaan tämän perusteella epäyhtälöt, joista voidaan päätellä funktion $V$ määrittelyehto.

$x > 0$ ja $50 - 2x > 0$

$x < 25$

Hyväksymällä mukaan tapaukset, joissa $x = 0$ ja $x = 25$, saadaan funktion $V$ määrittelyjoukoksi suljettu väli $[0, 25]$.

Laatikon tilavuus muuttujan $x$ funktiona on
$V(x) = 2x^3 - 150x + 2500x$, kun $0 \le x \le 25$.

Polynomifunktio $V$ saavuttaa välillä $[0, 25]$ suurimman arvonsa välille $]0, 25[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Funktion $V$ derivaattafunktio on $V'(x) = 6x^2 - 300x + 2500$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$6x^2 - 300x + 2500 = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = 10,566...$ tai $x = 39,433...$

Derivaattafunktion nollakohdista vain $x = 10,566\ldots$ kuuluu välille $]0, 25[$.

Lasketaan funktion $V$ arvot välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$V(0) = 0$

$V(25) = 0$

$V(10,566...) = 12028,1...$ suurin

Laatikon tilavuus on suurin, kun poistettavan neliö sivun pituus $x$ on 10,566… cm ≈ 11 cm.

Vastaus 11 cm

# B10

Käyrälle $y = 2x^2$ kohtaan $x = a$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $k_t = y'(a)$. Derivoidaan käyrä $y$ ja lasketaan kulmakerroin.

$$y'(x) = 4x$$
$$k_t = y'(a) = 4a$$

Normaali ja tangentti ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, joten normaalin kulmakerroin voidaan ratkaista kohtisuoruusehdosta.

$$k_t \cdot k_n = -1$$
$$4a \cdot k_n = -1 \qquad | : 4a \ (\neq 0)$$
$$k_n = -\frac{1}{4a}$$

Normaali kulkee pisteen $(a,\ 2a^2)$ kautta ja sen kulmakerroin on $-\frac{1}{4a}$. Muodostetaan normaalin yhtälö.

$$y - 2a^2 = -\frac{1}{4a}(x - a) \qquad y - y_0 = k(x - x_0)$$
$$y - 2a^2 = -\frac{1}{4a}x + \frac{1}{4}$$
$$y = -\frac{1}{4a}x + 2a^2 + \frac{1}{4}$$

Suora $y = -\frac{1}{4a}x + 2a^2 + \frac{1}{4}$ leikkaa $y$-akselin kohdassa $y = 2a^2 + \frac{1}{4}$.

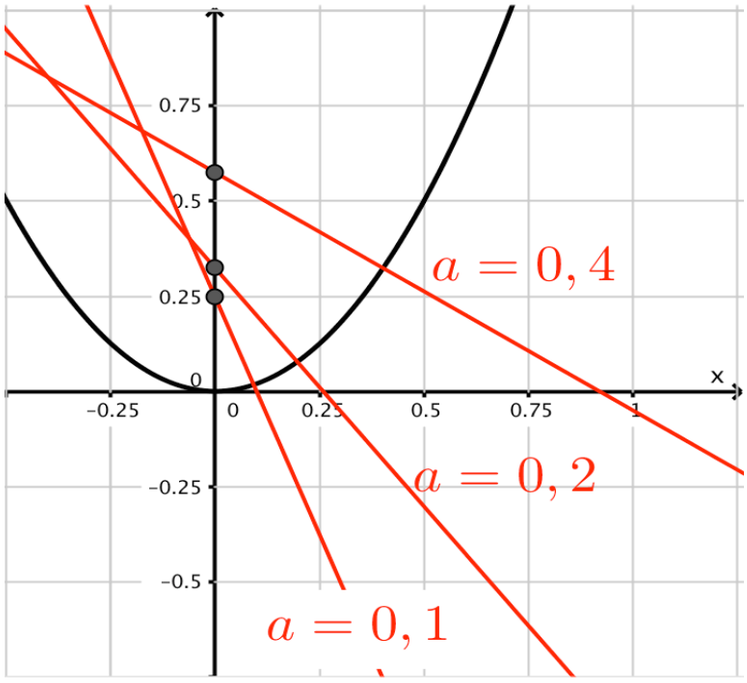
Määritetään leikkauskohdan raja-arvo, kun $a$ lähestyy lukua $0$.

$$\lim_{a \to 0} \left(\frac{1}{4} + 2a^2\right) = \frac{1}{4} + 2 \cdot 0^2 = \frac{1}{4}$$

Kun $a$ lähestyy lukua $0$, niin normaalin ja $y$-akselin leikkauspiste lähestyy pistettä $(0, \frac{1}{4})$.

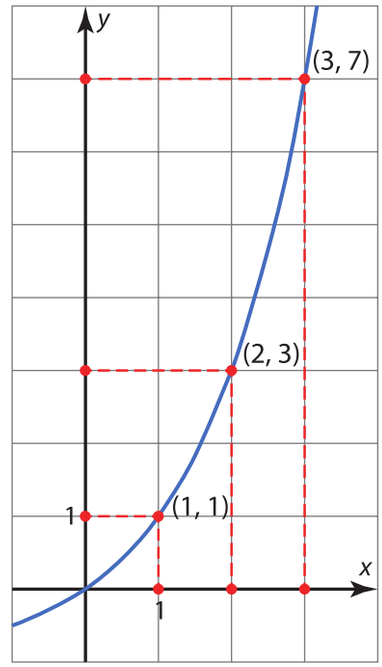
Vastaus $(0, \frac{1}{4})$

## Graafinen havainnollistus



# Funktion kuvaaja

Funktiota voidaan havainnollistaa piirtämällä sen kuvaaja koordinaatistoon. Esimerkiksi funktion $g(x) = 2^x - 1$ kuvaaja muodostuu koordinaatiston pisteistä $(x, y)$, joissa $x$ on muuttujan arvo ja $y$ on funktion arvo kohdassa $x$ eli $y = 2^x - 1$.

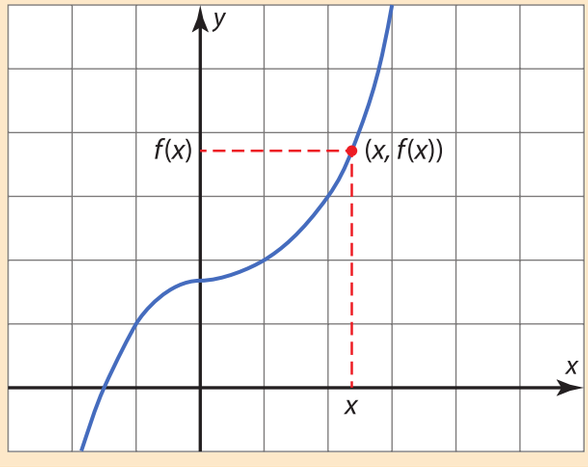



Funktion $g$ kuvaaja kulkee esimerkiksi seuraavien pisteiden kautta:

| $x$ | $y = 2^x - 1$ | piste |
|---|---|---|
| 1 | $2^1 - 1 = 1$ | (1, 1) |
| 2 | $2^2 - 1 = 3$ | (2, 3) |
| 3 | $2^3 - 1 = 7$ | (3, 7) |

**Funktion kuvaaja *xy*-koordinaatistossa**

Funktion $f$ kuvaaja muodostuu koordinaatiston pisteistä $(x, y)$, joissa $x$ on muuttujan arvo ja $y$ funktion arvo kohdassa $x$ eli $y = f(x)$.



# 4 Korkeamman asteen polynomifunktio

*Tässä luvussa ratkaistaan korkeamman asteen polynomiyhtälöitä ja epäyhtälöitä tulon nollasäännön ja merkkikaavion avulla. Samalla opitaan, kuinka polynomin nollakohdat ja tekijät liittyvät yhteen. Harjoitustehtävissä kerrataan muun muassa rekursiivista lukujonoa.*

## 4.1 Tekijöihin jakaminen

Tekijöihin jakaminen tarkoittaa sitä, että korkeamman asteen polynomi ilmaistaan alemman asteen polynomien tulona: esimerkiksi

$$x^3 - x = x(x + 1)(x - 1).$$

Polynomin tekijöihin jakamista tarvitaan ratkaistaessa korkeamman asteen yhtälöitä ja epäyhtälöitä.

Tällä kurssilla polynomeja jaetaan tekijöihin
- käyttämällä muistikaavoja käänteiseen suuntaan
- erottamalla yhteinen tekijä
- ryhmittelemällä
- nollakohtien avulla.

Kurssilla 12 opitaan, että polynomin tekijöitä voidaan määrittää jakamalla polynomi jakokulmassa. Esimerkiksi polynomin $x^3 - x$ eräs nollakohta on $1$, joten polynomi $x^3 - x$ voidaan jakaa binomilla $x - 1$.

Polynomia ei voida jakaa tekijöihin, jos sillä ei ole yhtään nollakohtaa. Tämä perustellaan luvussa 4.4.

## Muistikaavat

Jotkin polynomit voidaan jakaa tekijöihin muistikaavojen avulla.

- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$

**ESIMERKKI 1**

Jaa tekijöihin.

**a)** $4x^2 - 12x + 9$ **b)** $x^4 - 1$

RATKAISU

**a)**

| | |
|---|---|
| $4x^2 - 12x + 9$ | Tunnistetaan muistikaava. |
| $= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-3) + (-3)^2$ | $a^2 + 2ab + b^2$, missä $a = 2x$ ja $b = -3$ |
| $= (2x - 3)^2$ | $(a + b)^2$ |

**b)**

| | |
|---|---|
| $x^4 - 1$ | Tunnistetaan muistikaava. |
| $= (x^2)^2 - 1^2$ | $a^2 - b^2$, missä $a = x^2$ ja $b = 1$ |
| $= (x^2 + 1)(x^2 - 1)$ | $(a + b)(a - b)$ |
| $= (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$ | |

Binomia $x^2 + 1$ ei voida jakaa tekijöihin, koska sillä ei ole yhtään nollakohtaa.

VASTAUS

**a)** $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$

**b)** $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$

## Yhteisen tekijän erottaminen

Monomin ja polynomin kertolasku perustuu osittelulakiin:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Menetelmää, jossa tämä päättely tehdään käänteiseen suuntaan, sanotaan *yhteisen tekijän erottamiseksi*:

$$ab + ac = a(b + c).$$

**ESIMERKKI 2**

Jaa tekijöihin.

**a)** $7x^5 + 14x^3$ **b)** $x^3 - 9x$

**RATKAISU**

**a)**

$7x^5 + 14x^3$ — Tunnistetaan yhteinen tekijä $7x^3$.

$= 7x^3 \cdot x^2 + 7x^3 \cdot 2$ — Erotetaan yhteinen tekijä.

$= 7x^3(x^2 + 2)$ — Binomia $x^2 + 2$ ei voida jakaa tekijöihin, koska sillä ei ole yhtään nollakohtaa.

**b)**

$x^3 - 9x$ — Erotetaan yhteinen tekijä $x$.

$= x(x^2 - 9)$

$= x(x^2 - 3^2)$ — $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$= x(x + 3)(x - 3)$

**VASTAUS**

**a)** $7x^5 + 14x^3 = 7x^3(x^2 + 2)$

**b)** $x^3 - 9x = x(x + 3)(x - 3)$

Tällä kurssilla tekijöihin jakaminen tehdään enimmäkseen ilman laskinta, mutta laajempien analysointia vaativien tehtävien rutiiniosia voidaan laskea myös laskimella.

**Tekijöihin jakaminen laskimella**

Polynomin jakaminen tekijöihin tapahtuu yleensä factor-komennolla. Esimerkiksi `factor(x^2 - x) = x(x - 1)`.

Selvitä, kuinka polynomi jaetaan tekijöihin laskimellasi. Jaa esimerkin 2 polynomit tekijöihin ja varmista, että saat oikeat tulokset.

# 4.4 Nollakohtien ja tekijöiden yhteys

## Tekijöihin jakaminen nollakohtien avulla

Tulon nollasääntöä soveltamalla voidaan muodostaa toisen asteen yhtälö, joilla on halutut juuret. Esimerkiksi yhtälö, jonka juuriksi halutaan luvut $-3$ ja $4$, voidaan muodostaa seuraavasti.

$x = -3 \quad \text{tai} \quad x = 4$

Käytetään tulon nollasääntöä käänteiseen suuntaan.

$x + 3 = 0 \quad \text{tai} \quad x - 4 = 0$

$(x + 3)(x - 4) = 0$

$x^2 - 4x + 3x - 12 = 0$

$x^2 - x - 12 = 0$

Yhtälön juuret eivät muutu, kun yhtälö kerrotaan nollasta eroavalla luvulla. Toisen asteen yhtälöt, joiden juuret ovat $-3$ ja $4$, voidaan siis esittää muodossa

$$a(x + 3)(x - 4) = 0,$$

missä $a \neq 0$.

Näyttää siltä, että jos tunnetaan toisen asteen polynomin nollakohdat, niin polynomi voidaan ilmaista tekijöidensä tulona. Esimerkki ei yksinään todista päätelmää oikeaksi, vaan se täytyy vielä perustella täsmällisemmin.

**Toisen asteen polynomin nollakohtien ja tekijöiden yhteys** **Lause**

1) Jos yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on kaksi juurta $x_1$ ja $x_2$, niin polynomin $ax^2 + bx + c$ ensimmäisen asteen tekijät ovat $x - x_1$ ja $x - x_2$ siten, että

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

2) Jos yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ ei ole yhtään juurta, niin polynomilla $ax^2 + bx + c$ ei ole yhtään ensimmäisen asteen tekijää. Tällöin sanotaan, että polynomi on *jaoton*.

Jos yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on ainoastaan yksi juuri $x_1$, niin sitä kutsutaan *kaksoisjuureksi*.
Tällöin $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2$.

TODISTUS

## Tapaus 1: Kaksi juurta tai yksi juuri

Yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on kaksi juurta, jos yhtälön diskriminantti $D = b^2 - 4ac$ on positiivinen. Juuret ovat

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on yksi (kaksois)juuri, jos yhtälön diskriminantti $D = 0$. Tällöin

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b}{2a} \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b}{2a} \quad \text{eli} \quad x_1 = x_2.$$

Osoitetaan, että kummassakin tapauksessa
$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + bx + c$.

**1.** Ryhdytään laskemaan tuloa $a(x - x_1)(x - x_2)$.

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= a(x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2) \\ &= a(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2) \end{aligned}$$

**2.** Lasketaan juurten summa $x_1 + x_2$.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D} - b + \sqrt{D}}{2a} \\ &= \frac{-b - b}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

**3.** Lasketaan juurten tulo $x_1x_2$.

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b - \sqrt{D})(-b + \sqrt{D})}{2a \cdot 2a} \\ &= \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

**4.** Sijoitetaan juurten summa $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ja tulo $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ polynomiin $a(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2)$.

$$\begin{aligned} a(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2) &= a(x^2 - x(-\frac{b}{a}) + \frac{c}{a}) \\ &= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) \\ &= ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

**5.** Siis on osoitettu, että $a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + bx + c$.

**Huomaa!**
Todistuksessa saadaan tietoa toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ juurten $x_1$ ja $x_2$ summasta ja tulosta:

- summa $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- tulo $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Summan ja tulon kaavat pätevät myös silloin, kun yhtälöllä on vain yksi juuri.

Tällöin

$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

ja yhtälö voidaan saattaa muotoon $a(x - x_1)^2 = 0$.

### Tapaus 2: Ei yhtään juurta

Oletetaan, että yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ ei ole yhtään juurta.

Jos polynomilla $ax^2 + bx + c$ olisi ensimmäisen asteen tekijä $sx + t$, missä $s \neq 0$, niin olisi olemassa jokin ensimmäisen asteen polynomi $P(x)$ niin, että $ax^2 + bx + c = P(x)(sx + t)$.

Mutta tulon nollasäännöstä seuraa, että tällöin $x = -\frac{t}{s}$ olisi yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ juuri. Koska tämä on ristiriita, niin polynomilla $ax^2 + bx + c$ ei ole ensimmäisen asteen tekijää. □

**Polynomin nollakohtien ja tekijöiden yhteys** **Lause**

Luku $x_0$ on polynomin $P(x)$ nollakohta, jos ja vain jos $x - x_0$ on polynomin $P(x)$ tekijä.

Esimerkiksi jakolaskun $13 : 5$ *osamäärä* on $2$ ja *jakojäännös* $3$.

Jakolaskun tulos voidaan ilmaista *jakoyhtälön* avulla:
$13 = 2 \cdot 5 + 3$.

Lausetta voidaan perustella seuraavasti: Oletetaan, että polynomien jakolaskun $P(x) : (x - x_0)$ osamäärä on polynomi $Q(x)$ ja jakojäännös reaaliluku $r$. Tällöin $P(x) = Q(x)(x - x_0) + r$.

Jakojäännös $r$ voidaan laskea sijoittamalla yhtälöön $x = x_0$.

$$P(x_0) = Q(x_0)(x_0 - x_0) + r = Q(x_0) \cdot 0 + r = r$$

Siis jakojäännös $r = P(x_0)$. Toisaalta $x - x_0$ on polynomin $P(x)$ tekijä eli jakolasku $P(x) : (x - x_0)$ menee tasan täsmälleen silloin, kun jakojäännös $r = 0$ eli $P(x_0) = 0$.

Lause todistetaan täsmällisemmin kurssilla 12. Lauseesta seuraa tulos:

**Polynomiyhtälön juurten lukumäärä** **Lause**

Jos polynomiyhtälön asteluku on $n$, niin yhtälöllä on enintään $n$ juurta.

TODISTUS

Oletetaan, että $n$:nnen asteen polynomiyhtälöllä $P(x) = 0$ on $k$ juurta $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Tällöin binomit $x - x_1, x - x_2, \ldots, x - x_k$ ovat polynomin $P(x)$ tekijöitä. Toisin sanoen

$$P(x) = Q(x)(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_k),$$

missä $Q(x)$ on jokin polynomi.

Tulo $(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_k)$ on polynomi, jonka asteluku on $k$. Koska polynomin $P(x)$ asteluku on $n$, niin polynomin $Q(x)$ asteluku on $n - k \geq 0$. Siten $k \leq n$. □

## ESIMERKKI 1

Jaa tekijöihin polynomi $5x^2 + 4x - 1$.

### RATKAISU

Ratkaistaan nollakohdat.

$$5x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-1)}}{2 \cdot 5} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{10} = \frac{-4 \pm 6}{10}$$

$$x = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \text{ tai } x = \frac{-10}{10} = -1$$

Jaetaan polynomi tekijöihin.

$$5x^2 + 4x - 1$$

$$= 5(x - \frac{1}{5})(x - (-1))$$

$$= (5x - 1)(x + 1)$$

$a(x - x_1)(x - x_2)$, jossa $a = 5$, $x_1 = \frac{1}{5}$ ja $x_2 = -1$.

Polynomi $5x^2 + 4x - 1$ voidaan jakaa tekijöihin myös ryhmittelymenetelmällä:

$5x^2 + 4x - 1$
$= 5x^2 + 5x - x - 1$
$= 5x(x + 1) - 1(x + 1)$
$= (5x - 1)(x + 1)$

### VASTAUS

$$5x^2 + 4x - 1 = (5x - 1)(x + 1)$$

## Polynomin muodostaminen nollakohtien avulla

**ESIMERKKI 2**

Muodosta kolmannen asteen polynomifunktio, jonka nollakohdat ovat $-2$, $0$ ja $3$ ja jonka arvo kohdassa $2$ on $4$. Piirrä funktion kuvaaja.

**RATKAISU**

Kolmannen asteen polynomilla voi olla enintään kolme nollakohtaa. Polynomin nollakohdat ovat $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ ja $x_3 = 3$, jos ja vain jos sen tekijät ovat

$x - x_1 = x - (-2) = x + 2,$

$x - x_2 = x - 0 = x,$

$x - x_3 = x - 3.$

Funktion lauseke on siis muotoa

$P(x) = a \cdot (x + 2) \cdot x \cdot (x - 3) = ax(x + 2)(x - 3)$, jossa $a \neq 0$.

Ratkaistaan kertoimen $a$ arvo.

$P(2) = 4$ Funktion arvo kohdassa $2$ on $4$.

$a \cdot 2 \cdot (2 + 2)(2 - 3) = 4$

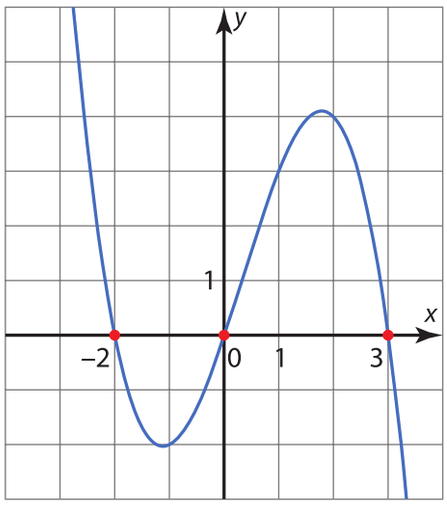
$a = -\frac{1}{2}$

Polynomin voi myös sieventää muotoon

$P(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x.$

Siis $P(x) = -\frac{1}{2}x(x + 2)(x - 3)$.

Piirretään funktion kuvaaja laskimella.




**VASTAUS**

$P(x) = -\frac{1}{2}x(x + 2)(x - 3)$

## Luvun etäisyys nollasta

**Itseisarvo lukusuoralla** — Määritelmä

Luvun $a$ *itseisarvo* on luvun $a$ etäisyys luvusta $0$.

Luvun $a$ itseisarvoa merkitään $|a|$.

Määritelmästä seuraa, että positiivisen luvun $a$ itseisarvo on luku $a$ itse, negatiivisen luvun $a$ itseisarvo on sen vastaluku $-a$ ja luvun $0$ itseisarvo on $0$.

Näiden havaintojen perusteella voidaan itseisarvon määritelmä ilmaista täsmällisemmin:

**Itseisarvo** — Määritelmä

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ kun } a \geq 0 \\ -a, \text{ kun } a < 0 \end{cases}$$

**Itseisarvon ominaisuuksia** — Lause

Luvun itseisarvo on aina epänegatiivinen.

$$|a| \geq 0$$

Luvun ja sen vastaluvun etäisyydet luvusta $0$ ovat samat, joten luvun ja sen vastaluvun itseisarvot ovat yhtä suuret.

$$|a| = |-a|$$

Tulon itseisarvo on itseisarvojen tulo.

$$|ab| = |a||b|$$

Osamäärän itseisarvo on itseisarvojen osamäärä.

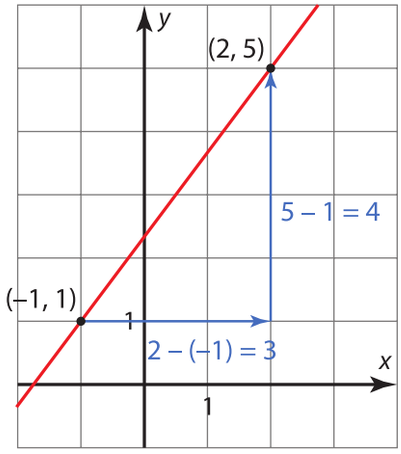
$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad (b \neq 0)$$

## Suoran kulmakertoimen laskeminen

Jos tunnetaan suoran kahden pisteen koordinaatit, voidaan niiden avulla laskea suoran kulmakerroin.

Jos suora kulkee pisteiden $(-1, 1)$ ja $(2, 5)$ kautta, voidaan $\Delta y$ laskea $y$-koordinaattien erotuksena ja $\Delta x$ $x$-koordinaattien erotuksena:

$$\Delta y = 5 - 1$$
$$\Delta x = 2 - (-1).$$

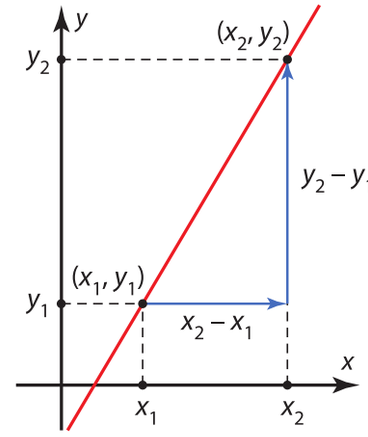



Kulmakerroin on

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-1}{2-(-1)} = \frac{4}{3}.$$

*V*astaavasti, jos suora kulkee pisteiden $(x_1, y_1)$ ja $(x_2, y_2)$ kautta ja $x_1 \neq x_2$, saadaan:

$$\Delta y = y_2 - y_1$$
$$\Delta x = x_2 - x_1.$$




Kulmakerroin on

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Näiden havaintojen perusteella voidaan suoran kulmakertoimelle antaa aiempaa täsmällisempi määritelmä.

**Huomaa!**
Mallikuvassa $x_2 > x_1$, mutta suuruusjärjestys ei vaikuta kulmakertoimen arvoon, sillä jos järjestys vaihdetaan, niin molemmat $\Delta y$ ja $\Delta x$ vaihtavat merkkiään ja suhteen arvo säilyy samana.

**Määritelmä**

**Suoran kulmakerroin**

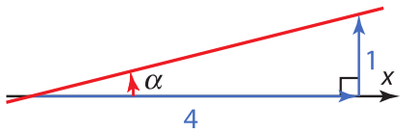
Jos suora kulkee pisteiden $(x_1, y_1)$ ja $(x_2, y_2)$ kautta ja $x_1 \neq x_2$, niin suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

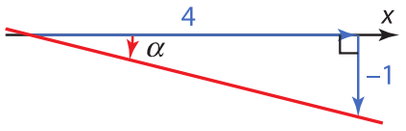
Jos suora kulkee pisteiden $(x_1, y_1)$ ja $(x_2, y_2)$ kautta ja $x_1 = x_2$, niin suoralla ei ole kulmakerrointa.

## Suoran suuntakulma

Suoran suunta voidaan ilmaista myös suoran ja $x$-akselin positiivisen suunnan välisen terävän kulman avulla. Määritellään *suoran suuntakulma* positiiviseksi, kun suora on nouseva, ja negatiiviseksi, kun suora on laskeva.



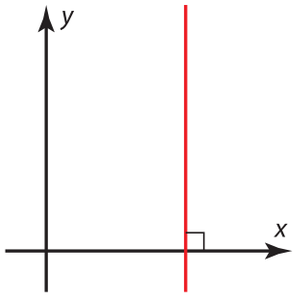

Kulmakerroin on positiivinen.
Suuntakulma on positiivinen.




Kulmakerroin on negatiivinen.
Suuntakulma on negatiivinen.

Suorakulmaisessa kolmiossa kulman tangentti on vastaisen kateetin pituuden suhde viereisen kateetin pituuteen. Yllä olevan kuvan nousevan suoran kulmakertoimen $\frac{1}{4}$ ja suuntakulman $\alpha$ välillä on yhteys $\tan\alpha = \frac{1}{4}$.

Suoran suuntakulma on $\alpha = \tan^{-1}(\frac{1}{4}) = 14{,}036\ldots° \approx 14°$.




Myös negatiivisen kulman tangentti voidaan laskea. Tähän tangenttikäsitteen yleistykseen palataan kurssilla 7.

Yllä olevan kuvan laskevalle suoralle pätee:

$$\tan\alpha = -\frac{1}{4}$$

$$\alpha = \tan^{-1}(-\frac{1}{4}) = -14{,}036\ldots° \approx -14°$$

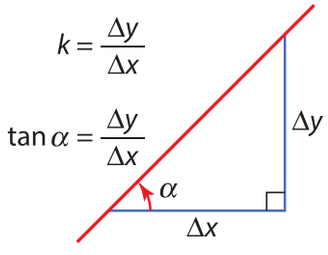
Pystysuoran suoran suuntakulmaksi sovitaan $90°$.

**Huomaa!**
Suoran suuntakulma on aina välillä $-90° < \alpha \leq 90°$.

**Määritelmä**

**Suoran suuntakulma**

Kun suora ei ole pystysuora, *suoran suuntakulma* on suoran ja $x$-akselin positiivisen suunnan välinen terävä kulma. Nousevan suoran suuntakulma on positiivinen ja laskevan suoran negatiivinen. Pystysuoran suoran suuntakulma on $90°$.




**Lause**

**Kulmakertoimen ja suuntakulman yhteys**

Kulmakertoimelle $k$ ja suuntakulmalle $\alpha$ on voimassa

$k = \tan\alpha$, missä $-90° < \alpha < 90°$.

## Suoran yhtälön muodostaminen

**Lause**

**Suoran yhtälö**

Jos suora kulkee pisteen $(x_0, y_0)$ kautta ja suoran kulmakerroin on $k$, niin suoran yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

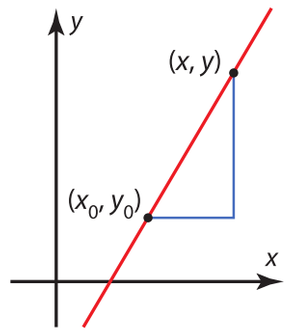
Jos suora kulkee pisteen $(x_0, y_0)$ kautta ja on $y$-akselin suuntainen, niin suoran yhtälö on $x = x_0$.

TODISTUS

Oletetaan, että pisteen $(x_0, y_0)$ kautta kulkee suora, jonka kulmakerroin on $k$.

Toinen piste $(x, y)$ on tällä samalla suoralla, jos ja vain jos pisteitä yhdistävän janan kulmakerroin on $k$.

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = k$$

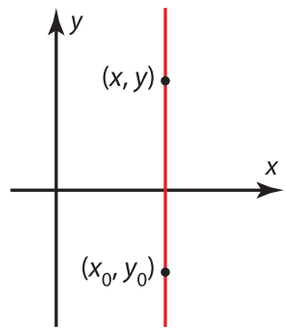



Kun yhtälön molemmat puolet kerrotaan nimittäjällä $x - x_0 \, (\neq 0)$, saadaan yhtälö

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Myös piste $(x_0, y_0)$ toteuttaa tämän yhtälön (totea tämä!).

Oletetaan seuraavaksi, että pisteen $(x_0, y_0)$ kautta kulkee $y$-akselin suuntainen suora. Tällä suoralla ei ole kulmakerrointa, mutta suoran jokaisen pisteen $x$-koordinaatti on $x_0$ eli suoran jokainen piste toteuttaa yhtälön $x = x_0$. □



## ESIMERKKI 1

Muodosta suoran yhtälö, kun

**a)** suoran kulmakerroin on $4$ ja suora kulkee pisteen $(-5, 7)$ kautta

**b)** suora kulkee pisteiden $(6, -3)$ ja $(15, 3)$ kautta.

### RATKAISU

**a)** Sijoitetaan pisteen $(-5, 7)$ koordinaatit ja kulmakerroin $4$ suoran yhtälön kaavaan.

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \text{Sijoitetaan } x_0 = -5,\ y_0 = 7 \text{ ja } k = 4.$$
$$y - 7 = 4(x - (-5))$$
$$y - 7 = 4x + 20$$
$$y = 4x + 27$$
$$0 = 4x - y + 27$$
$$4x - y + 27 = 0$$

**Huomaa!**
Suoran yhtälö on tapana antaa muodossa, jossa $y$ on ratkaistu, tai muodossa, jossa kaikki termit ovat yhtälön vasemmalla puolella.

**b)** Suora kulkee pisteiden $(6, -3)$ ja $(15, 3)$ kautta. Määritetään suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{3 - (-3)}{15 - 6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Pisteeksi $(x_0, y_0)$ voidaan valita kumpi tahansa annetuista pisteistä. Valitaan piste $(15, 3)$ ja sijoitetaan pisteen koordinaatit ja kulmakerroin suoran yhtälön kaavaan.

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \text{Sijoitetaan } x_0 = 15,\ y_0 = 3 \text{ ja } k = \frac{2}{3}.$$
$$y - 3 = \frac{2}{3}(x - 15)$$
$$y - 3 = \frac{2}{3}x - 10$$
$$y = \frac{2}{3}x - 7 \qquad \mid \cdot 3$$
$$3y = 2x - 21$$
$$0 = 2x - 3y - 21$$
$$2x - 3y - 21 = 0$$

### VASTAUS

**a)** $y = 4x + 27$ eli $4x - y + 27 = 0$

**b)** $y = \frac{2}{3}x - 7$ eli $2x - 3y - 21 = 0$

**Suoran piirtäminen geometriaohjelmalla**

**1)** Suora voidaan piirtää geometriaohjelman piirtotyökaluilla. Suoran värin ja viivan leveyden voi valita halutulla tavalla. Ohjelma ilmoittaa suoran yhtälön halutussa muodossa.

Harjoittele piirtämällä esimerkin 1 suorat ja määrittämällä niiden yhtälöt.

**2)** Suora voidaan piirtää myös syöttämällä sen yhtälö geometriaohjelmaan ratkaistussa tai yleisessä muodossa.

Harjoittele piirtämällä esimerkin 3 suorat.

## Suorien välinen kulma

Kurssissa 3 määriteltiin, että suorien välinen kulma tarkoittaa suorien leikkauspisteeseen muodostuvista kulmista pienintä. Suorien välinen kulma $\alpha$ toteuttaa aina ehdon $0° \le \alpha \le 90°$.

Seuraavassa esimerkissä näytetään, kuinka kahden suoran välinen kulma määritetään, kun tunnetaan suorien yhtälöt.

**ESIMERKKI 4**

Määritä suorien $x - 3y + 8 = 0$ ja $2x + y - 5 = 0$ suuntakulmat ja niiden avulla suorien välinen kulma asteen tarkkuudella.

**RATKAISU**

Määritetään suoran $x - 3y + 8 = 0$ kulmakerroin $k_1$ ja suuntakulma $\alpha_1$.

$$x - 3y + 8 = 0$$
$$-3y = -x - 8 \quad \vert : (-3)$$
$$y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$$

Siis $k_1 = \frac{1}{3}$.

$$\tan\alpha_1 = \frac{1}{3} \qquad \tan\alpha = k$$
$$\alpha_1 = \tan^{-1}\frac{1}{3} = 18{,}434\ldots°$$

Määritetään suoran $2x + y - 5 = 0$ kulmakerroin $k_2$ ja suuntakulma $\alpha_2$.

$$2x + y - 5 = 0$$
$$y = -2x + 5$$

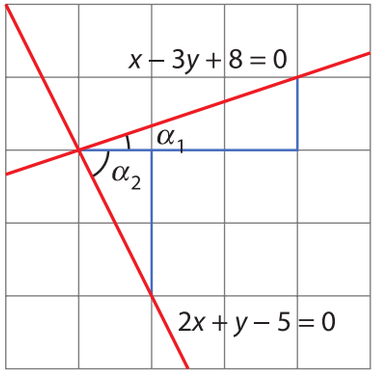
Siis $k_2 = -2$.

$$\tan\alpha_2 = -2 \qquad \tan\alpha = k$$
$$\alpha_2 = \tan^{-1}(-2) = -63{,}434\ldots^\circ$$

Suora $x - 3y + 8 = 0$ on nouseva ja suora $2x + y - 5 = 0$ laskeva. Lasketaan suorien välinen kulma.

$$18{,}434\ldots^\circ + 63{,}434\ldots^\circ$$
$$= 81{,}868\ldots^\circ \approx 82^\circ$$

Suorien välinen kulma on $82°$.

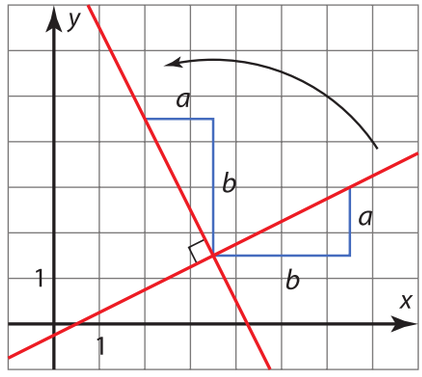



**VASTAUS**

$82^\circ$

## Suorien kohtisuoruus

Tutkitaan suoraa, joka ei ole $y$-akselin suuntainen ja jonka kulmakerroin on $k_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a}{b}$.




Kierretään suoraa 90 astetta niin, että saadaan suora, joka on kohtisuorassa alkuperäistä suoraa vastaan. Kierrettyä suoraa sanotaan alkuperäisen suoran *normaaliksi*.

Kun suoraa kierretään, suoralle piirretty apukolmio kiertyy mukana ja koordinaattien muutokset vaihtavat paikkaa. Normaalilla $\Delta y = -b$ ja $\Delta x = a$. Normaalin kulmakerroin on siis $k_2 = -\frac{b}{a}$.

Lasketaan kulmakertoimien tulo.

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{a}{b} \cdot (-\frac{b}{a}) = -\frac{ab}{ab} = -1$$

Havaitaan, että suoran ja sen normaalin kulmakertoimien tulo on $-1$.

**Lause**

**Kohtisuoruusehto**

Oletetaan, että suorat $s_1$ ja $s_2$ eivät ole koordinaattiakselien suuntaisia ja niiden kulmakertoimet ovat $k_1$ ja $k_2$. Tällöin suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan täsmälleen silloin, kun niiden kulmakertoimien tulo on $-1$.

$$s_1 \perp s_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$$

Yhtälön $k_1 k_2 = -1$ ratkaisu $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ voidaan muotoilla sanallisesti: suoralle piirretyn normaalin kulmakerroin on suoran kulmakertoimen käänteisluvun vastaluku.

## ESIMERKKI 2

Määritä yhtälö suoran $5x - 6y + 4 = 0$ normaalille, joka kulkee pisteen $(-25, 7)$ kautta.

### RATKAISU

Määritetään suoran $5x - 6y + 4 = 0$ kulmakerroin.

$5x - 6y + 4 = 0$

$-6y = -5x - 4 \quad | : (-6)$

$y = \frac{5}{6}x + \frac{2}{3}$

Saatetaan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon $y = kx + s$.

Suoran kulmakerroin on $k_1 = \frac{5}{6}$.

Ratkaistaan normaalin kulmakerroin.

$\frac{5}{6} \cdot k_2 = -1 \quad | \cdot \frac{6}{5}$

$k_2 = -\frac{6}{5}$

Kohtisuoruusehto: $k_1 k_2 = -1$.

**Toinen tapa**
Normaalin kulmakerroin voidaan myös päätellä: kulmakertoimen $\frac{5}{6}$ käänteisluvun vastaluku on $-\frac{6}{5}$.

Normaali kulkee pisteen $(-25, 7)$ kautta ja sen kulmakerroin on $-\frac{6}{5}$.
Muodostetaan normaalin yhtälö.

$y - 7 = -\frac{6}{5}(x - (-25))$

$y - 7 = -\frac{6}{5}x - 30$

$y = -\frac{6}{5}x - 23$

Sijoitetaan koordinaatit ja kulmakerroin kaavaan $y - y_0 = k(x - x_0)$.

### VASTAUS

$y = -\frac{6}{5}x - 23$

**Yhdensuuntaiset ja kohtisuorat suorat geometriaohjelmalla**
Geometriaohjelmalla voidaan annetulle suoralle piirtää yhdensuuntainen suora tai normaali, joka kulkee annetun pisteen kautta.

Selvitä kuinka käyttämässäsi ohjelmassa voidaan piirtää yhdensuuntainen suora ja normaali.

# Vihjeet, Tekijä Pitkä matematiikka 6

**11.** **Vihje:** Löydät sopivan laventajan, kun jaat nimittäjät ensin tekijöihin.

**16.** **Vihje:** Vertaa esimerkkiin 5.

**17.** **Vihje:** Vertaa esimerkkiin 5.

**19.** **Vihje:** Löydät sopivan laventajan, kun jaat nimittäjät ensin tekijöihin.

**20.** **Vihje:** Sievennä ensin funktion lauseke.

**23.** **Vihje:** Murtolauseke voidaan supistaa, jos osoittajalla ja nimittäjällä on sama nollakohta.

**33.** **Vihje:** Selvitä ensin nimittäjien tekijät. Kerro sitten yhtälön molemmat puolet nimittäjien tekijöiden tulolla.

**42.** **Vihje:** Selvitä ensin nimittäjien tekijät. Kerro sitten yhtälön molemmat puolet nimittäjien tekijöiden tulolla.

**75.** **Vihje:** Päättele toispuolisten raja-arvojen suuruudet ja merkitse ne yhtä suuriksi.

**84.** **Vihje:** Päättele toispuolisten raja-arvojen suuruudet ja merkitse ne yhtä suuriksi.

**86.** **Vihje:**

**a)** Sievennä erotusta $|f(x) - 7|$ niin, että saat näkyviin lausekkeen $|x - 2|$, eli luvun $x$ etäisyyden kohdasta $2$, ja päättele vastaus.

**b)** Sievennä erotusta $|f(x) - 0|$ niin, että saat näkyviin lausekkeen $|x - 0|$, eli luvun $x$ etäisyyden kohdasta $0$, ja päättele vastaus.

**97.** **Vihje:** Sievennä lauseke ensin yhdeksi rationaalilausekkeeksi ja supista.

**104.** **Vihje:** Sievennä lauseke ensin yhdeksi rationaalilausekkeeksi ja supista.

**105.** **Vihje:** Sievennä lauseke ensin yhdeksi rationaalilausekkeeksi ja supista.

**106.** **Vihje:** Laske toispuoliset raja-arvot.

**107.** **Vihje:** Laske toispuoliset raja-arvot. Huomaa, että vain toinen itseisarvolausekkeista vaihtaa merkkiä tarkastelukohdassa.

**108.** **Vihje:** Sijoita ensin raja-arvon lausekkeeseen funktion lauseke ja sievennä.

**110.** **Vihje:** Millä edellytyksellä rationaalilausekkeella voi olla raja-arvo nimittäjän nollakohdassa?

**129.** **Vihje:** Tutki, miten $a$ pitää määritellä, että raja-arvo kohdassa $2$ on olemassa.

**161.** **Vihje:** Muodosta ja sievennä ensin funktion erotusosamäärä kohdassa $-1$.

**163.** **Vihje:** Derivaatta on tangentin kulmakerroin.

**164.** **Vihje:** Skaalaa y-akselin asteikko niin, että kuvaaja sopii näyttöön halutulta alueelta. Piirrä a-kohdassa sekantti ja b-kohdassa tangentti. Määritä näiden kulmakertoimet.

**165.** **Vihje:** Määritä ensin derivaattafunktio ja muodosta sitten yhtälö.

**172.** **Vihje:** Skaalaa $y$-akselin asteikko sopivasti, jotta kuvaaja sopii näyttöön halutulta alueelta. Piirrä a-kohdassa sekantti ja b-kohdassa tangentti. Määritä näiden kulmakertoimet.

**176.** **Vihje:** **b)** Määritä ensin derivaatta yleisesti kohdassa a eli $f'(a)$.

**184.** **Vihje:** Funktion kuvaajalle kohtaan $x = a$ piirretyn tangentin kulmakerroin ilmaisee funktion arvojen hetkellisen muutosnopeuden kohdassa $a$.

**193.** **Vihje:** **c)** Kiven nopeus sen korkeimmassa kohdassa on $0$.

**194.** **Vihje:** Funktion kuvaajalle kohtaan $x = a$ piirretyn tangentin kulmakerroin ilmaiseen funktion kuvaajan jyrkkyyden kohdassa $a$.

**197.** **Vihje:** Käytä tulon derivointisääntöä.

**198.** **Vihje:** Funktion $f$ toinen derivaatta on derivaattafunktion $f''$ derivaatta.

**199.** **Vihje:**

**1)** $f''$ on funktion $f$ toinen derivaatta eli derivaattafunktion $f'$ derivaatta.

**2)** Toisen asteen polynomifunktion lauseke on muotoa $f(x) = ax^2 + bx + c$.

**214.** **Vihje:** Laadi funktion $f(x) = x^5 - 5x + a$ kulkukaavio.

**224.** **Vihje:** Osoita, että funktiolla $f(x) = (x + 1)^3 - 3x$ on ainakin yksi nollakohta. Laadi funktion $f$ kulkukaavio ja päättele, että funktiolla on korkeintaan yksi nollakohta.

**225.** **Vihje:** Laadi funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$ kulkukaavio.

**232.** **Vihje:** Määritä funktion suuri arvo välillä $[0, 24]$.

**241.** **Vihje:** Katso lause s. 110.

**242.** **Vihje:** Määritä funktion $f$ pienin arvo.

**243.** **Vihje:** Määritä funktion $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 20$ suurin arvo, kun $x > 1$.

**244.** **Vihje:** Muodosta pinta-alan funktio $A(x)$, kun paraabelilla sijaitseva kärki on $(x, y)$.

**245.** **Vihje:** Määritä ensin itseisarvomerkin sisällä olevan funktion suurin ja pienin arvo.

**246.** **Vihje:** Tutki funktiota $f(x) = -x^3 + 29x^2 - 61x$, kun $x > 0$.

**247.** **Vihje:** Funktion arvojen muutosnopeuden kertoo derivaattafunktio $f'$. Funktion arvot pienenevät nopeimmin kun funktion muutosnopeus on negatiivinen ja pienin.

**248.** **Vihje:** Katso tehtävän edellisen tehtävän vihje.

**249.** **Vihje:** Sievennä lauseketta niin, että siinä on vain yksi muuttuja. Millä välillä muuttujan arvot ovat?

**254.** **Vihje:** Ratkaise tangentin ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.

**255.** **Vihje:** Selvitä b-kohdassa ensin ajanhetki, jolloin pallo osuu maahan.

**257.** **Vihje:** Osoita, että että leikkauspisteeseen piirrettyjen tangenttien kulmakertoiminen tulo on $-1$.

**260.** **Vihje:** Muodosta yhtälö derivaattafunktion ja tangentin kulmakertoimen avulla.

**265.** **Vihje:** Piirrä kuva.

**267.** **Vihje:** Sivuamispisteessä käyrien derivaatat ovat yhtä suuret, kun $x = \frac{a}{12}$. Sivuamispisteessä käyrillä on yhteinen piste. Muodosta yhtälöpari.

**268.** **Vihje:** Leikkauspisteessä derivaattojen tulo on $-1$.

**269.** **Vihje:** Muodosta yhtälö derivaattafunktion ja tangentin kulmakertoimen avulla.

**271.** **Vihje:** Paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax^2 + bx + c$. Sijoita lentorata koordinaatistoon, niin että kivi lähtee origosta ja määritä vakioiden $a$, $b$ ja $c$ arvot.

**272.** **Vihje:** Siinä käyrän $y = f(x)$ pisteessä, joka on lähimpänä suoraa $y = g(x)$, on käyrän tangentin kulmakerroin sama kuin suoran kulmakerroin.

**313.** **Vihje:** Maksimikohdassa täytyy funktion derivaatan olla nolla.

**319.** **Vihje:** Lantakuoriaisten määrän muutosnopeuden ilmaisee derivaattafunktio. On siis etsittävä derivaattafunktion suurin arvo.

**321.** **Vihje:** Nimittäjä on aina positiivinen. Määritä vakio $a$ niin, että osoittaja saa vain negatiivisia arvoja.

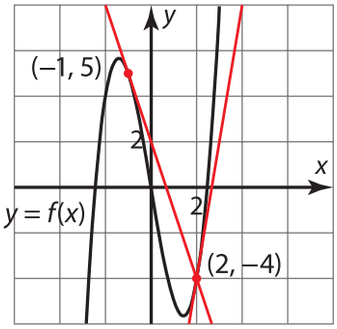
**327.** **Vihje:** Merkitse sivujen pituuksia kirjaimilla $x$ ja $y$. Muodosta pinta-alan avulla yhtälö ja ratkaise lauseke $x$:lle tai $y$:lle. Määritä pienin arvo kulkukaavion avulla.

**330.** **Vihje:** Piirrä kuva ja selvitä lausekkeet suorakulmion leveydelle ja pituudelle.

**333.** **Vihje:** Huomaa, että seinän suuntainen sivu voi olla pituudeltaan korkeintaan 12 m pitkä.

**336.** **Vihje:** voitto = myyntitulo − kulut

**340.** **Vihje:** Annettu piste on funktion kuvaajalla, mutta löytyy myös toinen kuvaajan piste, johon piirretty tangentti leikkaa kuvaajan annetussa pisteessä.




**341.** **Vihje:** Merkitse toisen osan pituutta kirjaimella $x$, jolloin toisen osan pituus on $6 - x$.

**342.** **Vihje:** Piirrä kuva ja päättele lausekkeet lieriön pohjan säteelle ja lieriön korkeudelle.

### Kertaus

**K9.** **Vihje:** Jaa nimittäjä tekijöihin nollakohtien avulla. Jaa osoittaja tekijöihin erottamalla yhteinen tekijä ja käyttämällä binomin neliön kaavaa tai nollakohtien avulla.

**K18.** **Vihje:** Tutki raja-arvoa kohdassa $4$.

**K23.** **Vihje:** Etsi välin $[-3, 3]$ sisältä erillisiä osavälejä, joilla voit soveltaa Bolzanon lausetta.

**K25.** **Vihje:** Sievennä lauseke murtolausekkeeksi ja supista.

**K40.** **Vihje:** Selvitä funktion minimikohta ja maksimikohta.

**K50.** **Vihje:** Määritä tangentin yhtälö ja piirrä kuva.

**K51.** **Vihje:** Merkitse pohjan leveyttä kirjaimella $x$ ja akvaarion korkeutta kirjaimella $h$. Muodosta pinta-alalle lauseke muuttujan $x$ funktiona.

**K52.** **Vihje:** Merkitse pohjan sädettä kirjaimella $r$ ja lieriön korkeutta kirjaimella $h$. Muodosta pinta-alalle lauseke pohjan säteen $r$ funktiona.

### Tehtäväsarja B

**B1.** **Vihje:** Määritä funktion $f(x) = -x^4 + 7x^3 - 5x^2 - 130$ suurin arvo.

**B5.** **Vihje:** Kasvunopeus on suurimmillaan, kun derivaattafunktion arvo on suurin.